

Тема 7. Побудова економетричної моделі з автокорельованими залишками.

Лекція 8. Побудова економетричної моделі з автокорельованими залишками.

Зміст.

- [1. Поняття, природа виникнення та наслідки автокореляції в економетричних моделях.](#)
- [2. Перевірка наявності автокореляції. Критерій Дарбіна-Уотсона.](#)
- [3. Оцінка параметрів моделі з автокорельованими залишками.](#)
- [4. Використання економетричної моделі для обчислення прогнозу залежної змінної при автокореляції залишків.](#)

1. Поняття, природа виникнення та наслідки автокореляції в економетричних моделях.

В економетричних дослідженнях часто постають такі випадки, коли дисперсія залишків є сталою, але спостерігається їх коваріація. Це явище називають *автокореляцією залишків*.

Означення: *Автокореляція – це взаємозв'язок послідовних елементів часового чи просторового ряду даних.*

Автокореляція залишків виникає часто тоді, коли економетрична модель будується на основі часових рядів. Якщо існує кореляція між послідовними значеннями деякої незалежної змінної, то спостерігатиметься й кореляція послідовних значень залишків. Отже, у такому разі також порушується гіпотеза, згідно з якою $M(uu') = \sigma_u^2 E$. Але при гетероскедастичності змінюється дисперсія залишків за відсутності їх коваріації, а при автокореляції — існує коваріація залишків за незмінної дисперсії.

При автокореляції залишків, як і при гетероскедастичності, дисперсія залишків буде така:

$$M(uu') = \sigma_u^2 S.$$

Проте матриця S має тут зовсім інший вигляд. Запишемо цю матрицю:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & \rho & \rho & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

У цій матриці параметр ρ характеризує коваріацію кожного наступного значення залишків із попереднім. Наприклад, якщо для залишків записати авторегресійну модель першого порядку:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t,$$

то ρ характеризує силу зв'язку залишків у період t від їх рівня в період $(t - 1)$.

Якщо знехтувати наявністю автокореляції та для оцінювання параметрів моделі застосувати метод 1 МНК, то можливі такі **наслідки**:

1. оцінки параметрів моделі можуть бути незміщеними, але неефективними, тобто вибіркові дисперсії вектора оцінок $\hat{A}$ можуть бути невиправдано великими;
2. статистичні критерії t і F -статистики, які отримані для класичної лінійної моделі, практично не можуть бути використані для дисперсійного аналізу, оскільки їх обчислення не враховує наявності коваріації залишків;
3. неефективність оцінок параметрів економетричної моделі, як правило, призводить до неефективних прогнозів, тобто прогнозні значення матимуть велику вибіркову дисперсію.

[До змісту](#)

2. Перевірка наявності автокореляції. Критерій Дарбіна-Уотсона.

Для перевірки наявності автокореляції залишків можна застосувати чотири методи.

1. Критерій Дарбіна-Уотсона.
2. Критерій фон Неймана.
3. Нециклічний коефіцієнт автокореляції.
4. Циклічний коефіцієнт автокореляції.

Критерій Дарбіна-Уотсона для перевірки наявності автокореляції застосовується найчастіше:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2}.$$

Критерій Дарбіна-Уотсона може набувати значень на множині $DW \in [0,4]$. Якщо залишки u_t є випадковими величинами, тобто не автокорельовані, то значення DW міститься поблизу 2. У разі додатної автокореляції $DW < 2$, у разі від'ємної – $DW > 2$.

Значення критерію DW табульовані на інтервалі $DW_1 - DW_2$, де DW_1 — нижня межа; DW_2 — верхня межа. Фактичні значення критерію порівнюються з табличними (критичними) для числа спостережень n і числа незалежних змінних m при вибраному рівні довіри α . Якщо $DW_{\text{факт}} < DW_1$, залишки мають автокореляцію. Якщо $DW_{\text{факт}} > DW_2$, приймається гіпотеза про відсутність автокореляції. Якщо $DW_1 < DW < DW_2$, конкретних висновків зробити не можна, існує невизначеність. При від'ємній автокореляції залишків, розраховане значення критерію DW віднімається від верхньої межі його, тобто від 4, а потім порівнюється з критичними значеннями, як зазначалося раніше.



Рис. 1. Зони автокореляційного зв'язку за критерієм Дарбіна-Уотсона

[До змісту](#)

3. Оцінка параметрів моделі з автокорельованими залишками.

Оцінювати параметри моделі з автокорельованими залишками можна на базі чотирьох методів:

- 1) Ейткена;
- 2) перетворення вихідної інформації;
- 3) Кочрена-Оркатта;
- 4) Дарбіна.

У темі Узагальнений метод найменших квадратів було розглянуто метод Ейткена і доведено, що система рівнянь для оцінки параметрів моделі на основі методу Ейткена запишеться так:

$$(X'V^{-1}X)\hat{A} = X'V^{-1}Y,$$

або

$$(X'S^{-1}X)\hat{A} = X'S^{-1}Y,$$

де $\hat{A}$ — вектор оцінок параметрів економетричної моделі;

X — матриця незалежних змінних;

X' — матриця, транспонована до матриці X ;

S^{-1} — матриця, обернена до матриці кореляції залишків;

V^{-1} — матриця, обернена до матриці V , де $V = \sigma_u^2 S$, а σ_u^2 — залишкова дисперсія;

Y — вектор залежних змінних.

Звідси

$$\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y,$$

або

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y.$$

Отже, щоб оцінити параметри моделі на основі методу Ейткена, треба сформувати матрицю S або V .

Матриця S має вигляд

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \rho^{n-5} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

У цій симетричній матриці ρ^s виражає коефіцієнт автокореляції s -го порядку

для залишків u_t . Очевидно, що коефіцієнт автокореляції нульового порядку дорівнює 1.

Оскільки коваріація залишків ρ^s при $s > 2$ часто наближається до нуля, то матриця, обернена до матриці S , матиме такий вигляд:

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Таку матрицю іноді пропонується використовувати при оцінюванні параметрів моделі з автокорельованими залишками за методом Ейткена.

На практиці для обчислення ρ застосовують співвідношення:

$$\rho \approx r = \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2},$$

або

$$\rho \approx r' = \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2} \frac{n}{n-1}.$$

де u_t — величина залишків у період t ; u_{t-1} — величина залишків у період $t-1$; n — число спостережень.

Якщо $n \rightarrow \infty$, то $r = r'$.

При реалізації алгоритму Ейткена для оцінки параметрів моделі застосовують такі п'ять кроків.

Крок 1. Оцінка параметрів моделі за методом 1МНК.

Крок 2. Дослідження залишків на наявність автокореляції.

Крок 3. Формування матриці коваріації залишків V або S .

Крок 4. Обернення матриці V або S .

Крок 5. Оцінка параметрів методом Ейткена.

Приклад

З допомогою двох взаємопов'язаних часових рядів про роздрібний товарообіг та доходи населення (табл.1) побудувати економетричну модель, що характеризує

залежність роздрібного товарообігу від доходу.

Таблиця 1

Вхідні та розрахункові дані

Роки	Роздрібний товарообіг, млн.грн y	Дохід, млн.грн x	$Y_{t(розр)}$	u_t	u_t^2	$u_t - u_{t-1}$	$(u_t - u_{t-1})^2$	$u_t u_{t-1}$
2006	24,00	27,10	23,61	0,39	0,15	-	-	-
2007	25,00	28,20	24,56	0,44	0,19	0,05	0,00	0,17
2008	25,70	29,30	25,52	0,18	0,03	-0,25	0,06	0,08
2009	27,00	31,30	27,25	-0,25	0,06	-0,43	0,18	-0,05
2010	28,80	34,00	29,58	-0,78	0,61	-0,54	0,29	0,19
2011	30,80	36,00	31,31	-0,51	0,26	0,27	0,07	0,40
2012	33,80	38,70	33,65	0,15	0,02	0,66	0,44	-0,08
2013	38,10	43,70	37,97	0,13	0,02	-0,02	0,00	0,02
2014	43,40	50,00	43,42	-0,02	0,00	-0,15	0,02	0,00
2015	45,50	52,10	45,24	0,26	0,07	0,28	0,08	-0,01
Разом	322,10	370,40	322,10	0,00	1,42	-0,12	1,16	0,73

Розв'язання:

1. Ідентифікуємо змінні моделі:

y_t — роздрібний товарообіг у період t , залежна змінна;

x_t — дохід у період t , пояснювальна змінна;

звідси

$$Y_t = f(x_t, u_t),$$

де u_t — стохастична складова, залишки.

2. Специфікуємо економетричну модель у лінійній формі:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t;$$

$$\hat{y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_t;$$

$$u_t = y_t - \hat{y}_t,$$

де u — скаляр; y — вектор; x — матр.

3. Визначимо оцінки параметрів моделі $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ за методом найменших квадратів, припускаючи що залишки u_t не корельовані використавши оператор оцінювання параметрів моделі МНК:

$$\hat{A} = (X'X)^{-1}X'Y,$$

де X' — матриця, транспонована до X .

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 27,1 \\ 1 & 28,2 \\ 1 & 29,3 \\ 1 & 31,3 \\ 1 & 34,0 \\ 1 & 36,0 \\ 1 & 38,7 \\ 1 & 43,7 \\ 1 & 50,0 \\ 1 & 52,1 \end{pmatrix};$$

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 10 & 370,4 \\ 370,4 & 14441,62 \end{pmatrix}; (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,0002 & -0,513 \\ -0,513 & 0,0014 \end{pmatrix};$$

$$(X'Y) = \begin{pmatrix} 322,1 \\ 12555,09 \end{pmatrix};$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2,0002 & -0,513 \\ -0,513 & 0,0014 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 322,1 \\ 12555,09 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,172 \\ 0,865 \end{pmatrix};$$

$$\hat{a}_0 = 0,172;$$

$$\hat{a}_1 = 0,865.$$

Економетрична модель має вигляд

$$\hat{Y}_t = 0,172 + 0,865X_t. \quad (1)$$

4. Знайдемо розрахункові значення роздрібного товарообігу на основі моделі $\hat{Y}_t = 0,172 + 0,865X_t$ і визначимо залишки u_t (табл. 1).

Знайдемо оцінку критерію Дарбіна — Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2} = \frac{1,155}{1,4152} = 0,816.$$

Порівняємо значення критерію DW з табличним для $\alpha = 0,05$ і $n = 10$. Критичні значення критерію DW у цьому разі такі:

$$DW_1 = 0,879 \text{ — нижня межа; } DW_2 = 1,320 \text{ — верхня межа.}$$

Оскільки критерій $DW_{\text{факт}} < DW_1$, то можна стверджувати, що залишки u_t мають додатну автокореляцію.

5. Наявність чи відсутність автокореляції залишків можна також визначити згідно з критерієм фон Неймана.

Критерій фон Неймана $Q = \frac{10}{10-1} DW = 0,906$. Це значення порівнюється з табличним; $Q_{\text{табл}} = 1,18$ при $n = 10$ і рівні значущості $\alpha = 0,05$. Оскільки $Q_{\text{факт}} < Q_{\text{табл}}$, то існує додатна автокореляція залишків.

6. Використаємо метод Ейткена для оцінювання параметрів економетричної моделі з автокорельованими залишками. Оператор оцінювання запишеться так:

$$\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y,$$

або

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y.$$

де s^{-1} — матриця, обернена до матриці S ; v^{-1} — матриця, обернена до матриці V .

Матриця S — матриця коваріацій залишків, яка має вигляд

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7 & \rho^8 & \rho^9 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7 & \rho^8 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7 \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 \\ \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 \\ \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 \\ \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^8 & \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^9 & \rho^8 & \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \sigma_u^2 S.$$

7. Щоб сформуванати матрицю S або V , необхідно визначити величину ρ , яка характеризує взаємозв'язок між послідовними членами ряду залишків. Нехай залишки описуються автокореляційною моделлю першого степеня $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$,

$$\rho \approx r = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2} + \frac{m+1}{n} = \frac{10}{9} \frac{0,7276}{1,4156} + \frac{2}{10} = 0,77.$$

Отже, матриця S матиме вигляд

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 & 0,273 & 0,211 & 0,162 & 0,125 & 0,097 \\ 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 & 0,273 & 0,211 & 0,162 & 0,125 \\ 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 & 0,273 & 0,211 & 0,162 \\ 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 & 0,273 & 0,211 \\ 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 & 0,273 \\ 0,273 & 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 \\ 0,211 & 0,273 & 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 \\ 0,162 & 0,211 & 0,273 & 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 \\ 0,125 & 0,162 & 0,211 & 0,273 & 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 \\ 0,097 & 0,125 & 0,162 & 0,211 & 0,273 & 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 \end{pmatrix}$$

Тоді матриця S^{-1} буде:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2,4689 & -1,9043 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -1,9043 & 3,9377 & -1,9043 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -1,9043 & 3,9377 & -1,9043 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -1,9043 & 3,9377 & -1,9043 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -1,9043 & 3,9377 & -1,9043 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -1,9043 & 3,9377 & -1,9043 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -1,9043 & 3,9377 & -1,9043 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -1,9043 & 3,9377 & -1,9043 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -1,9043 & 3,9377 & -1,9043 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -1,9043 & 2,4689 \end{pmatrix}$$

$$1) (XS^{-1}) = \begin{pmatrix} 0,565 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,565 \\ 13,204 & 3,640 & 2,069 & 2,708 & -5,722 & 3,314 & 0,616 & 3,165 & 14,453 & 33,412 \end{pmatrix};$$

$$2) (XS^{-1}X) = \begin{pmatrix} 2,161835 & 82,30391 \\ 82,30391 & 3545,30696 \end{pmatrix};$$

$$\det(X'S^{-1}X) = 890,436966$$

$$3) (XS^{-1}X)^{-1} = \begin{pmatrix} 3,9815 & -0,0924 \\ -0,0924 & 0,0024 \end{pmatrix};$$

$$4) (XS^{-1}Y) = \begin{pmatrix} 71,8148 \\ 3089,991 \end{pmatrix};$$

$$5) \hat{A} = \begin{pmatrix} 3,9815 & -0,0924 \\ -0,0924 & 0,0024 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 71,8148 \\ 3089,991 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,442 \\ 0,861 \end{pmatrix};$$

$$\hat{a}_0 = 0,442; \hat{a}_1 = 0,861.$$

Отже, економетрична модель має вигляд:

$$\hat{Y}_t = 0,442 + 0,861X_t. \quad (2).$$

8. Знайдемо розрахункові значення $\hat{Y}_t$ на основі побудованої економетричної моделі та визначимо залишки (табл.2).

Таблиця 2.

Вхідні та розрахункові дані

Рік	Y_t	$\hat{Y}_t^*$	v_t	v_t^2	$v_t - v_{t-1}$	$(v_t - v_{t-1})^2$	$v_t v_{t-1}$
1996	24,0	23,784	0,216	0,0468	—	—	—
1997	25,0	24,731	0,269	0,0724	0,0526	0,0028	0,0528
1998	25,7	25,678	0,022	0,0005	-0,2774	0,0612	0,0058
1999	27,0	27,401	-0,401	0,1608	-0,4226	0,1786	-0,0086
2000	28,8	29,727	-0,927	0,8586	-0,5255	0,2762	0,3716
2001	30,8	31,449	-0,649	0,4215	0,2774	0,0769	0,6016
2002	33,8	33,775	0,025	0,0006	0,6745	0,4549	-0,0164
2003	38,1	38,081	0,019	0,0004	-0,0066	0,00004	0,0005
2004	43,4	43,508	-0,108	0,0116	-0,1262	0,0159	0,0020
2005	45,5	45,316	0,184	0,0937	0,2912	0,0848	0,9908
Σ				1,6069		1,1514	0,9908

9. Обчислимо критерій Дарбіна — Уотсона і фон Неймана:

$$DW = \frac{1,1514}{1,6069} = 0,716.$$

Порівнявши його з критичним значенням при $n = 10$ і $\alpha = 0,05$, коли $DW_{\text{факт}} < DW_1$, доходимо висновку, що ми не звільнились від автокореляції залишків. Це означає, що вихідна гіпотеза, коли залишки описуються авторегресійною схемою першого порядку, не виконується. Якщо залишки описуються авторегресійною схемою вищого порядку, то доцільно виконати оцінку параметрів моделі методом Кочрена — Оркатта або Дарбіна.

Порівнявши обидві економетричні моделі (1) і (2), побачимо, що при

оцінюванні параметрів методом Ейткена доцільніше користуватись матрицею, коли коваріація залишків для $s > 2$ відсутня. У такому разі побудова моделі спрощується, а точність оцінок не зменшується.

[До змісту](#)

.4. Використання економетричної моделі для обчислення прогнозу залежної змінної при автокореляції залишків.

Визначимо прогнозний рівень товарообігу, коли дохід становитиме $x_{n+1} = 55$ млн.грн

1. Запишемо співвідношення, яке визначатиме прогнозний рівень залежної змінної

$$\hat{y}_{n+1} = x_{n+1}\hat{A} + \rho\hat{u}_n,$$

де X_{n+1} — вектор очікуваних значень досліджуваних чинників (пояснюючих змінних); ρ — коефіцієнт коваріації залишків; u_n — залишки залежної змінної для останнього спостереження матриці вихідних даних

2. Скористаємося економетричною моделлю роздрібного товарообігу для обчислення прогнозу:

$$\hat{y}_{n+1} = 0,442 + 0,861x_{n+1} = 0,442 + 0,861 \times 55 = 0,442 + 47,35 = 47,8 \text{ млн. грн.};$$

3. Знайдемо оцінку залишків прогнозу ρe_n , де ρ — коефіцієнт коваріації залишків; e_n — залишки за моделлю для $t = 10$.

$$\rho = 0,77; \hat{u}_n = 0,18;$$

$$\rho\hat{u}_n = 0,77 \cdot 0,18 \approx 0,14.$$

4. Визначимо прогнозний рівень роздрібного товарообігу на одинадцятий рік ($n + 1$):

$$\hat{y}_{n+1} = 47,8 + 0,14 = 47,94 \text{ млн. грн.}$$

[До змісту](#)