

Тема 6. Емпіричні методи кількісного аналізу на основі системи статистичних рівнянь
Лекція 7. Емпіричні методи кількісного аналізу на основі системи статистичних рівнянь

Зміст

1. Оператор оцінювання 1 МНК.
2. Коваріаційна матриця оцінок параметрів моделі.
3. Перевірка на значущість параметрів $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$, знайдених за МНК та побудова інтервалів довіри для параметрів a_0, a_1, a_2 узагальненої економетричної моделі.
4. Побудова прогнозу.
5. Оцінка прогнозних можливостей економетричної моделі.

1. Оператор оцінювання 1 МНК.

Нехай економетрична модель у матричній формі має вигляд

$$Y = XA + u, \quad (1)$$

де Y — вектор значень залежної змінної; X — матриця незалежних змінних розміром $n \times m$ (n — число спостережень, m — кількість незалежних змінних); A — вектор параметрів моделі*; u — вектор залишків.

При дотриманні передумов використання 1МНК застосуємо його оператор для оцінки параметрів моделі:

$$(X' X) \hat{A} = X' Y,$$

Де X' — це матриця, транспонована до матриці X .

Звідси

$$\hat{A} = (X' X)^{-1} X' Y \quad (2).$$

При цьому значення вектору $\hat{A}$ є розв'язком так званої системи нормальних рівнянь $(X'X) \hat{A} = X'Y$. Якщо незалежні змінні в матриці X взяті як відхилення кожного значення від свого середнього, то матрицю $X'X$ називають матрицею моментів.

У цьому випадку числа, що розміщені на її головній діагоналі, характеризують величину дисперсій незалежних змінних, інші елементи відповідають взаємним коваріаціям.

Отже, структура матриці моментів відображає зв'язки між незалежними змінними. Чим ближчі показники коваріацій до величини дисперсій, тим ближчий визначник матриці $X'X$ до нуля і тим гірші оцінки параметрів $\hat{A}$. Далі буде показано, що стандартні помилки параметрів $\hat{A}$ прямо пропорційні до значень, розміщених на головній діагоналі матриці $(X'X)^{-1}$.

Розглянемо приклад оцінювання параметрів моделі 1МНК.

Приклад 1. Оцінити параметри економетричної моделі, що характеризує залежність між тижневими витратами на харчування (y), загальними витратами (x_1) та розміром сім'ї (x_2). Вихідні дані в умовних одиницях наведені в таблиці 1.

Розв'язання

Запишемо економетричну модель:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + u,$$

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1x_1 + \hat{a}_2x_2,$$

де $y, \hat{y}$ – відповідно фактичні та розрахункові значення тижневих витрат на харчування за моделлю; x_1 – загальні витрати; x_2 – розмір сім'ї; u – залишки; $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$ – оцінка параметрів моделі.

Оператор оцінювання параметрів моделі за 1МНК має вигляд :

$$A = (X'X)^{-1}X'Y,$$

Таблиця 1.

Вхідні та розрахункові дані

N	Y	X ₁	X ₂	Y ²	X ₁ ²	X ₂ ²	YX ₁	YX ₂	X ₁ X ₂	$\hat{Y}$	u	u ²
1	22	45	1,5	484	2025	2,25	990	33	67,5	28,52293	-6,52293	42,548669
2	34	75	1,6	1156	5625	2,56	2550	54,4	120	35,22668	-1,22668	1,5047541
3	50	125	1,9	2500	15625	3,61	6250	95	237,5	47,32372	2,67628	7,1624771
4	67	223	1,8	4489	49729	3,24	14941	120,6	401,4	66,26546	0,734542	0,5395521
5	47	92	3,4	2209	8464	11,56	4324	159,8	312,8	51,10832	-4,10832	16,878326
6	66	146	3,6	4356	21316	12,96	9636	237,6	525,6	63,31369	2,686308	7,2162507
7	81	227	3,4	6561	51529	11,56	18387	275,4	771,8	78,1563	2,8437	8,0866291
8	106	358	3,5	11236	128164	12,25	37948	371	1253	105,0959	0,904056	0,8173181
9	70	135	5,5	4900	18225	30,25	9450	385	742,5	74,27847	-4,27847	18,305305
10	95	218	5,4	9025	47524	29,16	20710	513	1177,2	90,21488	4,785122	22,897397
11	119	331	5,4	14161	109561	29,16	39389	642,6	1787,4	112,855	6,144965	37,76059
12	147	490	5,3	21609	240100	28,09	72030	779,1	2597	144,0185	2,981548	8,8896294
13	93	175	8,5	8649	30625	72,25	16275	790,5	1487,5	103,0853	-10,0853	101,71426
14	133	305	8,3	17689	93025	68,89	40565	1103,9	2531,5	127,7454	5,254629	27,611131
15	169	468	8,1	28561	219024	65,61	79092	1368,9	3790,8	159,0171	9,98288	99,657898
16	197	749	7,3	38809	561001	53,29	147553	1438,1	5467,7	209,7723	-12,7723	163,1309
Σ	1496	4162	74,5	176394	1601562	436,69	520090	8367,9	23271,2	1496	0	564,72109

$$\text{Де } \hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 1;45;1,5 \\ 1;75;1,6 \\ 1;125;1,9 \\ 1;223;1,8 \\ 1;92;3,4 \\ 1;146;3,6 \\ 1;227;3,4 \\ 1;358;3,5 \\ 1;135;5,5 \\ 1;218;5,4 \\ 1;331;5,4 \\ 1;490;5,3 \\ 1;175;8,5 \\ 1;305;8,3 \\ 1;468;8,1 \\ 1;749;7,3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 22 \\ 34 \\ 50 \\ 67 \\ 47 \\ 66 \\ 81 \\ 106 \\ 70 \\ 95 \\ 119 \\ 147 \\ 93 \\ 133 \\ 169 \\ 197 \end{pmatrix}$$

X' – матриця, транспонована до матриці X .

Матриця X , крім двох векторів незалежних змінних, містить вектор одиниць. Він дописується в цій матриці ліворуч тоді, коли економетрична модель має вільний член. Не дописуючи такого вектора одиниць, вільний член можна обчислити, скориставшись рівністю:

$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{x}_1 - \hat{a}_2 \bar{x}_2$ (3), де $\bar{y}$ – середнє значення залежної змінної; $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ – середні значення незалежних змінних x_1 , і x_2 .

Згідно з оператором оцінювання знайдемо

$$1) (X'X) = \begin{vmatrix} 16 & 4162 & 74,5 \\ 4162 & 1601562 & 23271,2 \\ 74,5 & 23271,2 & 436,69 \end{vmatrix}$$

$$2) (X'X)^{-1} = \begin{vmatrix} 0,314 & -0,00017 & -0,0446 \\ -0,00017 & 0,00003 & -0,00012 \\ -0,0446 & -0,00012 & 0,0165 \end{vmatrix}$$

$$3) X'Y = \begin{vmatrix} 1495 \\ 520090 \\ 8367,9 \end{vmatrix} \quad (4) \quad 4) A' = \begin{vmatrix} 9,1106 \\ 0,2004 \\ 6,9306 \end{vmatrix} \quad (5).$$

Отже, економетрична модель має вигляд: $\hat{y} = 9,1106 + 0,2004x_1 + 6,9306x_2$ (6).

Знайдені методом 1МНК оцінки параметрів такі:

$\hat{a}_0 = 9,1106$; $\hat{a}_1 = 0,2004$; $\hat{a}_2 = 6,9306$, тобто

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 9,1106 \\ 0,2004 \\ 6,9306 \end{pmatrix}$$

Отже, коли за всіх однакових умов незалежна змінна x_1 (загальні витрати) збільшується (зменшується) на одиницю, то залежна змінна y (оцінка витрат на харчування) також збільшується (зменшується) на 0,2004 одиниць. Якщо за інших незмінних умов незалежна змінна x_2 (розмір сім'ї) збільшується (зменшується) на одиницю, то залежна змінна y (оцінка витрат на харчування) також збільшується (зменшується) на 6,9306 одиниць.

[До змісту](#)

2. Коваріаційна матриця оцінок параметрів моделі.

У класичній регресійній моделі $Y = XA + u$; вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ і залежний від нього вектор $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ є випадковими змінними. До оператора оцінювання $\hat{A}$ входить вектор Y ($\hat{A} = (X'X)^{-1} X'Y$), а, отже,

оператор $\hat{A}$ також можна вважати випадковою функцією оцінювання параметрів моделі.

Відомо, що для характеристики випадкових змінних $\hat{a}_j$, поряд з математичним сподіванням, застосовуються також дисперсія $\sigma^2_{\hat{a}_j}$ і коваріація $\sigma_{\hat{a}_j\hat{a}_k}$ ($j \neq k$). Істинні (справжні) значення цих параметрів класичної економетричної моделі утворюють *дисперсійно-коваріаційну матрицю*:

$$\text{var}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{a_1}^2 & \sigma_{a_1a_2} \dots & \sigma_{a_1a_j} \dots & \sigma_{a_1a_m} \\ \sigma_{a_2a_1} & \sigma_{a_2}^2 \dots & \sigma_{a_2a_j} \dots & \sigma_{a_2a_m} \\ \sigma_{a_ja_1} & \sigma_{a_ja_2} \dots & \sigma_{a_j}^2 \dots & \sigma_{a_ja_m} \\ \sigma_{a_ma_1} & \sigma_{a_ma_2} \dots & \sigma_{a_ma_j} \dots & \sigma_{a_m}^2 \end{pmatrix}$$

Оцінки коваріаційної матриці $\text{var}(\hat{A}) = \hat{\sigma}_u^2 (X'X)^{-1}$

використовуються для знаходження стандартних помилок та обчислення довірчих інтервалів оцінок параметрів $\hat{a}_j$. Вони використовуються й при перевірці їх статистичної значущості.

На головній діагоналі матриці $\text{var}(\hat{A})$ містяться оцінки дисперсій $\hat{\sigma}_{\hat{a}_j}^2$ j -ої оцінки параметрів, що ж до елементів $\hat{\sigma}_{\hat{a}_j\hat{a}_k}$ ($j \neq k$), які розміщені поза головною діагоналлю, то вони є оцінками коваріації між $\hat{a}_j$ і $\hat{a}_k$.

$$\text{Отже, } \hat{\sigma}_{\hat{A}_j}^2 \approx \hat{\sigma}_u^2 (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2 & \hat{\sigma}_{\hat{a}_1\hat{a}_2} \dots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_1\hat{a}_j} \dots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_1\hat{a}_m} \\ \hat{\sigma}_{\hat{a}_2\hat{a}_1} & \hat{\sigma}_{\hat{a}_2}^2 \dots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_2\hat{a}_j} \dots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_2\hat{a}_m} \\ \hat{\sigma}_{\hat{a}_j\hat{a}_1} & \hat{\sigma}_{\hat{a}_j\hat{a}_2} \dots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_j}^2 \dots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_j\hat{a}_m} \\ \hat{\sigma}_{\hat{a}_m\hat{a}_1} & \hat{\sigma}_{\hat{a}_m\hat{a}_2} \dots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_m\hat{a}_j} \dots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_m}^2 \end{pmatrix} \quad (7).$$

Де $\hat{\sigma}_u^2$ - оцінка дисперсії залишків;

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-m}.$$

Позначимо (j, k) -й елемент матриці $(X'X)^{-1}$ символом c_{jk} , тоді j -й елемент по головній діагоналі матриці $\text{var}(\hat{A})$ обчислюється за формулою:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_j}^2 = \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{jj} (j = \overline{1, m}) \quad (8)$$

Коваріації $\hat{\sigma}_{\hat{a}_j \hat{a}_k}^2$, що містяться за межами головної діагоналі, відповідно такі:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_j \hat{a}_k}^2 = \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{jk} \quad (9)$$

Приклад 2. Для економетричної моделі обчислимо коваріаційну матрицю $\text{var}(\hat{A})$. Отже, маємо:

$$4) \hat{A} = \begin{bmatrix} 9,1106 \\ 0,2004 \\ 6,9306 \end{bmatrix} \quad (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,314 & -0,0017 & -0,0446 \\ -0,00017 & 0,00003 & -0,00012 \\ -0,0446 & -0,00012 & 0,0165 \end{pmatrix}; \quad X'Y = \begin{pmatrix} 1496 \\ 520090 \\ 8367,9 \end{pmatrix};$$

$$n=16, m=3$$

Розв'язання

1. Обчислимо незміщену оцінку дисперсії залишків $\hat{\sigma}_u^2$:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-m} = \frac{564,72}{16-3} = 43,44 \quad .$$

2. Визначимо дисперсії оцінок $\hat{\sigma}_{\hat{a}_j}^2$:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{a}_1) &= \hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2 = \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{11} = 43,44 \cdot 0,314 = 13,640; \\ \text{var}(\hat{a}_2) &= \hat{\sigma}_{\hat{a}_2}^2 = \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{22} = 43,44 \cdot 0,00003 = 0,0013; \\ \text{var}(\hat{a}_3) &= \hat{\sigma}_{\hat{a}_3}^2 = \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{33} = 43,44 \cdot 0,0165 = 0,7168. \end{aligned}$$

3. Обчислимо коваріації відповідних оцінок параметрів:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{a_1 a_2} &= \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{12} = 43,44 \cdot (-0,00017) = -0,0074; \\ \hat{\sigma}_{a_1 a_3} &= \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{13} = 43,44 \cdot (-0,0446) = -1,9374; \\ \hat{\sigma}_{a_2 a_3} &= \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{23} = 43,44 \cdot (-0,00012) = -0,0052. \end{aligned}$$

Знак «мінус» перед оцінками коваріацій $\hat{\sigma}_{\hat{a}_j \hat{a}_k}$ указує на те, що збільшення однієї оцінки параметрів приводить до зменшення в середньому іншої і навпаки.

Отже, дістанемо дисперсійно-коваріаційну матрицю

$$\text{var}(\hat{A}) = \begin{pmatrix} 13,640 & -0,0074 & -1,9374 \\ -0,0074 & 0,0013 & -0,0052 \\ -1,9374 & -0,0052 & 0,7168 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

4. Запишемо стандартні помилки оцінок параметрів моделі:

$$S_{\hat{a}_j} = \sqrt{\text{var}(\hat{a}_j)};$$

$$S_{\hat{a}_1} = \sqrt{13,640} = 3,693;$$

$$S_{\hat{a}_2} = \sqrt{0,0013} = 0,0361;$$

$$S_{\hat{a}_3} = \sqrt{0,7168} = 0,8470.$$

Порівняємо кожен стандартну помилку $S_{\hat{a}_j}$ з відповідним числовим значенням

оцінки параметра, тобто знайдемо відношення $\frac{S_{\hat{a}_j}}{|\hat{a}_j|}$ (11) :

$$\frac{S_{\hat{a}_1}}{|\hat{a}_1|} \cdot 100 = \frac{3,693}{9,1106} \cdot 100 = 40,53\%$$

$$\frac{S_{\hat{a}_2}}{|\hat{a}_2|} \cdot 100 = \frac{0,0361}{0,2004} \cdot 100 = 18,01\%$$

$$\frac{S_{\hat{a}_3}}{|\hat{a}_3|} \cdot 100 = \frac{0,847}{6,9306} \cdot 100 = 12,22\%.$$

Отже, стандартні помилки оцінок параметрів щодо рівня оцінок параметрів становлять відповідно 41 %, 18 % і 12 %, а це свідчить про зміщеність оцінок.

[До змісту](#)

3. Перевірка на значущість параметрів $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$, знайдених за МНК та побудова інтервалів довіри для параметрів a_0, a_1, a_2 узагальненої економетричної моделі.

Перевіримо значущість оцінок параметрів $\hat{A}$ і знайдемо для них довірчі інтервали, припустивши для цього, що залишки u нормально розподілені, тобто $u \in N(0, \sigma^2 E)$.

Перевірку гіпотези виконаємо згідно з t -критерієм:

$$t_j = \frac{|\hat{a}_j|}{\sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}} = \frac{|\hat{a}_j|}{S\hat{a}_j}, \quad (12)$$

де c_{jj} – діагональний елемент матриці $(X'X)^{-1}$. Знаменник відношення (12) $S\hat{a}_j = \sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}$ – називається **стандартною похибкою** оцінки параметра моделі.

Обчислене значення t -критерію порівнюється з табличним при вибраному рівні значущості і $n - m$ ступенях свободи. Якщо $t_{\text{факт}} > t_{\text{табл}}$, то відповідно оцінка параметра економетричної моделі є достовірною.

На основі t -критерію і стандартної помилки побудуємо довірчі інтервали для параметрів a_j :

$$a_j = \hat{a}_j \pm t_{(\alpha)} \cdot \sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}. \quad (13)$$

Перевіримо гіпотези про значущість оцінок параметрів моделі

$$\hat{y} = 9,1106 + 0,2004x_1 + 6,9306x_2,$$

побудованої на основі вихідних даних, наведених у табл. 1.

$$t_1 = \frac{\hat{a}_1}{\sqrt{\sigma_u^2 \cdot c_{11}}} = \frac{9,1106}{3,693} = 2,467;$$

$$t_2 = \frac{\hat{a}_2}{\sqrt{\sigma_u^2 \cdot c_{22}}} = \frac{0,2004}{0,0361} = 5,551;$$

$$t_3 = \frac{\hat{a}_3}{\sqrt{\sigma_u^2 \cdot c_{33}}} = \frac{6,9306}{0,8470} = 8,1825.$$

Якщо ступінь свободи $n - m = 16 - 3 = 13$ і рівень значущості $\alpha = 0,05$, $t_{\text{табл}} = 2,16$. Оскільки $t_{1\text{факт}} > t_{\text{табл}}$, $t_{2\text{факт}} > t_{\text{табл}}$, $t_{3\text{факт}} > t_{\text{табл}}$ то оцінки параметрів $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$ характеризують істотний зв'язок цих незалежних змінних (x_1, x_2, x_3) із залежною.

Оцінка параметра $\hat{a}_1$ може перебувати в таких межах:

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 - t_{(0,05)} \cdot \sqrt{\sigma_u^2 c_{11}} &\leq a_1 \leq \hat{a}_1 + t_{(0,05)} \sqrt{\sigma_u^2 c_{11}} ; \\ 9,1106 - 2,16 \cdot 3,693 &\leq a_1 \leq 9,1106 + 2,16 \cdot 3,693 ; \\ 1,1337 &\leq a_1 \leq 17,0875 ; \\ \hat{a}_2 - t_{(0,05)} \cdot \sqrt{\sigma_u^2 c_{22}} &\leq a_2 \leq \hat{a}_2 + t_{(0,05)} \sqrt{\sigma_u^2 c_{22}} ; \\ 0,2004 - 2,16 \cdot 0,0361 &\leq a_2 \leq 0,2004 + 2,16 \cdot 0,0361 ; \\ 0,1224 &\leq a_2 \leq 0,2784 ; \\ \hat{a}_3 - t_{(0,05)} \cdot \sqrt{\sigma_u^2 c_{33}} &\leq a_3 \leq \hat{a}_3 + t_{(0,05)} \sqrt{\sigma_u^2 c_{33}} ; \\ 6,9306 - 2,16 \cdot 0,847 &\leq a_3 \leq 6,9306 + 2,16 \cdot 0,847 ; \\ 5,1011 &\leq a_3 \leq 8,7601 . \end{aligned}$$

[До змісту](#)

4. Побудова прогнозу.

Використаємо модель (1) для знаходження прогнозних значень вектора Y_0 , який відповідатиме очікуваним значенням матриці незалежних змінних X_0 . Наш прогноз може бути точковим або інтервальним. Інтервальний прогноз побудуємо на основі точкового, скориставшись побудованою економетричною моделлю.

Щоб отримати інтервальний прогноз, необхідно розрахувати середню похибку прогнозу.

Вона зростає з віддаленням значення x_0 від відповідного середнього значення вибірки.

Розрахуємо спочатку дисперсію прогнозу.

У матричному вигляді дисперсія прогнозу

$$\sigma_n^2 = \sigma_u^2 X_0' (X'X)^{-1} X_0 \quad (14) ;$$

$$s_{\hat{y}_{np}} = \hat{\sigma}_u \sqrt{X_0' (X'X)^{-1} X_0} .$$

Довірчий інтервал для прогнозних значень

$$\hat{Y}_0 - t_\alpha \hat{\sigma}_u \sqrt{X'_0 (X'X)^{-1} X_0} \leq M(Y_0(X_0)) \leq \hat{Y}_0 + t_\alpha \hat{\sigma}_u \sqrt{X'_0 (X'X)^{-1} X_0}, \quad (15)$$

де t_α – критичне значення t-критерію при $n - m$ ступенях вільності і рівні значущості α .

Зауважимо, що $\hat{Y}_0 = X'_0 \hat{A}$ можна розглядати як точкову оцінку математичного сподівання прогнозного значення Y_0 , а також як індивідуальне значення Y_0 для вектора незалежних змінних X_0 , що лежить за межами базового періоду.

Для визначення інтервального прогнозу індивідуального значення $\hat{Y}_0$ необхідно знайти відповідну стандартну похибку $\hat{\sigma}_{u(i)}$:

$$\hat{\sigma}_{n(i)}^2 = \hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_n^2 = \hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_n^2 X'_0 (X'X)^{-1} X_0 = \hat{\sigma}_u^2 (1 + X'_0 (X'X)^{-1} X_0).$$

Отже, інтервальний прогноз індивідуального значення визначається як

$$\hat{Y}_0 - t_\alpha \hat{\sigma}_u \sqrt{1 + X'_0 (X'X)^{-1} X_0} \leq Y_0 \leq \hat{Y}_0 + t_\alpha \hat{\sigma}_u \sqrt{1 + X'_0 (X'X)^{-1} X_0} \quad (16).$$

Приклад 3. Необхідно розрахувати для економетричної моделі точковий та інтервальний прогнози індивідуального значення залежної змінної, коли для прогнозного періоду відомий вектор

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

1. Визначаємо точкові прогнозні значення залежної змінної,

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix} : \text{то}$$

$$\hat{y}_0 = 9,1106 + 0,2004x_1 + 6,9306x_2 = 9,1106 + 0,2004 \cdot 500 + 6,9306 \cdot 6 = 150,8942$$

2. (Слайд 32). Визначаємо дисперсію прогнозу за формулою :

$$\sigma_n^2 = \hat{\sigma}_u^2 X_0' (X'X)^{-1} X_0 = X_0' \text{var}(\hat{A}) X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 500 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13,640 & -0,0074 & -1,9374 \\ -0,0074 & 0,0013 & -0,0052 \\ -1,9374 & -0,0052 & 0,7168 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1,6844 & 0,6102 & -0,3366 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix} = 301,396.$$

3. Стандартна помилка прогнозу : $\sigma_n = \sqrt{\sigma_n^2} = \sqrt{301,396} = 17,361$

Табличне значення критерію Стюдента при рівні значущості $\alpha = 0,05$ і ступенів вільності $n - m = 13$ дорівнює $t_{0,05} = 2,160$.

4. Обчислюємо дисперсію і стандартну помилку прогнозу індивідуального значення y_0 :

$$\sigma_{n(i)}^2 = \sigma_n^2 + \sigma_u^2 = 301,396 + 43,44 = 344,836.$$

5. Стандартна помилка прогнозу індивідуального значення y_0 така:

$$\sigma_{n(i)} = \sqrt{\sigma_{n(i)}^2} = \sqrt{344,836} = 18,5698.$$

6. Визначаємо інтервальний прогноз індивідуального значення y_0 :

$$\hat{y}_0 - t_u \sigma_{n(i)} \leq Y_0 \leq \hat{y}_0 + t_u \sigma_{n(i)} \quad (17).$$

$$150,894 - 2,160 \times 18,5698 \leq y_0 \leq 150,894 + 2,160 \times 18,5698$$

$$150,894 - 40,111 \leq y_0 \leq 150,894 + 40,111$$

$$110,783 \leq y_0 \leq 191,005.$$

Отже, з імовірністю $p = 0,95$ ($\alpha = 0,05$) прогноз індивідуального значення y_0 потрапляє в інтервал $[110,783; 191,005]$.

Можна також зазначити, що з імовірністю $p = 0,95$ знайдені прогнози покривають $M(y_0)$ і y_0 , коли взяти досить велику кількість вибірок і для кожної з них обчислювати інтервальні прогнози.

Економічна інтерпретація: якщо в прогнозному періоді загальні витрати мають рівень 500 одиниць, а сім'я складається з шести осіб, то витрати на харчування потрапляють в інтервал :

$$110,783 \leq y_0 \leq 191,005.$$

[До змісту](#)

5. Оцінка прогнозних можливостей економетричної моделі.

Прогнозування залежної змінної на основі економетричної моделі потребує оцінювання прогнозних можливостей моделі. Для такого оцінювання використовують систему характеристик, яку можна поділити на групи:

- абсолютні;
- порівнянні;
- якісні.

Усі ці групи належать до *похибок прогнозу залежної змінної*.

Абсолютні похибки прогнозу

1.М.Е.-абсолютний показник зміщення прогнозу:

$$M.E. = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i),$$

де n - кількість спостережень, y_i , $\hat{y}_i$ фактичні і розрахункові значення залежної змінної.

2.М.А.Е.- середня абсолютна похибка прогнозу:

$$M.A.E. = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n | y_i - \hat{y}_i |,$$

3. M.S.E.-середньоквадратична похибка прогнозу:

$$M.S.E. = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \right]^{0.5},$$

Наведені показники якості прогнозу залежать від кількісного рівня залежної змінної і тому не можуть бути повними характеристиками якості прогнозу. Показник заміщення прогнозу істотно залежить від розміру сукупності спостережень. Чим більша сукупність спостережень, тим більше наближення М.Е до нуля і відсутність заміщення прогнозу.

Порівнянні показники оцінювання якості прогнозу:

1.М.Р.Е.- відносний показник зміщення прогнозу:

$$M.P.E. = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right) \times 100.$$

2.М.А.Р.Е.- середня відносна похибка прогнозу:

$$M.A.P.E. = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \times 100.$$

3.К_t-коефіцієнт відповідності Тейла:

$$K_t = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{n} + \sum_{i=1}^n \frac{\hat{y}_i^2}{n}}}.$$

Чим ближчі М.Р.Е та коефіцієнт відповідності Тейла до нуля, тим кращі прогнозні якості моделі. Рівень відносного показника та його тлумачення наведено в таблиці 2.

До якісних оцінок точності прогнозу відносяться такі, що дають можливість провести аналіз похибок прогнозу, розкласти їх на окремі складові. Такий аналіз важливий, коли необхідно прогнозувати не лише загальний напрям розвитку, а й поворотні точки циклу. Тоді

середньоквадратична похибка прогнозу дає можливість дослідити: частку зміщеності (B.P.); частку дисперсії (V.P.); частку коваріації (C.P.).

Таблиця 2.

Тлумачення рівня відносного показника якості прогнозу

Рівень M.A.P.E	Висновки щодо прогнозу
Менше 10 %	Висока якість
10-20 %	Досить добра якість
21-50 %	Задовільна якість
Понад 50 %	Незадовільна якість

У сумі ці частки мають дорівнювати 1. Подамо їх формули:

$$V.P. = \frac{(\sigma_{np} - S_y)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2} \qquad B.P. = \frac{(y_{np} - y)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}$$

$$C.P. = \frac{2(1 - R) \sigma_{np} \times S_y}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}$$

де σ_{np} -стандартна похибка прогнозу; S_y - стандартна похибка фактичних значень залежної змінної; R -коефіцієнт кореляції; y_{np} - прогнозне значення залежної змінної.

Частка зміщеності показує наявність похибки в оцінці основної тенденції, тобто $B.P. > 0$ коли середнє арифметичне значення прогнозів відрізняється від середнього арифметичного фактичних даних.

Частка дисперсії характеризує ступінь збігу стандартних відхилень прогнозу і фактичних значень і $V.P. = 0$ коли дисперсії однакові. Тобто цей

показник характеризує відповідність ступеня нестійкості прогнозних значень фактичним даним.

Частка коваріації свідчить про ступінь взаємозв'язку між прогнозними і фактичними значеннями. Аналіз цього показника дає можливість відокремити випадки, коли прогноз задовільний за першими двома показниками, але за наявності коваріації характеризується взаємною компенсацією похибок для різних спостережень.

[До змісту](#)