

Тема 8. Метод інструментальних змінних. Лекція 9. Метод інструментальних змінних.

Зміст.

1. Поняття інструментальних змінних.
2. Способи визначення інструментальних змінних.

1.Поняття інструментальних змінних.

Автокореляція елементів часового ряду може бути описана на основі авторегресійної функції певного порядку. Але коли йдеться про моделювання взаємозв'язків на основі багатомірних часових рядів, де необхідно кількісно описати залежність однієї змінної від інших і врахувати автокореляцію залежної змінної, то економетрична модель буде мати лагову змінну Y , що входить до пояснюючих змінних, тобто:

$$Y_t = f(Y_{t-1} , X_t , u_t) .$$

Наведемо економічні приклади :

Приклад 1. Нехай потрібно побудувати економетричну модель, яка характеризує залежність обсягу інвестицій від технічного рівня об'єкта інвестування та ефективності економічної діяльності. В цьому випадку вихідна інформація повинна мати три часових ряди, один з яких буде характеризувати обсяг зміни капітальних вкладень у часі, другий — технічний рівень об'єкта інвестування, а третій — ефективність економічної діяльності. При цьому кожне наступне значення часового ряду буде знаходитись у певній залежності від попереднього. Наприклад, якщо в попередньому році в даний об'єкт було вкладено велику частину інвестицій, то, очевидно, що в наступному році їх рівень може значно зменшитись через економічну та технічну недоцільність. А це означає, що економетрична модель наведеної залежності у загальному вигляді:

$$Y_t = f(Y_{t-1} , X_{1t} , X_{2t} , u_t) ,$$

де Y_t — обсяг інвестицій у періоді t ; Y_{t-1} — обсяг інвестицій у періоді $t-1$; X_{1t} — фондомісткість основних фондів у періоді t ; X_{2t} — рентабельність економічної діяльності в періоді t ; u_t — стохастична складова, залишки.

Приклад 2. Нехай треба побудувати економетричну модель, яка характеризує залежність між рівнем експорту певної продукції та обсягом її виробництва. Будуючи цю економетричну модель на основі двох часових рядів, потрібно також урахувати той факт, що рівень експорту в період t , як правило, корелює з його рівнем в період $t-1$. Тому економетрична модель матиме загальний вигляд:

$$Y_t = f(Y_{t-1}, X_t, u_t),$$

де Y_t — рівень експорту продукції в період t ;

Y_{t-1} — рівень експорту продукції в період $t-1$;

X_t — обсяг виробництва в період t ;

u_t — залишки.

Можна було б навести ще багато прикладів, коли залежна змінна (Y_t) економетричної моделі залежить не тільки від пояснюючих змінних X_t , але й від свого попереднього значення — Y_{t-1} . У таких випадках порушується третя передумова для застосування методу 1МНК при оцінці параметрів моделі, тобто пояснюючі змінні корелюють із залишками (u_t). У цьому випадку вони стають стохастичними змінними.

Зважаючи, що u_{t-1} впливає на Y_{t-1} , а Y_{t-1} — на Y_t , то й u_{t-1} впливає на Y_t навіть тоді, коли послідовні значення залишків є незалежними.

Якщо в цьому випадку оцінки параметрів моделі визначатимуться на основі методу 1МНК, то вони будуть необґрунтованими. Зауважимо, що навіть якщо лише один елемент вектора $p \lim \left\{ \frac{1}{n} (X'u) \right\} \neq 0$, ми маємо

зможу отримати всі елементи вектора $\hat{a}$ (всі оцінки моделі) необґрунтованими.

Другою причиною, яка може призвести до порушення третьої передумови, коли $M(X'u)=0 \Rightarrow p \lim \left\{ \frac{1}{n} (X'u) \right\} \neq 0$, є наявність помилок у вихідній інформації.

Досі пір припускалось, що змінні економетричної моделі вимірюються без помилок, і тільки залишки u_i — це єдина форма помилок, яка допускається. Але дуже часто при вимірюванні змінних, які включаються в економетричну модель, допускаються помилки. Наявність цих помилок впливає на оцінку параметрів моделі. Так, якщо матриця пояснюючих змінних X має помилки, то її можна записати як суму двох матриць

$$X = \tilde{X} + V,$$

де $\tilde{X}$ — матриця дійсних значень пояснюючих змінних;

V — матриця помилок.

Звідси економетрична модель матиме вигляд:

$$Y = Xa + (u - Va).$$

Обґрунтованість оцінок параметрів цієї моделі залежить від того, чи дорівнює нулю матриця коваріацій змінних X із залишками $u - Va$, тобто:

$$p \lim \left[\frac{1}{n} X' (u - Va) \right] = p \lim \left(\frac{1}{n} X' u \right) - p \lim \left(\frac{1}{n} X' V \right) a ;$$

$$p \lim \left(\frac{1}{n} X' V \right) a, \text{ у свою чергу, можна записати так:}$$

$$p \lim \left(\frac{1}{n} X' V \right) a = p \lim \left(\frac{1}{n} X' V \right) + p \lim \left(\frac{1}{n} V' V \right).$$

Якщо в цих співвідношеннях допустити, що матрицю X (як її дійсні значення, так і помилки) гранично не корелюють із залишками, тобто:

$$p \lim \left(\frac{1}{n} X' u \right) = 0 \quad \text{і} \quad p \lim X' V = 0 ,$$

то матриця коваріації помилок частіше всього не дорівнює нулю,

$$p \lim \left(\frac{1}{n} V' V \right) \neq 0 , \text{ а це означає, що за наявності помилок виміру}$$

змінних оцінка параметрів моделі за методом 1МНК є необґрунтованою та асимптотично зміщеною.

Кореляція між пояснювальними змінними і залишками є серйозною перешкодою для застосування методу 1МНК.

У цьому випадку для оцінки параметрів моделі використовується метод інструментальних змінних, оператор оцінювання якого запишеться так:

$$\hat{A} = (Z' X)^{-1} Z' Y ,$$

де Z — матриця інструментальних змінних;

Z' — матриця, транспонована до матриці Z ;

X — матриця пояснювальних змінних;

Y — вектор залежної змінної.

[До змісту](#)

2. Способи визначення інструментальних змінних.

Оператор оцінювання Вальда застосовується для моделі з двома змінними:

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + u_t .$$

У цьому операторі інструментальні змінні визначаються так:

1) знаходяться відхилення індивідуальних значень змінної X від своєї медіани;

2) ті відхилення, які мають додатний знак, замінюються одиницями, а ті, які мають від'ємний знак, — мінус одиницями.

Оцінки параметрів моделі розраховуються так:

$$\hat{a}_1 = \frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1}{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}, \hat{a}_0 = \bar{Y} - a_1 \bar{X},$$

$\bar{X}_2$ і $\bar{X}_1$ — середні значення відхилень від медіани вгору і вниз;

$\bar{Y}_2$ і $\bar{Y}_1$ — середні значення залежної змінної, що відповідають $\bar{X}_2$ і $\bar{X}_1$.

Приклад 1. На основі даних, які наведені в табл.1, побудувати економетричну модель, яка кількісно описує залежність продуктивності праці від затрат на прикладні дослідження, причому наведені дані за затратами на прикладні дослідження можуть мати помилки виміру.

Таблиця 1.

Вихідні та розрахункові дані для побудови економетричної моделі

Рік	Продуктивність праці Y	Затрати на прикладні дослідження X	$X - Me$	Інструментальна змінна	$\hat{Y}$	$u = Y - \hat{Y}$	u^2	$(Y - \bar{Y})^2$
1	7,3	18	-7	-1	7,21	0,09	0,0081	0,7396
2	7,5	19	-6	-1	7,38	0,12	0,0144	0,4356
3	7,7	21	-4	-1	7,72	-0,02	0,0004	0,2116
4	7,9	23	-2	-1	8,06	-0,16	0,0256	0,0676
5	8,2	24	-1	-1	8,23	-0,03	0,0009	0,0016
6	8,4	25	0	1	8,40	0	0,0000	0,0576
7	8,6	25	0	1	8,40	0,20	0,0400	0,1936
8	8,7	26	1	1	8,57	0,13	0,0169	0,2916
9	8,4	27	2	1	8,74	-0,34	0,1156	0,0576
10	8,9	28	3	1	8,91	-0,01	0,0001	0,5476
Σ							0,2220	2,6040

Розв'язання

1. Ідентифікуємо змінні моделі:

Y — продуктивність праці, залежна змінна;

X — затрати на прикладні дослідження, незалежна змінна.

2. Специфікуємо економетричну модель у лінійному вигляді:

$$Y = a_0 + a_1 X + u ;$$

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X .$$

3. Оскільки незалежна змінна моделі X може мати помилки виміру, а це означає, що вона може корелювати із залишками, то замінимо її інструментальною змінною.

Для визначення інструментальної змінної за методом Вальда:

3.1. Знайдемо медіану змінної X :

$$Me = 25.$$

3.2. Визначимо відхилення кожного значення змінної X від своєї медіани; $X_i - Me$. Ці відхилення наведені у табл.1.

3.3. Від'ємні відхилення замінимо на -1 , а додатні — на $+1$. Сукупність цих одиниць є інструментальною змінною (див. табл. 1).

4. Щоб оцінити параметри економетричної моделі, на основі оператора Вальда визначимо:

4.1. Середні відхилення значень X від медіани:

$$\bar{X}_2 = \frac{3+2+1+0+0}{5} = \frac{6}{5} = 1,2 ;$$

$$\bar{X}_1 = \frac{-7+(-6)+(-4)+(-2)+(-1)}{5} = \frac{-20}{5} = -4 .$$

4.2. Середні значення $\bar{Y}_2$ і $\bar{Y}_1$, які відповідають середнім значенням $\bar{X}_2$ і $\bar{X}_1$.

$$\bar{Y}_2 = \frac{8,4+8,6+8,7+8,4+8,9}{5} = \frac{43}{5} = 8,6 ;$$

$$\bar{Y}_1 = \frac{7,3+7,5+7,7+7,9+8,2}{5} = \frac{38,6}{5} = 7,72 .$$

5. Розрахуємо оцінки параметрів моделі:

$$\hat{a}_1 = \frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1}{\bar{X}_2 - \bar{X}_1} = \frac{8,6 - 7,72}{1,2 + 4} = \frac{0,88}{5,2} = 0,17 ;$$

$$\hat{a}_0 = \bar{Y} - a_1 \bar{X} = 8,16 - 0,17 \cdot 23,6 = 8,16 - 4,012 = 4,148 \approx 4,15;$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} Y_i}{10} = 8,16 ;$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10} = 23,6 .$$

Звідси економетрична модель:

$$\hat{Y} = 4,15 + 0,17 X .$$

6. Визначимо загальну дисперсію та дисперсію залишків:

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1} = \frac{2,604}{9} = 0,289 ;$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} u_i^2}{n-m} = \frac{0,222}{8} = 0,028 .$$

7. Розрахуємо коефіцієнти детермінації та кореляції:

$$R^2 = \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_u^2}{\sigma_Y^2} = \frac{0,289 - 0,028}{0,289} = \frac{0,261}{0,289} = 0,903 ;$$

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,903} = 0,95 .$$

8. Аналіз економетричної моделі

Коефіцієнти детермінації і кореляції свідчать про те, що побудована модель є достовірною: зв'язок, який вона кількісно описує, є досить тісним. Так, коефіцієнт детермінації показує, що на 90% варіація продуктивності праці визначається варіацією затрат на прикладні дослідження. Оцінка параметра $\hat{a}_1 = 0,17$ визначає граничну зміну продуктивності праці, якщо затрати на прикладні дослідження зміняться на одиницю.

Коефіцієнт еластичності $E_{Y/X} = \hat{a}_1 \cdot \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = 0,17 : 0,346 = 0,49$ показує,

що збільшення затрат на прикладні дослідження на 1 % сприятиме збільшенню продуктивності праці на 0,49 %.

Оператор оцінювання Бартлета

Бартлет довів: якщо розбити впорядковані значення змінної X на три групи, а потім виключити з розрахунку середню групу, то можна збільшити ефективність оцінки. Оцінки параметрів моделі у цьому випадку будуть визначатись так:

$$\hat{a}_1 = \frac{\bar{Y}_3 - \bar{Y}_1}{\bar{X}_3 - \bar{X}_1}, \quad \hat{a}_0 = \bar{Y} - a_1 \bar{X},$$

де $\bar{Y}_3, \bar{Y}_1$ — середні значення залежної змінної по третій та першій групах;

$\bar{X}_3, \bar{X}_1$ — середні значення незалежної змінної, що відповідають середнім $\bar{Y}_3, \bar{Y}_1$.

Приклад 2. Нехай треба побудувати економетричну модель продуктивності праці залежно від затрат на прикладні дослідження, маючи на увазі, що останні можуть мати помилки виміру. Для побудови моделі використати оператор оцінювання Бартлета. Вихідні дані наведені у табл. 2.

Таблиця 2.

Вихідні та розрахункові дані для побудови економетричної моделі

Рік	Продуктивність праці Y	Затрати на прикладні дослідження X	X^*	Y^*	$X^* - Me$	u^2	$Y - \bar{Y}$	$(Y - \bar{Y})^2$
1	7,3	18	18	7,3	-8	0,0784	-1,26	1,5876
2	7,5	19	19	7,5	-7	0,0676	-1,06	1,1236
3	7,7	21	21	7,7	-5	0,0004	-0,86	0,7396
4	7,9	23	23	7,9	-3	0,0484	-0,66	0,4356
5	8,2	24	24	8,2	-2	0,0196	-0,36	0,1296

6	8,4	25	25	8,4		0,0256	−0,16	0,0256
7	8,6	25	25	8,6		0,0016	0,04	0,0016
8	8,7	26	26	8,7		0,0064	0,14	0,0196
9	8,4	27	27	8,4		0,3600	−0,16	0,0256
10	8,9	28	27	9,3		0,1024	0,34	0,1156
11	9,0	28	28	8,9	2	0,0484	0,44	0,1936
12	9,3	27	28	9,0	2	0,0900	0,74	0,5476
13	9,5	28	28	9,5	2	0,0784	0,94	0,8836
14	9,4	28	28	9,4	2	0,0324	0,84	0,7056
15	9,6	28	28	9,6	2	0,1444	1,04	1,0816
Σ	128,4	375	375			1,1040		7,6160

Розв'язання

1. Ідентифікуємо змінні моделі:

Y — продуктивність праці, залежна змінна;

X — затрати на прикладні дослідження, незалежна змінна.

2. Специфікуємо економетричну модель у лінійній формі:

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + u_t ;$$

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X .$$

3. Оцінка параметрів моделі на основі оператора оцінювання Бартлета.

3.1. Впорядкуємо значення залежної змінної X від меншого до більшого і, відповідно до значень X , впорядкуємо залежну змінну Y .

3.2. Знайдемо відхилення значень змінної X від медіани для 1 і 3 груп та середні цих відхилень:

$$Me = 26;$$

$$\bar{X}_3 = \frac{2 + 2 + 2 + 2 + 2}{5} = 2;$$

$$\bar{X}_1 = \frac{-8 + (-7) + (-3) + (-2)}{5} = \frac{-25}{5} = -5.$$

3.3. Визначимо середні значення залежної змінної, які відповідають середнім значенням $\bar{X}_3$ і $\bar{X}_1$:

$$\bar{Y}_3 = \frac{46,4}{5} = 9,28 ; \quad \bar{Y}_1 = \frac{38,6}{5} = 7,72 .$$

3.4. Визначимо оцінки параметрів моделі:

$$\hat{a}_1 = \frac{\bar{Y}_3 - \bar{Y}_1}{\bar{X}_3 - \bar{X}_1} = \frac{9,28 - 7,72}{2 + 5} = \frac{1,56}{7} = 0,22 ;$$

$$\hat{a}_0 = \bar{Y} - \hat{a}_1 \bar{X} = 8,56 - 0,22 \cdot 25 = 8,56 - 5,5 = 3,06 .$$

Економетрична модель запишеться так:

$$\hat{Y} = 3,06 + 0,22 X \quad (1).$$

Порівняємо оцінки параметрів цієї моделі з оцінками моделі на основі оператора Вальда:

$$\hat{Y} = 4,15 + 0,17 X \quad (2).$$

Як видно, вільний член моделі, параметри якої оцінені на основі оператора Бартлета, зменшився на 1,09, а оцінка параметра $\hat{a}_1$ збільшилась на 0,05 одиниці.

Щоб визначити якість цієї моделі, розрахуємо дисперсії:

$$4. \text{ Загальна дисперсія: } \sigma_Y^2 = \frac{7,616}{14} = 0,544 .$$

$$\text{Залишкова дисперсія: } \sigma_u^2 = \frac{1,104}{13} = 0,085 .$$

5. Визначимо коефіцієнти кореляції і детермінації:

$$5.1. R^2 = \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_u^2}{\sigma_Y^2} = \frac{0,544 - 0,085}{0,544} = \frac{0,459}{0,544} = 0,843 ;$$

$$5.2. R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,843} = 0,92 .$$

6. Аналіз економетричної моделі.

Коефіцієнти детермінації і кореляції свідчать про те, що побудована модель є достовірною: зв'язок, який вона кількісно описує, є досить тісним. Так, коефіцієнт детермінації показує, що на 84,3 % варіація продуктивності праці визначається варіацією затрат на прикладні дослідження. Оцінка

параметра $\hat{a}_1 = 0,22$ визначає граничну зміну продуктивності праці, якщо затрати на прикладні дослідження зміняться на одиницю.

Оператор оцінювання Дарбіна

Дарбін запропонував впорядковувати вектор пояснювальної змінної X у порядку зростання і ввів як інструментальну змінну порядковий номер (ранг), тобто числа 1, 2, 3, 4 ... n . Метод Дарбіна можна застосовувати й тоді, коли модель містить декілька пояснювальних змінних. У цьому випадку спочатку знаходять відхилення значень кожної змінної від свого середнього значення, потім ці відхилення впорядковуються в порядку зростання і кожному з них присвоюється порядковий номер.

Приклад 3. На основі даних, які наведені у табл. 3, необхідно побудувати економетричну модель, що характеризує залежність витрат на харчування від загальних затрат.

Таблиця 3

Вихідні та розрахункові дані для побудови економетричної моделі

Рік	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
Загальні затрати X	45	92	75	125	146	223	227	368
Витрати на харчування Y	21,8	47,3	33,4	50,3	66,0	66,9	81,0	106,0

Зважаючи на те, що вихідні дані базуються на соціологічних бюджетних дослідженнях, вони можуть мати помилки виміру.

Розв'язання

1. Ідентифікуємо змінні.

Y — витрати на харчування, залежна змінна;

X — загальні затрати, незалежна змінна.

2. Специфікуємо модель у лінійній формі:

$$Y = a_0 + a_1 X + u ;$$

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X .$$

3. Оцінімо параметри моделі методом інструментальних змінних, використавши оператор Дарбіна для моделі з двома змінними

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n i Y_i}{\sum_{i=1}^n i X_i} ,$$

де i — інструментальна змінна;

$$\hat{a}_0 = \bar{Y} - \hat{a}_1 \bar{X} .$$

3.1. Введемо інструментальну змінну i замість незалежної змінної X . Для цього впорядкуємо значення змінної X у порядку зростання (табл. 4):

Таблиця 4

Впорядкування пояснювальної змінної

Рік	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
X	45	75	92	125	146	223	227	368
i	1	2	3	4	5	6	7	8

3.2. Розрахуємо оцінки параметрів моделі на основі оператора Дарбіна:

$$\hat{a}_1 = \frac{21,8 \cdot 1 + 33,4 \cdot 2 + 47,3 \cdot 3 + 50,3 \cdot 4 + 66 \cdot 5 + 66,9 \cdot 6 + 81 \cdot 7 + 106 \cdot 8}{45 \cdot 1 + 75 \cdot 2 + 92 \cdot 3 + 125 \cdot 4 + 146 \cdot 5 + 223 \cdot 6 + 227 \cdot 7 + 368 \cdot 8} =$$

$$= \frac{2578,1}{7492} = 0,344 ;$$

$$\hat{a}_0 = 45,84 - 0,344 \cdot 162,625 = -10,103 ;$$

$$\bar{Y} = 45,84 ; \bar{X} = 162,625 .$$

4. Економетрична модель має вигляд:

$$\hat{Y} = -10,10344 X .$$

Оцінку параметрів цієї моделі $\hat{a}_1$ можна трактувати так: при збільшенні доходу на одиницю граничне зростання витрат на харчування становить 0,344

одиниці. Наявність вільного члена моделі (оцінка параметра $\hat{a}_0$) свідчить про те, що існують інші чинники, крім доходу, які можуть певною мірою формувати витрати на харчування.

5. Розглянемо оцінку параметрів економетричної моделі з декількома пояснювальними змінними на основі методу інструментальних змінних.

Приклад 4. Нехай треба побудувати економетричну модель продуктивності праці на основі даних, які наведені у табл. 5.

Таблиця 5.

Вихідні та розрахункові дані для побудови економетричної моделі

Номер спостереження	Продуктивність праці Y	Фондо-місткість X_1	Затрати на прикладні дослідження X_2	$\hat{Y}$	$Y - \hat{Y} = u$	u^2	$(Y - \bar{Y})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	5,3	8,5	20	5,5045	-1,26	0,0418	1,5876
2	5,5	8,8	21	5,6855	-1,06	0,0344	1,1236
3	5,7	8,9	21	5,7376	-0,86	0,0014	0,7396
4	5,9	9,1	23	5,8910	-0,86	0,00008	0,4356
5	6,2	9,3	25	6,0445	-0,66	0,0242	0,1296
6	6,4	9,5	26	6,1733	-0,36	0,0514	0,0256
7	6,6	9,7	27	6,3022	-0,16	0,0886	0,0016
8	6,7	10,1	27	6,5107	0,04	0,0359	0,0196
9	6,4	10,4	28	6,9616	0,14	0,0850	0,0256
10	6,9	10,6	28	6,7959	-0,16	0,0108	0,1156
11	7,0	11,3	27	7,1361	0,34	0,0185	0,1936
12	7,3	11,7	26	7,3200	0,44	0,0004	0,5476
13	7,5	11,8	27	7,3967	0,74	0,0107	0,8836
14	7,4	11,9	27	7,4488	0,94	0,0024	0,7056
15	7,6	12,5	27	7,7616	0,84	0,0260	1,0816
Σ	98,4	154,1	380			0,4318	7,616

Розв'язання

1. Ідентифікуємо змінні:

Y — продуктивність праці, залежна змінна;

X_1 — фондомісткість, незалежна змінна;

X_2 — затрати на прикладні дослідження.

2. Специфікуємо економетричну модель у лінійній формі:

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + u ;$$

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_1 + \hat{a}_2 X_2 .$$

3. Визначимо інструментальні змінні.

3.1. Розрахуємо середні значення пояснювальних змінних:

$$\bar{X}_1 = \frac{154,1}{15} \approx 10,3 ; \bar{X}_2 = \frac{380}{15} \approx 25,3 .$$

3.2. Знайдемо відхилення кожної пояснюючої змінної від свого середнього значення та впорядкуємо ці відхилення в порядку зростання.

Таблиця 6.

Впорядкування відхилень у порядку зростання

Номер спостереження	$X_1 - \bar{X}_1$	$X_2 - \bar{X}_2$	Z_1	$(X_2 - \bar{X}_2)^*$	Z_2^*	Z_1	Z_2
1	-1,8	-5,3	1	-5,3	1	1	1
2	-1,5	-4,3	2	-4,3	2	2	2
3	-1,4	-4,3	3	-4,3	3	3	3
4	-1,2	-2,3	4	-2,3	4	4	4
5	-1,0	-0,3	5	-0,3	5	5	5
6	-0,8	0,7	6	0,7	6	6	6
7	-0,6	1,7	7	0,7	7	7	8
8	-0,2	1,7	8	1,7	8	8	9
9	0,1	2,7	9	1,7	9	9	14
10	0,3	2,7	10	1,7	10	10	15
11	1,0	1,7	11	1,7	11	11	10

12	1,4	0,7	12	1,7	12	12	7
13	1,5	1,7	13	1,7	13	13	11
14	1,6	1,7	14	2,7	14	14	12
15	2,2	1,7	15	2,7	15	15	13

3.3. Кожному відхиленню змінних X_1 та X_2 від своїх середніх присвоюється порядковий номер (ранг). Зауважимо, що відхилення для обох змінних впорядковуються від меншого до більшого, в результаті отримуємо дві інструментальні змінні, які потім потрібно записати строго відповідно до значення залежної змінної для кожного спостереження. У табл. 7.6 це змінні Z_1 і Z_2 .

4. Оцінимо параметри моделі $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_1 + \hat{a}_2 X_2$, використовуючи оператор інструментальних змінних:

$$\hat{A} = (Z'X)^{-1} Z'Y,$$

де Z — матриця інструментальних змінних;

Z' — матриця, транспонована до Z ;

Y — вектор залежної змінної;

X — матриця пояснювальних змінних.

4.1. Запишемо матриці Z' , X , Y :

$$Z' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 & 14 & 15 & 10 & 7 & 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 8,5 & 20 \\ 1 & 8,8 & 21 \\ 1 & 8,9 & 21 \\ 1 & 9,1 & 23 \\ 1 & 9,3 & 25 \\ 1 & 9,5 & 26 \\ 1 & 9,7 & 27 \\ 1 & 10,1 & 27 \\ 1 & 10,4 & 28 \\ 1 & 10,6 & 28 \\ 1 & 11,3 & 27 \\ 1 & 11,7 & 26 \\ 1 & 11,8 & 27 \\ 1 & 11,9 & 27 \\ 1 & 12,5 & 27 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 5,3 \\ 5,5 \\ 5,7 \\ 5,9 \\ 6,2 \\ 6,4 \\ 6,6 \\ 6,7 \\ 6,4 \\ 6,9 \\ 7,0 \\ 7,3 \\ 7,5 \\ 7,4 \\ 7,6 \end{pmatrix}$$

4.2. Знайдемо добуток :

$$(Z' X) = \begin{pmatrix} 15 & 154,1 & 380 \\ 120 & 1313,2 & 3178 \\ 120 & 1295,8 & 3193 \end{pmatrix}.$$

4.3. Визначимо обернену матрицю $(Z' X)^{-1}$:

$$(Z' X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,3860 & 0,0067 & -0,1716 \\ -0,0333 & 0,0424 & -0,0383 \\ -0,0386 & -0,0175 & 0,0223 \end{pmatrix}.$$

4.4. Знайдемо добуток матриць:

$$Z' Y = \begin{pmatrix} 98,4 \\ 832,5 \\ 823,8 \end{pmatrix}.$$

4.5. Визначимо оцінки параметрів моделі:

$$\hat{A} = (Z' X)^{-1} Z' Y = \begin{pmatrix} 0,5822 \\ 0,5212 \\ 0,0246 \end{pmatrix}.$$

Економетрична модель у даному випадку:

$$\hat{Y} = 0,5822 + 0,5212 X_1 + 0,0246 X_2.$$

5. Знайдемо розрахункові значення продуктивності праці (залежної змінної) на основі моделі, визначимо залишки та їх дисперсію (див. табл. 7.5).

$$1. \text{ Залишкова дисперсія } \sigma_u^2 = \frac{1}{n-m} u'u = 0,0359 .$$

2. Загальна дисперсія $\sigma_Y^2 = \frac{1}{n-1} Y'Y = 0,544$.

6. Визначимо коефіцієнти детермінації і кореляції:

$$R^2 = \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_u^2}{\sigma_Y^2} = \frac{0,544 - 0,036}{0,544} = 0,93 ;$$

$$R = \sqrt{R^2} = 0,96 .$$

7. Розрахуємо матрицю коваріацій оцінок параметрів моделі :

$$asy \text{ var}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (Z'X)^{-1} (Z'Z) (X'Z)^{-1}$$

1. $Z'Z = \begin{pmatrix} 15 & 120 & 120 \\ 120 & 1240 & 1195 \\ 120 & 1195 & 1240 \end{pmatrix};$

2. $(X'Z)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,3860 & -0,0333 & -0,0386 \\ 0,0067 & 0,0424 & -0,0175 \\ -0,1716 & -0,0383 & 0,0223 \end{pmatrix};$

3. $(Z'X) = \begin{pmatrix} 1,3860 & 0,0067 & -0,1716 \\ -0,0333 & 0,0424 & -0,0383 \\ -0,0386 & -0,0175 & 0,0222 \end{pmatrix};$

4. $asy \text{ var}(\hat{A}) = \begin{pmatrix} 0,2802 & 0,0053 & -0,0131 \\ 0,0053 & 0,0054 & -0,0024 \\ -0,0113 & -0,0024 & 0,0015 \end{pmatrix}.$

8. Визначимо стандартні помилки оцінок параметрів моделі:

$$S_{\hat{A}} = \sqrt{\sigma_u^2 asy \text{ var}(\hat{A})};$$

$$S_{\hat{a}_0} = \sqrt{0,2802} = 0,5293 ;$$

$$S_{\hat{a}_1} = \sqrt{0,0054} = 0,0737 ;$$

$$S_{\hat{a}_2} = \sqrt{0,0015} = 0,0387 .$$

9. Аналіз економетричної моделі

Коефіцієнти детермінації і кореляції свідчать про значущість зв'язку, який описується моделлю. $R^2 = 0,93$ показує, що на 93% варіація продуктивності праці визначається варіацією затрат на прикладні дослідження та фондомісткістю продукції. Коефіцієнт кореляції $R = 0,96$ свідчить про тісний зв'язок між залежною і незалежними змінними. Стандартні помилки оцінок параметрів моделі свідчать, що оцінки $\hat{a}_0$ та $\hat{a}_2$ є неефективними і зміщеними: стандартна помилка оцінки $\hat{a}_0$ є майже такою, як і сама оцінка, а стандартна помилка оцінки $\hat{a}_2$ у 1,5 раза перевищує цю оцінку. Звідси можна зробити висновок, що незважаючи на тісний зв'язок між змінними моделі, необхідно продовжити дослідження, перш за все збільшивши сукупність спостережень.

[До змісту](#)