

Тема 11. Економетричне моделювання на основі виробничої функції Кобба-Дугласа. Лекція 12. Економетричне моделювання на основі виробничої функції Кобба-Дугласа

Зміст

1. [Поняття і основні характеристики функції Кобба-Дугласа](#)
2. [Економетрична модель продуктивності праці](#)

1.Поняття і основні характеристики функції Кобба-Дугласа

Виробнича функція – це економетрична модель, яка кількісно описує зв'язок основних результативних показників виробничо-господарської діяльності з факторами, що визначають ці показники. До основних показників належать дохід, прибуток, рентабельність, продуктивність праці, собівартість тощо.

Перше поняття виробничої функції пов'язане з математичним моделюванням технологічної залежності між обсягом продукції, що випускається, і кількісними характеристиками витрат ресурсів. Звідси і назва функції «виробнича». Уперше така функція була побудована американськими дослідниками Коббом і Дугласом ще в 30-ті роки XX ст. за даними про функціонування обробної промисловості США протягом двадцяти років і є класичним прикладом економетричного моделювання.

Функція Кобба–Дугласа (CDPF) належить до найвідоміших виробничих функцій, що набули широкого застосування в економічних дослідженнях, особливо на макрорівні. Класична виробнича функція Кобба–Дугласа має вигляд :

$$Y = aF^{\alpha} L^{1-\alpha}, \quad (1)$$

де Y – обсяг продукції; F – основний капітал; L – робоча сила.

Сума параметрів або степінь однорідності класичної функції Кобба–Дугласа дорівнює одиниці. А це означає, що при збільшенні обох виробничих ресурсів на одиницю обсяг продукції також збільшиться на одиницю. Отже, ефективність ресурсів у такому разі стала.

2. Практичні дослідження функції Кобба–Дугласа показали, що припущення про лінійну однорідність на практиці виконується рідко. Тому була запропонована виробнича функція загальнішого вигляду :

$$Y = aF^{\alpha}L^{\beta}. \quad (2)$$

Сума параметрів $(\alpha + \beta)$ на відміну від попереднього випадку може бути як меншою, так і більшою від одиниці. Якщо $(\alpha + \beta) > 1$, то темпи росту обсягу продукції вищі за темпи росту виробничих ресурсів, а якщо $(\alpha + \beta) < 1$, то, навпаки, темпи росту продукції нижчі за темпи росту ресурсів.

Припустимо, що рівень кожного виробничого ресурсу збільшився на r %, тоді величини їх відповідно дорівнюватимуть $F\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ і $L\left(1 + \frac{r}{100}\right)$.

Обсяг продукції на основі виробничої функції запишеться так:

$$\begin{aligned} Y_1 &= a \left[F \left(1 + \frac{r}{100} \right) \right]^{\alpha} \left[L \left(1 + \frac{r}{100} \right) \right]^{\beta} = \\ &= a F^{\alpha} L^{\beta} \left(1 + \frac{r}{100} \right)^{\alpha} \left(1 + \frac{r}{100} \right)^{\beta} = Y \left(1 + \frac{r}{100} \right)^{\alpha + \beta}. \end{aligned}$$

Звідси при $\alpha + \beta > 1$ обсяг продукції зростає більш ніж на r %; при $\alpha + \beta < 1$ – менш ніж на r %; при $\alpha + \beta = 1$ продукція збільшиться на r %. Узявши частинні похідні від виробничої функції Кобба–Дугласа, одержимо :

$$Y'_F = \frac{\partial Y}{\partial F} = \alpha \frac{Y}{F}; \quad Y'_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta \frac{Y}{L} \quad (3).$$

Це означає, що граничний приріст продукції за рахунок приросту кожного ресурсу визначається як добуток коефіцієнта еластичності на середню ефективність ресурсу. Параметр a у функції Кобба–Дугласа залежить від вибраних одиниць вимірювання Y , F , L ; водночас числове значення цього параметра визначається також ефективністю виробничого процесу. У цьому можна переконатись, порівнявши дві виробничі функції, які відрізняються одна від одної лише значенням параметра a .

Для фіксованих значень F і L тій функції, в якій більше числове значення параметра a , відповідає більше значення Y . Отже, і виробничий процес, який

описується цією функцією, буде ефективнішим. Другі похідні функції Кобба–Дугласа мають такий вигляд:

$$Y''_{FF} = \frac{\alpha (\alpha - 1) Y}{F^2}; \quad Y''_{LL} = \frac{\beta (\beta - 1) Y}{L^2} \quad (4).$$

Беручи до уваги, що $0 < \alpha < 1$ і $0 < \beta < 1$, $Y''_{FF} < 0$ і $Y''_{LL} < 0$, то справедливий висновок: при збільшенні ресурсів граничний приріст обсягу продукції зменшуватиметься. Якщо обсяг продукції у функції Кобба–Дугласа вважати сталим (const), то можна обчислити граничні норми заміщення ресурсів:

$$h = \frac{Y'_F}{Y'_L} = \frac{\alpha \frac{Y}{F}}{\beta \frac{Y}{L}} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{L}{F} \quad (5).$$

Звідси бачимо, що гранична норма заміщення ресурсів у функції Кобба–Дугласа визначається як добуток співвідношень величин ресурсів та їх коефіцієнтів еластичності.

Швидкість зміни норми заміщення ресурсів у зв'язку зі зміною величини ресурсів обчислюється так:

$$\frac{\partial h}{\partial L} = \frac{\alpha}{\beta F}; \quad \frac{\partial h}{\partial F} = -\frac{\alpha L}{\beta F^2} \quad (6).$$

Мірою швидкості зміни h є еластичність заміщення ресурсів F і L , що визначається як відношення зміни величини ресурсів до зміни величини h :

$$h_{F/4} = \frac{L/F \cdot \partial L/F}{\partial h/h} = \frac{h (Lh + F)}{FL \left(h \frac{\partial h}{\partial F} - \frac{\partial h}{\partial L} \right)} = 1 \quad (7).$$

Отже, еластичність заміщення в кожній точці кривої, що характеризує виробничу функцію Кобба–Дугласа, дорівнює одиниці.

Розглянемо тепер поведінку функції при зміні масштабу виробництва. Для цього припустимо, що витрати кожного ресурсу виробництва збільшилися в λ раз, тоді нове значення Y' визначатиметься так:

$$Y' = a (\lambda F)^\alpha (\lambda L)^\beta = \lambda^{\alpha + \beta} Y \quad (8).$$

Ступінь однорідності цієї функції дорівнює $\alpha + \beta$. Якщо $\alpha + \beta = 1$, то рівень ефективності ресурсів не залежить від масштабів виробництва. Якщо

$\alpha + \beta < 1$, то, як уже стверджувалось, з розширенням масштабів виробництва середні витрати ресурсів в розрахунку на одиницю продукції зменшуються, а при $\alpha + \beta > 1$ – збільшуються. Причому ці властивості не залежать від числових значень F і L і зберігаються в кожній точці виробничої функції.

За припущення, що мета господарської діяльності – максимізація прибутку, можна проілюструвати інші властивості виробничої функції. Запишемо функцію прибутку:

$$\Pi = bY^{r+1} - wL - rF + \lambda [f(F, L) - Y].$$

Підприємець вибирає такі значення Y, L, F , які максимізують прибуток при обмеженнях, що накладаються виробничою функцією. Величини b, w, r – параметри функції прибутку, λ – множник Лагранжа. Якщо виробничий процес у даному співвідношенні описується функцією Кобба–Дугласа, то можна записати умови максимізації прибутку:

$$w = \frac{\lambda \beta Y}{L}; \quad r = \frac{\lambda \alpha Y}{F}; \quad \frac{w}{r} = \frac{\beta F}{\alpha L},$$

$$\lambda = (r + 1)P \text{ при } r \neq -1, \text{ де } P = bY^r.$$

Звідси обсяги ресурсів такі:

$$L = \frac{(r+1) P \beta Y}{w}; \quad F = \frac{(r+1) P \alpha Y}{r}.$$

У такому випадку максимальне значення випуску продукції, якщо $\alpha + \beta \neq 1$, можна записати так:

$$Y = aF^\alpha L^\beta = a \left[\frac{(r+1) P \alpha Y}{r} \right]^\alpha \left[\frac{(r+1) P \beta Y}{w} \right]^\beta.$$

При $r = 1$ згідно із записаними щойно умовами максимізації одержимо :

$$F = \frac{w \alpha L}{\beta r}; \quad Y = a \left(\frac{w \alpha}{\beta r} \right)^\alpha L^{\alpha + \beta}.$$

Отже, необхідні умови для забезпечення максимізації прибутку дають змогу визначити відповідні витрати робочої сили і основного капіталу. З

розширенням масштабів виробництва ефективність витрат ресурсів падає, що відповідає максимізації прибутку в умовах досконалої конкуренції.

[До змісту](#)

2. Економетрична модель продуктивності праці.

Найпридатнішими для побудови економетричної моделі продуктивності праці є такі аналітичні форми функцій:

- лінійна;
- степенева.

Запишемо загальний вигляд цих функцій:

$$\text{лінійна} - Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + \dots + a_m X_m + u; \quad (9)$$

$$\text{степенева} - Y = a_0 X_1^{a_1} X_2^{a_2} X_3^{a_3} \dots X_m^{a_m} u, \quad (10)$$

де Y – продуктивність праці, залежна змінна;

$X_j (j=1, 2, 3, \dots, m)$ – чинники економічної діяльності, що впливають на продуктивність праці (незалежні або пояснювальні змінні);

u – стохастична складова, яка акумулює в собі вплив усіх випадкових чинників;

$a_j (j=0, 1, 2, \dots, m)$ – параметри моделі продуктивності праці.

Лінійна форма моделі продуктивності праці відтворює адитивний закон формування продуктивності праці (рівень продуктивності праці є сума часток, що їх вносить у загальний рівень кожний чинник).

Степенева форма відтворює мультиплікативний закон формування продуктивності праці (рівень продуктивності праці є добуток часток, що їх вносить у загальний рівень кожний чинник).

Як було зазначено раніше, що узявши логарифми (натуральні або десяткові) лівої та правої частин виразу (4), можна перейти від степеневої до лінійно-логарифмічної моделі продуктивності праці:

$$\ln Y = \ln a_0 + a_1 \ln X_1 + a_2 \ln X_2 + a_3 \ln X_3 + \dots + a_m \ln X_m + \ln u,$$

тобто степенева функція реалізується як лінійна, якщо вихідні дані для побудови моделі брати не в абсолютних одиницях їх виміру, а в логарифмах.

3. Побудувати модель продуктивності праці – це означає оцінити параметри моделі $a_j (j = 0, 1, 2, \dots, m)$.

1. Побудувати модель продуктивності праці, що характеризує залежність між продуктивністю праці та основними чинниками, які впливають на неї.

2. Оцінити статистичну значущість моделі та оцінок її параметрів і зробити висновки.

3. Обчислити всі економічні характеристики взаємозв'язку і зробити економічний аналіз.

4. Виконати прогноз продуктивності праці на наступні чотири місяці, якщо задані очікувані значення чинників, що впливають на неї.

Вихідні дані наведені в табл. 1.

Розв'язування

1. Побудова моделі продуктивності праці

Щоб виконати поставлене завдання, скористаємося пакетом «Excel».

Для побудови моделі продуктивності праці спочатку ідентифікуємо змінні. Так, Y – залежна змінна, результативна ознака, продуктивність праці; X_1, X_2, X_3, X_4 – незалежні, пояснювальні змінні, де X_1 – фондомісткість продукції, X_2 – коефіцієнт плинності робочої сили, X_3 – процент втрат робочого часу, X_4 – стаж роботи.

Таблиця 1

Вихідні та розрахункові дані для побудови економетричної моделі продуктивності праці

Місяць	Продуктивність праці, гр. од/людино-год	Фондомісткість продукції, гр. од.	Коефіцієнт плинності робочої сили, %	Рівень втрат робочого часу, %	Стаж, рік
1-й	52	72	13,0	2,7	5,0

2-й	53	74	12,5	2,8	5,5
3-й	50	72	12,0	3,0	5,0
4-й	51	73	11,0	3,2	6,0
5-й	54	70	10,1	3,2	7,0
6-й	55	67	9,0	3,3	8,0
7-й	57	67	8,5	3,4	10,0
8-й	52	62	8,2	3,6	10,0
9-й	60	72	8,0	3,7	10,5
10-й	60	72	5,5	3,7	11,0
11-й	62	74	5,0	3,4	13,0
12-й	64	75	4,7	4,0	10,0
13-й	65	76	4,6	4,2	12,0
14-й	67	80	4,0	4,3	13,0
15-й	67	82	4,1	4,7	14,0
16-й	62	84	4,2	4,8	14,5
17-й	63	84	4,5	4,8	15,5
18-й	66	87	4,0	4,9	17,0
19-й	68	90	4,0	5,0	16,5
20-й	70	92	3,0	4,7	17,5
21-й	–	92	4,0	5,2	17,6
22-й	–	93	5,0	5,3	17,7
23-й	–	93	5,0	5,4	17,8
24-й	–	94	6,0	5,4	17,9

Специфікуємо модель:

загальний вигляд моделі продуктивності праці такий:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, X_4, u).$$

У цій економетричній моделі u – стохастична складова, яка враховує вплив випадкових чинників на рівень продуктивності праці.

Аналітичний вигляд цієї функції подамо у двох формах:

1) лінійній $Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + u$;

2) степеневій $Y = a_0X_1^{a_1}X_2^{a_2}X_3^{a_3}X_4^{a_4}u$.

Відповідно розрахункові функції за вибірковою сукупністю будуть такі:

1. $Y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1X_1 + \hat{a}_2X_2 + \hat{a}_3X_3 + \hat{a}_4X_4$;

2. $Y = \hat{a}_0X_1^{\hat{a}_1}X_2^{\hat{a}_2}X_3^{\hat{a}_3}X_4^{\hat{a}_4}$,

$\hat{a}_j$ – оцінка j -го параметра моделі ($j=1, 2, 3, 4$).

Зауважимо, що степенева функція реалізується як лінійно-логарифмічна, а тому, прологарифмувавши вираз цієї функції ліворуч і праворуч, одержимо:

$$\ln \hat{Y} = \ln \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \ln X_1 + \hat{a}_2 \ln X_2 + \hat{a}_3 \ln X_4.$$

На підставі 17-ти спостережень ($n = 17$), використовуючи 1 МНК, побудуємо економетричну модель для лінійної і степеневій функцій.

Побудова економетричної моделі на основі матричного оператора 1 МНК, пакет «Excel».

$$Y = \begin{pmatrix} 52 \\ 53 \\ 50 \\ 51 \\ 54 \\ 55 \\ 57 \\ 52 \\ 60 \\ 60 \\ 62 \\ 64 \\ 65 \\ 67 \\ 67 \\ 62 \\ 63 \end{pmatrix}; \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} 50,59577 \\ 51,87419 \\ 51,83715 \\ 53,44493 \\ 54,0568 \\ 54,82433 \\ 55,19777 \\ 53,73371 \\ 56,96214 \\ 61,7115 \\ 63,64387 \\ 63,69624 \\ 63,38007 \\ 65,39404 \\ 64,72541 \\ 64,8422 \\ 64,07987 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 72 & 13 & 2,7 & 5 \\ 1 & 74 & 12,5 & 2,8 & 5,5 \\ 1 & 72 & 12 & 3 & 5 \\ 1 & 73 & 11 & 3,2 & 6 \\ 1 & 70 & 10,1 & 3,2 & 7 \\ 1 & 67 & 9 & 3,3 & 8 \\ 1 & 67 & 8,5 & 3,4 & 10 \\ 1 & 62 & 8,2 & 3,6 & 10 \\ 1 & 72 & 8 & 3,7 & 10,5 \\ 1 & 72 & 5,5 & 3,7 & 11 \\ 1 & 74 & 5 & 3,4 & 13 \\ 1 & 75 & 4,7 & 4 & 10 \\ 1 & 76 & 4,6 & 4,2 & 12 \\ 1 & 80 & 4 & 4,3 & 13 \\ 1 & 82 & 4,1 & 4,7 & 14 \\ 1 & 84 & 4,2 & 4,8 & 14,5 \\ 1 & 84 & 4,5 & 4,8 & 15,5 \end{pmatrix};$$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 72 & 74 & 72 & 73 & 70 & 67 & 67 & 62 & 72 & 72 & 74 & 75 & 76 & 80 & 82 & 84 & 84 \\ 13 & 12,5 & 12 & 11 & 10,1 & 9 & 8,5 & 8,2 & 8 & 5,5 & 5 & 4,7 & 4,6 & 4 & 4,1 & 4,2 & 4,5 \\ 2,7 & 2,8 & 3 & 3,2 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,6 & 3,7 & 3,7 & 3,4 & 4 & 4,2 & 4,3 & 4,7 & 4,8 & 4,8 \\ 5 & 5,5 & 5 & 6 & 7 & 8 & 10 & 10 & 10,5 & 11 & 13 & 10 & 12 & 13 & 14 & 14,5 & 15,5 \end{pmatrix};$$

$$X'X = \begin{pmatrix} 17 & 1256 & 1289 & 628 & 170 \\ 1256 & 93376 & 9347 & 46867 & 12761 \\ 1289 & 9347 & 114595 & 44504 & 11212 \\ 628 & 46867 & 44504 & 23926 & 66175 \\ 170 & 12761 & 11212 & 66175 & 1889 \end{pmatrix};$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 26,00577 & -0,13123 & -0,8986 & -1,21882 & -0,49351 \\ -0,13123 & 0,003839 & -0,00256 & -0,03638 & 0,000139 \\ -0,8986 & -0,00256 & 0,055734 & 0,075028 & 0,038809 \\ -1,21882 & -0,03638 & 0,075028 & 1,197125 & -0,10847 \\ -0,49351 & 0,000139 & 0,038809 & -0,10847 & 0,058969 \end{pmatrix};$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} 994 \\ 73819 \\ 7257,2 \\ 37241 \\ 10216 \end{pmatrix}; \hat{A} = \begin{pmatrix} 60,14654 \\ 0,316353 \\ -1,93605 \\ -2,31555 \\ -0,18151 \end{pmatrix}.$$

Економетрична модель:

$$\hat{Y} = 60,15 + 0,32X_1 - 1,93X_2 - 2,31X_3 - 0,18X_4.$$

Запишемо логарифми вихідної інформації:

$$\ln Y = \begin{pmatrix} 3,951244 \\ 3,970292 \\ 3,912023 \\ 3,931826 \\ 3,988984 \\ 4,007333 \\ 4,043051 \\ 3,951244 \\ 4,094345 \\ 4,094345 \\ 4,127134 \\ 4,158883 \\ 4,174387 \\ 4,204693 \\ 4,204693 \\ 4,127134 \end{pmatrix}; \ln X = \begin{pmatrix} 4,276666 & 2,56449 & 0,993252 & 1,609438 \\ 4,304065 & 2,525729 & 1,029619 & 1,704748 \\ 4,276666 & 2,484907 & 1,098612 & 1,609438 \\ 4,290459 & 2,397895 & 1,163151 & 1,791759 \\ 4,248495 & 2,312535 & 1,163151 & 1,94591 \\ 4,204693 & 2,197225 & 1,193922 & 2,079442 \\ 4,204693 & 2,140066 & 1,223775 & 2,302585 \\ 4,127134 & 2,104134 & 1,280934 & 2,302585 \\ 4,276666 & 2,079442 & 1,308333 & 2,351375 \\ 4,276666 & 1,704748 & 1,308333 & 2,397895 \\ 4,304065 & 1,609438 & 1,223775 & 2,564949 \\ 4,317488 & 1,547563 & 1,386294 & 2,302585 \\ 4,330733 & 1,526056 & 1,435085 & 2,484907 \\ 4,382027 & 1,386294 & 1,458615 & 2,564949 \\ 4,406719 & 1,410987 & 1,547563 & 2,639057 \\ 4,430817 & 1,435085 & 1,568616 & 2,674149 \end{pmatrix}.$$

$$u = \begin{pmatrix} 1,404229 \\ 1,125811 \\ -1,83715 \\ -2,44493 \\ -0,0568 \\ 0,175671 \\ 1,802226 \\ -1,73371 \\ 3,03786 \\ -1,7115 \\ -1,64387 \\ 0,303757 \\ 1,619933 \\ 1,605961 \\ 2,274593 \\ -2,8422 \\ -1,07987 \\ -5,2E-11 \end{pmatrix} \begin{matrix} u^2 \\ 1,971858 \\ 1,26745 \\ 3,375127 \\ 5,977681 \\ 0,003226 \\ 0,03086 \\ 3,248018 \\ 3,005761 \\ 9,228596 \\ 2,929238 \\ 2,702324 \\ 0,092268 \\ 2,624184 \\ 2,57911 \\ 5,173774 \\ 8,078082 \\ 1,166121 \\ 2,75E-21 \\ 53,45368 \end{matrix}$$

Характеристики дисперсійного аналізу:

$D_u^2 = 4,454473$ — залишкова дисперсія;
 $D_Y^2 = 34,01471$ — дисперсія залежної змінної;
 $R^2 = 0,869043$ — коефіцієнт детермінації;
 $R = 0,932225$ — коефіцієнт кореляції;
 $F = 27,54431$ — критерій Фішера.

$$\text{covr}\hat{A} = \begin{pmatrix} 115842 & -0,58458 & -4,00281 & -5,4292 & -2,19831 \\ -0,58458 & 0,017102 & -0,01141 & -0,16204 & 0,000619 \\ -4,00281 & -0,01141 & 0,248266 & 0,33421 & 0,172872 \\ -5,4292 & -0,16204 & 0,33421 & 5,332563 & -0,48319 \\ -2,19831 & 0,000619 & 0,172872 & -0,48319 & 0,262675 \end{pmatrix}.$$

$$s(\hat{A}) = \begin{pmatrix} 10,76299 \\ 0,130773 \\ 0,498263 \\ 2,309234 \\ 0,512519 \end{pmatrix}; t_j = \begin{pmatrix} 5,588273 \\ 2,419098 \\ -3,88559 \\ -1,00274 \\ -0,35416 \end{pmatrix}.$$

Результати розрахунку економетричної моделі на основі стандартної програми «Лінейн»:

-0,18151	-2,31555	-1,93605	0,31635	60,14654	– лінійна модель
0,512519	2,309234	0,498263	0,130773	10,76299	
0,901782	2,110562	# Н/Д	# Н/Д	# Н/Д	
27,54431	12	# Н/Д	# Н/Д	# Н/Д	
490,7816	53,45368	# Н/Д	# Н/Д	# Н/Д	
0,058697	-0,16573	-0,20464	0,223541	3,581697	– степенева модель
0,079979	0,146282	0,070138	0,171551	0,862185	
0,902392	0,036178	# Н/Д	# Н/Д	# Н/Д	
27,73508	12	# Н/Д	# Н/Д	# Н/Д	
0,1452	0,015706	# Н/Д	# Н/Д	# Н/Д	

Перший рядок результатів розрахунку містить оцінки параметрів моделі.

Для лінійної моделі:

$$\begin{matrix} \hat{a}_4 & \hat{a}_3 & \hat{a}_2 & \hat{a}_1 & \hat{a}_0 \\ -0,18151 & -2,31555 & -1,93685 & 0,316353 & 60,14654 \end{matrix}$$

Для степеневі моделі:

$$\begin{matrix} \hat{a}_4 & \hat{a}_3 & \hat{a}_2 & \hat{a}_1 & \ln \hat{a}_0 \\ 0,05897 & -0,1673 & -0,20464 & 0,223541 & 3,381697 \end{matrix}$$

Другий рядок в обох таблицях результатів містить стандартні похибки оцінок параметрів моделі.

Для лінійної моделі:

$$\begin{matrix} \hat{S}a_4 & \hat{S}a_3 & \hat{S}a_2 & \hat{S}a_1 & \hat{S}a_0 \\ 0,512519 & 2,309234 & 0,498263 & 0,130773 & 10,76299 \end{matrix}$$

Для степеневі моделі:

$$\begin{matrix} \hat{S}a_4 & \hat{S}a_3 & \hat{S}a_2 & \hat{S}a_1 & S \ln \hat{a}_0 \\ 0,079979 & 0,146282 & 0,070138 & 0,171551 & 0,862185 \end{matrix}$$

Третій рядок в обох таблицях результатів містить два показники R^2 і σ_u .

Для лінійної моделі:

$$R^2 = 0,902; \sigma_u = 2,11.$$

Для степеневної моделі:

$$R^2 = 0,902; \sigma(\ln u) = 0,036.$$

Четвертий рядок також містить дві характеристики: F -критерій та ступені свободи $(n - m)$.

Для лінійної моделі:

$$F = 27,54; n - m = 12.$$

Для степеневної моделі:

$$F = 27,73; n - m = 12.$$

П'ятий (останній) рядок таблиць результатів містить два показники:

1) суму квадратів регресії – $\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$;

2) суму квадратів залишків – $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$.

Зауважимо, що в таблиці результатів степеневної моделі маємо ці характеристики для логарифмів залежної змінної:

1) $\sum_{i=1}^n (\ln \hat{Y}_i - \ln \bar{Y})^2$;

2) $\sum_{i=1}^n (\ln Y_i - \ln \hat{Y}_i)^2$;

3) результати обчислення економетричної моделі та кількісних характеристик взаємозв'язку на основі стандартної програми «Регресія» (Excel, розділ меню «Сервіс»).

Вивід підсумків

Регресійна статистика	
Множинний коефіцієнт кореляції	0,949622
R-квадрат	0,901782
Нормована помилка	0,869043
Стандартна помилка	2,110562

Кількість спостережень	17
------------------------	----

Дисперсійний аналіз

Показники	<i>df</i>	SS	MS	F	Значущість <i>F</i>
Регресія	4	490,7816	122,6954	27,54431	5,76E-06
Залишок	12	53,45368	4,454473		
Разом	16	544,2353			

Змінні	Коеф.	Ст. пох.	<i>t</i> -крит.	Знач. <i>t</i>	Нижня межа	Верхня межа
Y-переріз	60,14654	10,76299	5,588273	0,000118	36,69599	83,59708
Змінна 1	0,316353	0,130773	2,419098	0,032371	0,031423	0,601283
Змінна 2	−1,93605	0,498263	−3,88559	0,002166	−3,02167	−0,85042
Змінна 3	−2,31555	2,309234	−1,00274	0,33578	−7,34694	2,715834
Змінна 4	−0,18151	0,512519	−0,35416	0,729367	−1,29819	0,935171

Розрахуємо залишки моделі

Спостереження	Прогноз	Залишки
1	50,59577	1,404229
2	51,87419	−1,125811
3	51,83715	−2,44493
4	53,44493	−0,0568
5	54,0568	0,175671
6	55,19777	1,802226
7	55,19777	−1,73371
8	53,73371	3,03786
9	56,96214	−1,7115
10	61,7115	−1,64387

11	63,64387	0,303757
12	63,69624	1,619933
13	63,38007	1,605961
14	65,39404	2,274593
15	64,72541	-2,8422
16	64,8422	-2,8422
17	64,07987	-1,07987

Результати розрахунку за цією програмою дають найбільшу кількість характеристик взаємозв'язку.

Регресійна статистика

$R = 0,949$ – коефіцієнт кореляції;

$R^2 = 0,902$ – коефіцієнт детермінації без урахування числа ступенів свободи;

$R^2 = 0,869$ – коефіцієнт детермінації з урахуванням числа ступенів свободи (формула Амеція):

$$R^2 = 1 - \left(1 - R^2\right) \frac{n+m}{n-m};$$

$S_u = 2,11$ – стандартна похибка залишків;

$n = 17$ – кількість спостережень.

Дисперсійний аналіз містить 5 стовпчиків.

Перший – ступені свободи: $m - 1 = 4$; $n - m = 12$; $n - 1 = 16$.

Другий – суми квадратів: $\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = 4907816$ – регресії;

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = 5345368 - \text{залишків};$$

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = 4,45473 - \text{залежної змінної}.$$

Третій – дисперсії: $\bar{\sigma}_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{m-1} = 1226954$ – регресії;

$$\bar{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-m} = 4,454473 - \text{залишків}.$$

Четвертий – F -критерій: $F = \frac{R^2/(m-1)}{(1-R^2)/(n-m)} = 27,54$.

П'ятий – рівень значущості F -критерію $\alpha = 5,76$; $E - 0,6 = 0,00000576$

Роглянемо оцінки параметрів моделі та перевіримо їх значущість.

Цей блок результатів містить 9 стовпчиків.

Перший і другий – назва та рівень оцінок параметрів моделі:

Y – переріз – $\hat{a}_0 = 60,14654$;

змінна X_1 – $\hat{a}_1 = 0,316353$;

змінна X_2 – $\hat{a}_2 = -1,93625$;

змінна X_3 – $\hat{a}_3 = -2,31555$;

змінна X_4 – $\hat{a}_4 = -0,181151$.

Третій стовпець – стандартні похибки оцінок параметрів моделі:

$S\hat{a}_0 = 1,76299$; $S\hat{a}_1 = 0,130773$; $S\hat{a}_2 = 0,498263$;

$S\hat{a}_3 = 2,309234$; $S\hat{a}_4 = 0,512519$.

Четвертий – t -критерій:

$t\hat{a}_0 = 5,588273$; $t\hat{a}_1 = 2,419098$; $t\hat{a}_2 = -3,88559$;

$t\hat{a}_3 = -1,00274$; $t\hat{a}_4 = -0,35416$.

П'ятий стовпець – рівень значущості:

$\alpha_0 = 0,000118$; $\alpha_1 = 0,032371$; $\alpha_2 = 0,002166$;

$\alpha_3 = 0,33578$; $\alpha_4 = 0,72367$.

Якщо рівень значущості менший за 0,05, то з імовірністю 0,95 можна стверджувати, що оцінені параметри – достовірні. Звідси параметри $\hat{a}_3$ і $\hat{a}_4$ – недостовірні.

Інші чотири стовпці з імовірністю 0,95 визначають верхні то нижні границі оцінок параметрів моделі, в яких вони існують.

Виведення залишків

У цьому блоці результатів наводяться розрахункові значення залежної змінної та залишки, які визначаються як відхилення розрахункових значень залежної змінної від фактичних.

Отже, економетрична модель продуктивності праці матиме такий вигляд:

1) у лінійній формі:

$$\hat{Y} = 60,154 + 0,31635\bar{X}_1 - 1,93605\bar{X}_2 - 2,31555\bar{X}_3 - 0,1811\bar{X}_4;$$

2) у степеневій формі (зауважимо, що ми її реалізуємо у лінійно-логарифмічній формі):

$$\ln \hat{Y} = 3,58197 + 0,223541 \ln \bar{X}_1 - 0,20464 \ln \bar{X}_2 - 0,16573 \ln \bar{X}_3 - 0,1815 \ln \bar{X}_4.$$

2. Оцінка достовірності моделі продуктивності праці

Використаємо чотири характеристики:

- 1) коефіцієнт детермінації R^2 ;
- 2) коефіцієнт кореляції R ;
- 3) критерій Фішера (F -критерій);
- 4) критерій Стюдента (t -критерій).

Коефіцієнти детермінації для лінійної і степеневі моделей відповідно дорівнюють:

- 1) $R^2 = 0,901782$, або 90,18%;
- 2) $R^2 = 0,902392$, або 90,24%.

Коефіцієнт детермінації для лінійної моделі показує, що варіація продуктивності праці на 90,18% визначається варіацією досліджуваних чинників (фондомісткістю продукції, коефіцієнтом плинності робочої сили, процентом втрат робочого часу і стажем роботи), а для степеневі – на 90,24%.

Для оцінювання достовірності параметрів економетричних моделей обчислюємо коефіцієнти кореляції за формулою: $R = \sqrt{R^2}$.

Так, для лінійної моделі: $R = (0,901782)^{1/2} = 0,9496$;

для степеневі моделі: $R = (0,902392)^{1/2} = 0,9499$.

Отже (щодо лінійної і степеневі моделей), між продуктивністю праці, з одного боку, та фондомісткістю продукції, коефіцієнтом плинності робочої сили, втратами робочого часу і стажем роботи, з іншого, існує досить тісний зв'язок.

Для того щоб оцінити достовірність економетричної моделі в цілому, обчислимо критерій Фішера (F -критерій) за формулою

$$F = \frac{R^2 / (m-1)}{(1-R^2) / (n-m)}.$$

Оскільки коефіцієнт детермінації для обох моделей продуктивності праці практично однаковий (0,902), то критерій Фішера

$$F = \frac{0,92 / 4}{(1-0,902) / 12} = \frac{0,2255}{0,0085} = 27,54.$$

Табличне значення F -критерію в разі $m-1=4$ і $n-m=12$ ступенів свободи і коли рівень значущості $\alpha = 0,001$, дорівнює 5,78.

Оскільки $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$, то гіпотеза про значущість зв'язку приймається й обидві моделі продуктивності праці є статистично значущими.

Зауважимо, що достовірність економетричної моделі може бути досягнута лише за рахунок окремих параметрів, а інші можуть бути не достовірними, тому доцільно оцінити значущість кожного параметра моделей. Для цього обчислимо t -критерії (критерії Стюдента) за формулою :

$$t_{\hat{a}_j} = \frac{|\hat{a}_j|}{S\hat{a}_j} \quad (11),$$

де $\hat{a}_j$ – оцінка параметра моделі; $S\hat{a}_j$ – стандартна похибка параметра.

Обчислимо спочатку t -критерії для лінійної моделі:

$$t_1 = \frac{|\hat{a}_1|}{S\hat{a}_1} = 0,316353 / 0,130773 = 2,4191;$$

$$t_2 = \frac{|\hat{a}_2|}{S\hat{a}_2} = 1,93605 / 0,498263 = 3,8856;$$

$$t_3 = \frac{|\hat{a}_3|}{S\hat{a}_3} = 2,31555 / 2,30923 = 1,0027;$$

$$t_4 = \frac{|\hat{a}_4|}{S\hat{a}_4} = 0,181151/0,512519 = 0,3542;$$

t-критерії для степеневих моделей:

$$t_1 = 0,223541/0,171551 = 1,30306;$$

$$t_2 = 0,20464/0,070138 = 2,91768;$$

$$t_3 = 0,16574/0,146282 = 1,13295;$$

$$t_4 = 0,058697/0,079979 = 0,73390.$$

Табличне значення *t*-критерію при $\alpha = 0,01$ і $n - m = 12$ дорівнює 2,179.

Оскільки в лінійній моделі для перших двох параметрів $t_{\text{факт}} > t_{\text{табл}}$, то ці параметри моделі продуктивності праці є значущими, а для a_3 і a_4 виконується нерівність $t_{\text{факт}} > t_{\text{табл}}$, тому вони – незначущі.

У степеневій моделі лише для $\hat{a}_2$ маємо $t_{\text{факт}} > t_{\text{табл}}$, що свідчить про достовірність цього параметра, а для інших оцінок параметрів ($\hat{a}_1, \hat{a}_3, \hat{a}_4$) $t_{\text{факт}} > t_{\text{табл}}$, тому ці параметри – недостовірні.

Згідно з обчисленими щойно характеристиками (коефіцієнти детермінації, кореляції, критерії Фішера та Стюдента), які використані для оцінювання достовірності моделі, можна зробити висновок, що побудовані нами моделі відображають тісний зв'язок між продуктивністю праці та чинниками, що впливають на неї.

Після того як побудовано модель продуктивності праці і доведено достовірність параметрів цієї моделі, виконаємо економіко-математичний аналіз моделі і покажемо методи прийняття рішень на базі моделі. Обчислимо для побудованих моделей (у лінійній та степеневій формах) основні економічні характеристики взаємозв'язку.

1. Середня ефективність впливу чинників на продуктивність праці.

Цей показник обчислюється за формулою :

$$\Pi_j = \frac{\bar{\hat{Y}}}{\bar{X}_j},$$

де $j = 1, 2, 3, 4$.

Для лінійної моделі:

$\bar{\hat{Y}} = 58,47062$, а для степеневі $\bar{\hat{Y}} = 58,21028$. Середні значення x_j відповідно дорівнюють $\bar{x}_1 = 73,88235$, $\bar{x}_2 = 7,58235$, $\bar{x}_3 = 3,694118$, $\bar{x}_4 = 10$.

Середня ефективність впливу чинників на продуктивність праці для лінійної і степеневі моделей відповідно дорівнюють:

$$\text{а) } \Pi_1 = \frac{\bar{\hat{Y}}}{\bar{X}_1} = 58,47062 / 73,88235 = 0,7914;$$

$$\Pi_2 = \frac{\bar{\hat{Y}}}{\bar{X}_2} = 58,47062 / 7,58235 = 7,7114;$$

$$\Pi_3 = \frac{\bar{\hat{Y}}}{\bar{X}_3} = 58,47062 / 3,694118 = 15,828;$$

$$\Pi_4 = \frac{\bar{\hat{Y}}}{\bar{X}_4} = 58,47062 / 10 = 5,8471;$$

$$\text{б) } \Pi_1 = \frac{\bar{\hat{Y}}}{\bar{X}_1} = 58,021028 / 73,88235 = 0,7878;$$

$$\Pi_2 = \frac{\bar{\hat{Y}}}{\bar{X}_2} = 58,021028 / 7,58235 = 7,6771;$$

$$\Pi_3 = \frac{\bar{\hat{Y}}}{\bar{X}_3} = 58,021028 / 3,694118 = 15,758;$$

$$\Pi_4 = \frac{\bar{\hat{Y}}}{\bar{X}_4} = 58,021028 / 10 = 5,821.$$

Отже, на базі обчислених характеристик середньої ефективності впливу чинників на продуктивність праці (як бачимо, ці характеристики для лінійної та степеневі моделей майже однакові) можна дійти висновку, що при зміні фондомісткості продукції на 1 гр. од / люд.-год продуктивність праці в середньому зміниться на 0,79 гр. од / люд.-год за умови, що решта чинників будуть константами. Аналогічно в разі зменшення коефіцієнта плинності робочої сили на 1% продуктивність праці в середньому збільшиться на 7,7 гр. од / люд.-год за умови, що решта чинників – константи; у разі зменшення рівня втрат робочого часу на одиницю продуктивність праці зросте в середньому на 15,8 гр. од / люд.-год за умови, що решта – константи; зі зміною

стажу роботи на 1 рік продуктивність праці в середньому зміниться на 5,8 гр. од / люд.-год за умови, що решта – константи.

2. Гранична ефективність зміни продуктивності праці в разі зміни кожного чинника на одиницю.

1) Гранична ефективність чинників у лінійній моделі характеризується її параметрами

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_j} = \hat{a}_j \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

$$\text{Зокрема, } \frac{\partial \hat{Y}}{\partial x_1} = \hat{a}_1 = 0,3164; \quad \frac{\partial \hat{Y}}{\partial x_2} = \hat{a}_2 = -1,9360;$$

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial x_3} = \hat{a}_3 = -2,3156; \quad \frac{\partial \hat{Y}}{\partial x_4} = \hat{a}_4 = -0,1815.$$

Гранична ефективність чинників показує, що коли фондомісткість продукції зміниться на 1 гр. од / люд.-год, то продуктивність праці гранично зросте на 0,3164 гр. од / люд.-год за умови, що решта чинників будуть сталими. Аналогічно, якщо на 1% зменшаться коефіцієнт плинності робочої сили та рівень витрат робочого часу, а стаж роботи на 1 рік, то продуктивність праці гранично зросте на 1,9360 гр. од / люд.-год, 2,3156 гр. од / люд.-год (зменшиться на 0,1815 гр. од / люд.-год). Ці співвідношення між продуктивністю і кожним із чинників виконуються також тоді, коли інші не змінюються.

2) Для степеневі моделі продуктивності праці цей показник буде різним для кожного спостереження, оскільки він залежить від значень x_j і обчислюється за такими формулами:

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_1} = \hat{a}_0 \hat{a}_1 X_1^{\hat{a}_1 - 1} X_2^{\hat{a}_2} X_3^{\hat{a}_3} X_4^{\hat{a}_4};$$

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_2} = \hat{a}_0 X_1^{\hat{a}_1} \hat{a}_2 X_2^{\hat{a}_2 - 1} X_3^{\hat{a}_3} X_4^{\hat{a}_4};$$

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_3} = \hat{a}_0 X_1^{\hat{a}_1} X_2^{\hat{a}_2} \hat{a}_3 X_3^{\hat{a}_3 - 1} X_4^{\hat{a}_4};$$

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_4} = \hat{a}_0 X_1^{\hat{a}_1} X_2^{\hat{a}_2} X_3^{\hat{a}_3} \hat{a}_4 X_4^{\hat{a}_4 - 1};$$

гранична ефективність чинників моделі відповідно дорівнює:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_1} &= 0,0173; & \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_2} &= -0,154; \\ \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_3} &= -0,256; & \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_4} &= 0,0335.\end{aligned}$$

Це означає, що зі збільшенням фондомісткості на одиницю граничний приріст продуктивності становить 0,0173 од., коли решта чинників не змінюються. Якщо плінність робочої сили зменшується на 1 %, то продуктивність праці зростає на 0,154 од., а якщо втрати робочого часу зменшуються на 1 %, то продуктивність праці зростає на 0,256 од. за незмінності інших чинників. Збільшення стажу працюючих на 1 рік сприятиме граничному зростанню продуктивності праці на 0,0335 од. Усі ці співвідношення між економічними показниками і продуктивністю праці можуть бути використані в управлінні рівнем продуктивності праці.

Порівнявши граничну ефективність чинників у лінійній і степеневій моделях, можна помітити, що вони різняться кількісно і за напрямом зміни (останнє стосується чинника «середній стаж працюючих»). У лінійній моделі збільшення стажу може зумовити падіння рівня продуктивності праці, що суперечить теоретичним уявленням про цей зв'язок.

У степеневій моделі збільшення стажу сприятиме певному зростанню продуктивності праці. Це може свідчити про те, що мультиплікативний закон формування продуктивності праці більше відповідає дійсності, ніж адитивний.

3. Коефіцієнти еластичності продуктивності праці, що обчислюються за формулою:

$$E_{Y/X_j} = \frac{\partial Y}{Y} : \frac{\partial X_j}{X_j} = \frac{\partial Y}{\partial X_j} : \frac{Y}{X_j}.$$

1) Для лінійної моделі цей показник подається так:

$$E_{Y/X_j} = a_j : \frac{\hat{Y}}{X_j}.$$

Отже, для лінійної моделі продуктивності праці коефіцієнти еластичності становлять відповідно:

$$E_{Y/X_1} = \hat{a}_1 : \frac{\hat{Y}}{X_1} = 0,316353 \cdot \frac{58,47062}{73,88235} = 0,3997;$$

$$E_{Y/X_2} = \hat{a}_2 : \frac{\hat{Y}}{X_2} = (-1,93609) : \frac{58,47062}{7,582353} = -0,2511;$$

$$E_{Y/X_3} = \hat{a}_3 : \frac{\hat{Y}}{X_3} = (-2,31559) : \frac{58,47062}{3,694118} = -0,1463;$$

$$E_{Y/X_4} = \hat{a}_4 : \frac{\hat{Y}}{X_4} = (-0,18151) : \frac{58,47062}{10} = -0,031.$$

Обчислені коефіцієнти еластичності для лінійної моделі показують, що коли фондомісткість продукції збільшується на 1 %, то продуктивність праці підвищується на 0,3997 % за умови, що решта чинників сталі, а якщо коефіцієнт плинності робочої сили, рівень втрати робочого часу і стаж зменшаться відповідно на 1 %, то продуктивність праці стосовно кожного чинника зросте на 0,2511 %, 0,1463 %, 0,031 % за умови, що решта залишаться незмінними.

2) Для степеневої моделі коефіцієнти еластичності сталі і дорівнюють параметрам моделі. Справді,

$$E_{Y/X_1} = \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_1} : \frac{\hat{Y}}{X_1} = \frac{\hat{a}_0 \hat{a}_1 X_1^{\hat{a}_1 - 1} X_2^{\hat{a}_2} X_3^{\hat{a}_3} X_4^{\hat{a}_4} X_1}{\hat{a}_0 X_1^{\hat{a}_1} X_2^{\hat{a}_2} X_3^{\hat{a}_3} X_4^{\hat{a}_4} X_1} = \hat{a}_1.$$

Звідси маємо: $E_{Y/X_1} = 0,2235$; $E_{Y/X_2} = -0,2046$; $E_{Y/X_3} = -0,1657$; $E_{Y/X_4} = 0,0587$.

Коефіцієнти еластичності (для степеневої моделі) показують, що коли перший і останній чинники (фондомісткість продукції і стаж роботи) збільшуються на 1 %, то продуктивність праці підвищується відповідно на 0,2235 % і 0,0587 % за умови, що інші чинники залишаться незмінними. У разі зменшення другого і третього чинників (коефіцієнт плинності та рівень втрат робочого часу) на 1 % продуктивність праці зростає відповідно на 0,2046 і 0,1657 %, а решта чинників лишаються сталими.

4. Загальна еластичність обчислюється за формулою:

$$A = \sum_{j=1}^m E_{Y/X_j}.$$

1) Для лінійної моделі:

$$A = \sum_{j=1}^m \left(\hat{a}_j : \frac{\hat{Y}}{X_j} \right) = 0,3997 - 0,2511 - 0,0463 - 0,031 = -0,0287;$$

2) для степеневі моделі:

$$A = \sum_j \hat{a}_j = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4 = 0,2235 - 0,2046 - 0,1657 + 0,0587 = -0,0881.$$

Обчислена сумарна еластичність показує, що коли всі враховані нами чинники збільшуються одночасно на 1 %, то продуктивність праці знижується для лінійної моделі на 0,0287 %, а для степеневі – на 0,0881 %.

Зміна всіх чинників одночасно, як засвідчує показник сумарної еластичності, для лінійної моделі менше впливає на зниження продуктивності праці, ніж сумарний вплив усіх чинників для степеневі моделі.

5. Норма заміщення чинників у моделі, яка встановлює співвідношення між окремими її чинниками за умови, що продуктивність праці не змінюється.

Норма заміщення чинників визначається за формулою:

$$h_{kj} = -\frac{\partial \hat{Y}}{X_j} : \frac{\partial \hat{Y}}{X_j}, \text{ де } j = 1, 2, 3, \dots, m; k = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Зокрема, для лінійної моделі

$$h_{12} = -\frac{\partial \hat{Y}}{X_2} : \frac{\partial \hat{Y}}{X_1} = -\hat{a}_2 : \hat{a}_1 = -\frac{(-1,93605)}{0,316353} = 6,1199;$$

$$h_{13} = -\hat{a}_3 / \hat{a}_1 = -(-2,31555) / 0,316353 = 7,3195;$$

$$h_{14} = -\hat{a}_4 / \hat{a}_1 = -(0,18151) / 0,316353 = 0,5738.$$

Обчислені показники свідчать, що в разі збільшення фондо-місткості продукції на 1 гр. од./ люд.-год коефіцієнт плинності робочої сили має збільшитися на 6,1199 % (за умови, що решта не зміняться) за незмінної

продуктивності праці. Аналогічно за цих самих умов у разі зміни рівня втрат робочого часу необхідно збільшити фондомісткість на 7,3195.

$$h_{21} = -\hat{a}_1/\hat{a}_2 = -(-0,316353)/(-1,93605) = 0,1634;$$

$$h_{23} = -\hat{a}_3/\hat{a}_2 = -(-2,31555)/(-0,93605) = -1,196;$$

$$h_{24} = -\hat{a}_4/\hat{a}_2 = -(-0,18151)/(-0,93605) = -0,0938.$$

Наприклад, якщо коефіцієнт плинності робочої сили збільшиться на 1 %, то фондомісткість продукції потрібно збільшити на 0,1634 гр. од. / люд.-год (що ж до рівня втрат робочого часу, то його в такому разі слід зменшити на 1,196; аналогічно потрібно зменшити й стаж роботи на 0,0938) за умови, що решта не змінюється за незмінного результату:

$$h_{31} = -\hat{a}_1/\hat{a}_3 = -(-0,316353)/(-2,31555) = 0,1366;$$

$$h_{32} = -\hat{a}_2/\hat{a}_3 = -(-1,93605)/(-2,31555) = -0,8361;$$

$$h_{34} = -\hat{a}_4/\hat{a}_3 = -(-0,18151)/(-2,31555) = -0,0784.$$

Зі збільшенням рівня кваліфікації на одиницю потрібно фондомісткість збільшити на 0,1366 гр. од. / люд.-год (відповідно коефіцієнт плинності та стаж зменшити на 0,8361 % і 0,0784 року), якщо решта чинників та продуктивність праці залишаться незмінними.

$$h_{41} = -\hat{a}_1/\hat{a}_4 = -(-0,316353)/(-0,18151) = 1,7429;$$

$$h_{42} = -\hat{a}_2/\hat{a}_4 = -(-1,93605)/(-0,18151) = -10,6664;$$

$$h_{43} = -\hat{a}_3/\hat{a}_4 = -(-2,31555)/(-0,18151) = -12,7571.$$

Отже, якщо збільшити стаж роботи на 1 рік, необхідно фондомісткість збільшити на 1,7429 гр. од. / люд.-год, а коефіцієнт плинності знизити на 10,6664 %. Що ж до рівня втрат робочого часу, то його треба також зменшити на 12,7571, коли решта чинників (для кожного з трьох випадків їх набір, звичайно, буде різним) не змінюються за незмінного результату продуктивності праці.

Покажемо, як обчислюються норми заміщення чинників для степеневі моделі:

$$h_{21} = -\frac{\hat{a}_1}{\hat{a}_2} \frac{\bar{X}_2}{\bar{X}_1} = 0,11; \quad h_{23} = -\frac{\hat{a}_3}{\hat{a}_2} \frac{\bar{X}_2}{\bar{X}_3} = -1,67;$$

$$h_{24} = -\frac{\hat{a}_4}{\hat{a}_2} \cdot \frac{\bar{X}_2}{\bar{X}_4} = 0,22.$$

Аналогічно можна обчислити решту співвідношень між чинниками за умови, що продуктивність праці є незмінною. Тлумачаться вони так само, як і в лінійній моделі, але кількісні співвідношення для різних моделей різні. Норма заміщення чинників, як і решта характеристик взаємозв'язку, застосовується в управлінні рівнем продуктивності праці.

Оскільки прийняття рішень завжди пов'язане з оцінюванням прогностного (очікуваного) значення, то дуже важливо визначити прогностні якості моделі. Для цього з 20-ти спостережень вихідної інформації для побудови моделі продуктивності праці використано 17. Останні три спостереження використаємо, щоб оцінити якість прогнозу на основі моделі.

Для останніх трьох спостережень підставимо значення чинників в отримані моделі продуктивності праці і знайдемо значення продуктивності праці.

На основі *лінійної моделі*:

$$\hat{Y}_{18} = 65,49, \quad \hat{Y}_{19} = 66,30,$$

$$\hat{Y}_{20} = 69,38.$$

На основі *степеневої моделі*:

$$\hat{Y}_{18} = 66,65, \quad \hat{Y}_{19} = 66,82,$$

$$\hat{Y}_{20} = 72,20.$$

1. Визначимо відхилення між фактичними і розрахунковими значеннями продуктивності праці.

Лінійна модель:

$$u_{18} = Y_{18} - \hat{Y}_{18} = 66 - 65,49 = 0,5;$$

$$u_{19} = Y_{19} - \hat{Y}_{19} = 68 - 66,30 = 1,70;$$

$$u_{20} = Y_{20} - \hat{Y}_{20} = 70 - 69,38 = 0,62;$$

степенева модель:

$$u_{18} = 66 - 66,65 = -0,65;$$

$$u_{19} = 68 - 66,82 = 1,18;$$

$$u_{20} = 70 - 72,20 = -2,20.$$

2. Знайдемо похибки прогнозу.

а) середньоарифметична абсолютна похибка:

$$MAE = \frac{|u_{18}| + |u_{19}| + |u_{20}|}{3}.$$

Лінійна модель: $MAE = 0,94$; *степенева модель:* $MAE = 1,34$;

б) середньоквадратична похибка прогнозу:

$$MSE = ((u_{18})^2 + (u_{19})^2 + (u_{20})^2) / 3.$$

Лінійна модель: $MSE = 1,17$; *степенева модель:* $MSE = 2,22$;

в) відносна похибка прогнозу:

$$MAPE = \frac{|u_{18}| + |u_{19}| + |u_{20}|}{Y_{18} + Y_{19} + Y_{20}} \cdot \frac{1}{3} 100,$$

лінійна модель: $MAPE = 1,38 \%$; *степенева модель:* $MAPE = 1,96 \%$;

г) коефіцієнт невідповідності Тейла:

$$K_T = \frac{\sqrt{\frac{(u_{18})^2 + (u_{19})^2 + (u_{20})^2}{3}}}{\sqrt{\frac{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2}{3}} + \sqrt{\frac{\hat{Y}_1^2 + \hat{Y}_2^2 + \hat{Y}_3^2}{3}}};$$

лінійна модель: $K_T = 1,08 / (68,02 + 67,01) = 1,08 / 135,1 = 0,008$;

степенева модель: $K_T = 1,49 / (68,02 + 68,60) = 1,49 / 136,62 = 0,011$.

Як свідчать похибки прогнозу, моделі продуктивності праці (лінійна і степенева) мають великі прогностні можливості – абсолютні та відносні похибки незначні за рівнем і свідчать про добру апроксимацію моделі. Коефіцієнти невідповідності Тейла наближаються до нуля, що свідчить також про якісний прогноз. Порівнявши кожен з похибок для лінійної та степеневих моделей, можна помітити, що кожна з них має дещо нижчий рівень для лінійної моделі, але це не означає, що вона має істотні переваги перед

степеневою, оскільки лінійна модель дає обернений зв'язок між стажем і продуктивністю праці, що суперечить теоретичним уявленням про цей зв'язок.

3. Визначимо прогноз продуктивності праці на наступні чотири місяці року, задавши очікуване значення чинників на цей період.

Лінійна модель:

$$Y_{21} = 66,27$$

$$Y_{22} = 64,40$$

$$Y_{23} = 64,15$$

$$Y_{24} = 62,51$$

Степенева модель:

$$Y_{21} = 66,96$$

$$Y_{22} = 63,95$$

$$Y_{23} = 63,77$$

$$Y_{24} = 61,60$$

Визначимо відхилення очікуваного рівня продуктивності праці, отриманого на базі лінійної та степеневі моделей:

$$u^{21}_{\text{пр}} = 66,96 - 66,27 = 0,69,$$

$$u^{22}_{\text{пр}} = 63,95 - 64,40 = -0,45,$$

$$u^{23}_{\text{пр}} = 63,77 - 64,15 = -0,42,$$

$$u^{24}_{\text{пр}} = 61,60 - 62,51 = -0,91.$$

Як свідчать наведені відхилення, прогнозні рівні продуктивності праці, що їх здобуто на основі лінійної та степеневі моделей, різняться неістотно. Прогнозний рівень продуктивності праці може бути основою для прийняття рішень стосовно зміни цього показника на останній квартал року.

Наведений приклад виробничої функції показує, що ця економетрична модель дає змогу досить широко проаналізувати виробничу діяльність, визначити шляхи її вдосконалення з метою підвищення ефективності. Обґрунтованість такого аналізу повністю залежить від достовірності економетричної моделі, від того, наскільки вона адекватна реальному процесу.

[До змісту](#)