

Тема 5. Економетричні моделі динаміки. Лекція 6. Економетричні моделі динаміки.

Зміст

- 1.Часові ряди, основні поняття.
2. Розкладання часових рядів на складові.
- 3.Тренд часового ряду і його виявлення.
4. Прогнозування економічної динаміки за трендовими моделями.

1.Часові ряди, основні поняття.

Показники багатьох явищ і процесів в економіці змінюються в часі. Цей розвиток має назву *економічної динаміки*. Характерним для економічної динаміки є те, що рівень показників у наступному часовому періоді значною мірою залежить від їхнього рівня в минулому. Крім того, чим довший часовий інтервал між двома явищами, тим суттєвіша різниця як у кількісному, так і в якісному їхньому стані.

Початковою інформацією математико-статистичного вивчення процесу в розвитку є ряд числових даних, що являє собою зміни деякого економічного показника в часі, який має назву *одновимірного ряду*.

Отже, дамо визначення одновимірного ряду динаміки.

Послідовність спостережень одного показника (ознаки), упорядкована залежно від послідовно зростаючих або спадних значень другого показника (ознаки) є одновимірним рядом динаміки.

Якщо ознакою, за якою відбувається впорядкування ряду, є *час*, то такий динамічний ряд має назву *часового ряду*.

Упорядкування економічних показників найчастіше відбувається саме за часом, тому в цьому розділі розглянемо принципово нові методи аналізу динамічних рядів на відміну від розділу, де розглядалися сукупності, що утворюють випадкову вибірку.

Одним з основних завдань аналізу рядів у соціально-економічних системах є вивчення структури і класифікації основних факторів, під впливом

яких формуються складові елементи часового ряду, та його розкладання на ці складові.

[До змісту](#)

2. Розкладання часових рядів на складові.

Динаміка рядів економічних явищ і процесів у загальному випадку формується під впливом чотирьох груп факторів. До них належать :

- *довготривалі*, що формують загальну тенденцію. Кожен із цих факторів окремо може діяти на процес, що досліджується, у протилежному напрямі один щодо одного. Проте в сукупності вони формують зростаючу чи спадну тенденцію цього процесу, описувану не випадковою функцією $Q_t = f(t)$, яку називають функцією тренду, або просто – трендом ;
- *сезонні*, що формують періодичну повторювані за певний час року коливання того чи іншого показника. Це теж є не випадкова функція $S_t = \varphi(t)$;
- *циклічні*, що формують зміни динаміки ряду, зумовлені дією тривалих циклів економічної, демографічної природи. Результат дії циклічних факторів позначимо за допомогою не випадкової функції $Z_t = \Psi(t)$;
- *випадкові*, які не піддаються реєстрації й обліку. Їхня дія на формування рівнів часового ряду саме і зумовлює їхню стохастичність. Позначимо цю випадкову функцію $U_t = \varsigma(t)$

Отже, в найзагальнішому випадку часовий ряд $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ економічної динаміки можна розкласти на чотири структурних елементи:

- * тренд Q_t ;
- сезонний компонент S_t ;
- циклічну складову Z_t ;
- * випадкову складову U_t .

Таким чином, під **трендом** розумітимемо стійку систематичну зміну процесу протягом довготривалого періоду, тобто тренд визначає зміни, які

зумовлюються тривалими постійно діючими факторами, що визначають основну тенденцію часових рядів.

Іноді під *трендом* розуміють лише зміну показника в середньому за весь період спостереження. Говорять, що тренд відсутній, якщо такої зміни (зростання чи спадання) у середньому немає.

У зв'язку з цим економіко-математична динамічна модель, де розвиток економічної системи моделюється через тренд, має назву *трендової моделі*.

У наведених раніше прикладах показано, що в часових рядах економічних процесів можуть відбуватися також більш або менш регулярні коливання. Якщо вони мають строго періодичний або близький до нього характер і завершуються протягом одного часового періоду, то вони мають назву *сезонних коливань*.

У тих випадках, коли період коливання становить кілька часових періодів (наприклад, років), говорять, що в часовому ряді є *довготривалий циклічний компонент*. Тренд, сезонний і циклічний компоненти мають назву *регулярних*, або *систематичних* компонентів часового ряду. Складову часового ряду, що залишається після вилучення з нього регулярних компонентів, раніше названо *випадковою*, або *нерегулярною*.

Вона є обов'язковою складовою часового ряду в економіці, бо випадкові фактори неминуче притаманні будь-якому економічному явищу.

Якщо систематичні регулярні компоненти часового ряду визначені правильно, то після їх вилучення залишковий компонент має бути *випадковим* компонентом часового ряду, тобто повинен мати такі властивості:

- характеризуватись випадковістю коливань рівнів залишкової послідовності (або простіше — залишків);
- відповідністю розподілу ймовірностей рівнів випадкового компонента нормальному закону розподілу;
- рівністю нулю математичного сподівання;

- незалежністю значень рівнів залишків, тобто відсутністю суттєвої між ними автокореляції.

Перевірка адекватності трендових моделей ґрунтується саме на перевірці виконання в залишках наведених вище чотирьох властивостей.

Якщо не виконується хоча б одна з них, модель визначається як неадекватна; навпаки, у разі виконання всіх чотирьох властивостей — модель є адекватною. Ця перевірка відбувається з використанням певних статистичних критеріїв, які докладніше буде розглянуто далі.

У більшості випадків фактичний рівень часового ряду наводиться як сума або добуток трендового, сезонного, циклічного й випадкового компонентів:

$$Y_t = Q_t + S_t + Z_t + U_t \quad \text{або} \quad Y_t = Q_t S_t Z_t U_t$$

Модель, де часовий ряд наводиться як сума перелічених компонентів, має назву *адитивної моделі*. Модель, де часовий ряд подається через добуток складових компонентів, тобто $Y_t = Q_t S_t Z_t U_t$ має назву *мультиплікативної моделі*.

У цьому розділі розглядатимемо адитивні моделі, які найчастіше трапляються у практичному застосуванні.

Отже, виходячи з адитивної природи динамічних рядів, сформулюємо основні цілі їх аналізу:

- визначити, які з наведених щойно складових Q_t, S_t, Z_t, U_t , формують рівні ряду $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$;
- розрахувати кількісні оцінки параметрів для тих регулярних функцій $f(t), \varphi(t), \psi(t)$ що є складовими ряду $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$;
- перевірити адекватне поводження нерегулярної функції U_t ;
- розрахувати ефективну прогнозну модель, виходячи з базового періоду часового ряду $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$.

[До змісту](#)

3.Тренд часового ряду і його виявлення.

Для моделювання тренду передусім необхідно провести попередній аналіз.

Попередній аналіз часових рядів економічних показників полягає насамперед у перевірці однорідності ряду, тобто у виявленні й усуненні *аномальних значень* рівнів ряду, а також визначенні *повноти* даних, можливості їх *зіставлення* і *стійкості*.

Під аномальним рівнем розуміють окремі значення рівнів часового ряду, які суттєво впливають на основні часові характеристики ряду динаміки: середній рівень, середній приріст, середній темп зростання, середній темп приросту тощо, а також на відповідну трендову модель. Причинами аномальних спостережень можуть бути помилки технічного характеру, або *помилки першого роду*, що виникають при агрегуванні або дезагрегуванні показників чи при передаванні інформації та ін. Помилки першого роду мають бути виявлені й усунути.

Крім того, аномальні рівні в часових рядах можуть виникати через впливи факторів, що мають об'єктивний характер, але можуть діяти рідко, епізодично. Такі помилки мають назву помилки *другого роду* і не можуть бути усунутими.

Для виявлення аномальних явищ використовується ряд статистичних методів. Наведемо один з них: *метод Ірвіна*.

Метод Ірвіна припускає використання такої формули:

$$\lambda = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{\sigma_y}, \quad t = 2, 3, \dots, n, \text{ де } \sigma_y - \text{середнє квадратне відхилення часового ряду, } \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}{n-1}}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t}{n}.$$

Розраховані значення $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-1}$ порівнюються з критичним значенням критерію Ірвіна λ_α , і, якщо вони будуть більші за таб-

личні, відповідне значення ряду y_t вважається аномальним. Рівень значущості α , як правило, береться 0.05

Після виявлення аномальних явищ необхідно з'ясувати причини їх виникнення. Якщо усунути ці причини немає можливості, то їхній рівень, як правило, замінюється середнім значенням ряду або арифметичною середньою двох сусідніх з ними рівнів тощо.

Злами в тенденції ряду говорять про зміну закономірності розвитку процесу або про зміну методики обчислення значень показників. Якщо значення в кінці ряду «випадає» із загальної тенденції, то без додаткової інформації про причини «викиду» на кінці ряду не можна визначити, що це — аномальне спостереження або свідчення зміни тенденції. У такому разі важливо провести якісний аналіз цих змін або дочекатись надходження нового спостереження. Якщо злам тенденції зумовлюється зміною методики розрахунку показника, то рівні ряду, які наводились попереду зламу, можуть бути використані в оцінках характеристик динаміки і для побудови моделі тільки після їх *перерахунку за новою методикою*. Якщо ж злам тенденції відображає зміну закономірностей розвитку процесу, то за інформаційну базу для статистичного аналізу потрібно взяти рівень останнього зламу тенденції.

Продовжуючи попередній аналіз часового ряду в напрямі виявлення тренду, необхідно провести статистичну перевірку наявності його в динамічному ряду. Для цього розроблено цілу низку методів . Наведемо кілька з них, що найчастіше застосовується.

1. Метод перевірки різниць середніх рівнів. Реалізація цього методу складається з чотирьох етапів.

1-й етап. Початковий часовий ряд $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ розбивається на дві частини приблизно однієї довжини: n_1 і $n_2 = n - n_1$

2-й етап. Для кожної частини ряду розраховується середнє значення і дисперсії:

$$\overline{y_1} = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} y_t}{n_1};$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} (y_t - \overline{y_1})^2}{n_1 - 1};$$

$$\overline{y_2} = \frac{\sum_{t=n_1+1}^{n_2} y_t}{n_2};$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{t=n_1+1}^{n_2} (y_t - \overline{y_2})^2}{n_2 - 1}.$$

3-й етап. Перевіряється однорідність дисперсій обох частин за допомогою критерію Фішера F_α :

$$F_\alpha = \left\{ \sigma_1^2 / \sigma_2^2, \text{ якщо } \sigma_1^2 > \sigma_2^2; \right.$$

$$F_\alpha = \left\{ \sigma_2^2 / \sigma_1^2, \text{ якщо } \sigma_2^2 > \sigma_1^2 \right.$$

Рівень значущості α беруть таким, що дорівнює 0,1; 0,01 або 0,05. Якщо розраховане значення $F_\alpha^{(p)}$ менше за табличне $F_\alpha^{(m)}$, то гіпотеза про рівність дисперсій приймається і переходимо до четвертого етапу. Якщо $F_\alpha^{(p)}$ більше або дорівнює $F_\alpha^{(m)}$ — гіпотеза про рівність дисперсій відхиляється і робиться висновок, що даний метод про визначення наявності тренду відповіді не дає.

4-й етап. Перевіряється гіпотеза про відсутність тренду з використанням t -критерію Стюдента. Для цього визначається розрахункове значення критерію Стюдента за формулою:

$$t_p = \frac{|\overline{y_1} - \overline{y_2}|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad (1)$$

де σ — середньоквадратичне відхилення різниці середніх, що визначається так:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \quad (2).$$

Якщо розрахункове значення t_p менше або дорівнює табличному значенню t_α (із рівнем значущості α), то гіпотеза про відсутність тренду приймається у протилежному випадку, тобто коли $t_p > t_\alpha$, то з імовірністю $1 - \alpha$ приймається гіпотеза про існування тренду.

2. Метод Фостера—Стьюарта. Основні показники методу Фостера—Стьюарта такі:

$$W = \sum_{t=1}^n \omega_t \text{ і } D = \sum_{t=1}^n d_t,$$

де $\omega_t = C_t + V_t$, $d_t = C_t - V_t$, причому параметри C_t і V_t мають наведені далі значення:

$$C_t = \begin{cases} 1, \text{ коли } y_t > y_{t-1}, \dots, y_1; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad V_t = \begin{cases} 1, \text{ коли } y_t < y_{t-1}, \dots, y_1; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (3).$$

З наведених співвідношень випливає, що $0 \leq W \leq n-1$.

Якщо всі рівні ряду однакові, тобто

$$y_1 = y_2, \dots, y_n, \text{ то } W = 0.$$

Якщо $y_1 < y_2 \dots y_n$, то $W = n-1$.

Аналогічно знаходять: $-(n-1) \leq D \leq n-1$

Показники D і W застосовуються для визначення тенденції зміни в часі відповідного середнього значення $\bar{y}_t$ і дисперсії S_t .

Після визначення для ряду значень D і W за критерієм Стюдента перевіряються гіпотези про відсутність тенденції в середньому значенні D і W :

$$t_p^{(1)} = \frac{D}{\sigma_2}; \quad t_p^{(2)} = \frac{W - \bar{W}}{\sigma_1}, \quad (4),$$

де σ_1 і σ_2 - середні квадратичні відхилення для W і D , $\bar{W}$ - середнє значення параметра W . Значення $\bar{W}$, σ_1 і σ_2 знаходяться в таблиці 1.

Теоретичне значення t-критерію визначається з табл. 11.1 за 5 %-го рівня значущості. Якщо $t_p^{(1)} > t_{\text{теор}}$ і $t_p^{(2)} > t_{\text{теор}}$, то гіпотеза про відсутність тренду з імовірністю 0,95 відхиляється. Якщо ж $t_p^{(1)}$ і $t_p^{(2)} < t_{\text{теор}}$, то приймається гіпотеза про відсутність тренду.

Таблиця 1.

Визначення основних показників методу Фостера–Стюарта

N	$\bar{W}$	σ_1	σ_2	n	$\bar{W}$	σ_1	σ_2
10	3,86	1,29	1,96	60	7,36	2,20	2,71
15	3,64	1,52	2,15	65	7,52	2,37	2,74
20	5,19	1,68	2,28	70	7,67	2,67	2,77
25	5,65	1,79	2,37	75	7,80	2,30	2,79
30	5,99	1,88	2,45	80	7,93	2,32	2,82
35	6,29	1,96	2,51	85	8,05	2,35	2,84
40	6,56	2,02	2,56	90	8,16	2,37	2,86
45	6,79	2,07	2,61	95	8,27	2,40	2,88
50	7,00	2,12	2,64	100	8,37	2,42	2,89
55	7,19	2,16	2,68	—	—	—	—

[До змісту](#)**4. Прогнозування економічної динаміки за трендовими моделями.**

Метод простої ковзної середньої. Рівні економічних часових рядів коливаються, тому тенденція розвитку економічних явищ у часі явно не може бути визначена через випадкові відхилення рівнів у той чи в інший бік. Щоб якнайчіткіше визначити основну тенденцію ряду (тренд) для подальшого прогнозування процесу, використовуючи ту чи іншу трендову модель, розроблені методи згладжування (вирівнювання) часових рядів, які називають *механічним методом визначення тренду*.

Отже, статистичні методи згладжування часових рядів поділяють на дві групи: методи механічного методу згладжування ряду та аналітичне вирівнювання, базоване на кривих зростання.

Суть методів механічного згладжування полягає в такому. Береться кілька перших рівнів часового ряду (три, чотири, п'ять чи сім), кількість яких утворює *інтервал згладжування*. Для них добирається поліном, степінь якого має бути меншим за кількість рівнів, що входять в інтервал згладжування; за допомогою полінома розраховуються нові, вирівняні значення рівнів до середини інтервалу. Далі інтервал згладжування зрушується на один рівень праворуч (або вниз), обчислюється наступне згладжуване значення тощо. Найпростішим методом механічного згладжування є *метод простої ковзної середньої*. Спочатку для часового ряду $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ визначається інтервал згладжування $m (m < n)$. Якщо потрібно згладити дрібні безпорадні коливання, то інтервал згладжування беруть за можливістю більшим; інтервал згладжування зменшують, якщо потрібно зберегти дрібніші коливання. За інших однакових умов інтервал згладжування рекомендується брати непарним. Для перших m рівнів часового ряду обчислюється їхнє середнє арифметичне; це буде згладжуване значення рівня ряду, яке відповідає середині інтервалу згладжування. Далі інтервал згладжування зсувається на один рівень праворуч (або вниз), повторюється обчислення середньої арифметичної і т. д. Для обчислення згладжених рівнів ряду y_t застосовуємо формулу:

$$\tilde{y}_t = \frac{\sum_{i=t-p}^{t+p} y_i}{m}, t > p, \quad (5)$$

де i – порядковий номер рівня ряду;

$$p = \frac{m-1}{2} \text{ – (для непарних } m; \text{ для парних } m \text{ формула ускладнюється).}$$

Отже, послідовно проводячи такі обчислення, одержимо $n-m+1$ згладжених значень рівнів ряду; згідно з цим перші й останні p рівнів ряду не губляться – це є першим недоліком цього методу.

Другим недоліком є те, що він застосовується лише для рядів, що мають лінійну тенденцію.

Метод експоненціального згладжування. Його особливість полягає в тому, що у процедурі відшукування згладжуваного рівня застосовуються значення тільки попередніх рівнів ряду, які беруться з певною вагою. Вага рівня ряду зменшується залежно від того, на скільки віддалений рівень від моменту часу, для якого визначається згладжуване значення. Вага рівнів знижується експоненціально, що залежить від зазначеної величини параметра згладжування α , значення якого міститься в інтервалі $0 < \alpha < 1$.

Якщо для вихідного часового ряду $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ відповідні згладжені значення рівнів ряду позначити через $S_t, t=1, 2, \dots, n$, то експоненціальне згладжування розраховується за формулою:

$$S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) S_{t-1} \quad (6)$$

де α — параметр для згладжування; $1 - \alpha$ має назву коефіцієнта дисконтування.

Використовуючи наведені щойно рекурентні співвідношення для всіх рівнів ряду, починаючи з першого, можна одержати таке співвідношення:

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha) S_{t-1} = \alpha y_t + (1 - \alpha) [\alpha y_{t-1} + (1 - \alpha) S_{t-2}] = \alpha y_t + \alpha(1 - \alpha) y_{t-1} + (1 - \alpha)^2 [\alpha y_{t-2} + (1 - \alpha) S_{t-2}] = \\ &= \alpha y_t + \alpha(1 - \alpha) y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{t-2} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{t-1} y_{t-t} + (1 - \alpha)^t y, \end{aligned}$$

тобто згладжене значення S_t є зваженою середньою всіх попередніх рівнів.

У загальному вигляді маємо:

$$S_t = \alpha \sum_{\tau=0}^{t-1} (1 - \alpha)^\tau y_{t-\tau} + (1 - \alpha)^t S_0. \quad (7)$$

У практичних задачах обробки економічних часових рядів рекомендують вибирати параметри згладжування в інтервалі від 0,1 до 0,3. Більш обґрунтованих рекомендацій для α поки що немає.

[До змісту](#)