ЛЕКЦІЯ №1

Похідна функції однієї змінної

1. Означення похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку $(a;\ b)$. Візьмемо значення $x \in (a;b)$ і надамо аргументу приросту Δx. Тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Розглянемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Якщо границя (1) існує і скінченна, вона називається *похідною функції* $y = f(x)$ *за змінною* x і позначається

$$y', \quad y'_x, \quad \frac{dy}{dx}, \quad f'(x), \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ *за аргументом* x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* цієї функції.

Користуючись означенням похідної, знайти похідні функцій.

Приклад. Функція $y = x^2$. Знайти похідну в точках $x = 3$ і $x = -4$.

● Надамо аргументу x приросту Δx, тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$.

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, відшукаємо границю $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$.

Похідна в точці $x = 3$ $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$, а похідна при $x = -4$ буде $f'(-4) = 2 \cdot (-4) = -8$.

Приклад. $y = C$, де $c = \text{const}$.

● Надавши аргументу x приросту Δx, дістанемо приріст функції $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0$. Тепер знайдемо границю відношення $\Delta y / \Delta x$ при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 \text{ , тобто } C' = 0$$

Приклад. $y = \sin x$.

● Користуючись відомою з тригонометрії формулою

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

знайдемо приріст функції у точці x і обчислимо границю:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x;$$

$(\sin x)' = \cos x$.

Аналогічно можна дістати: $(\cos x)' = -\sin x$.

Приклад. $y = e^x$.

● Для цієї функції маємо

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x\cdot 1 = e^x,$$

тобто $(e^x)' = e^x$.

2. Геометричний зміст похідної

Означення. Дотичною до кривої L у точці M називається граничне положення MN січної MM_1 при прямуванні точки M_1 по кривій L до точки M (рис. 1).

Нехай крива, задана рівнянням $y = f(x)$, має дотичну в точці M (x, y). Позначимо (рис. 2) кутовий коефіцієнт дотичної MN: $k = \operatorname{tg}\varphi$. Надамо в точці x приросту Δx, тоді ордината y набуде приросту Δy.

З ΔMAM_1 випливає, що $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$. Коли $\Delta x \to 0$, то $M_1 \to M$, $\alpha \to \varphi$ і січна прямує до положення дотичної MN.

Таким чином, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi = k$.

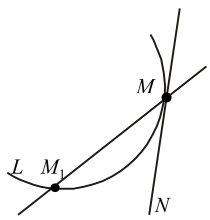

Рис. 1

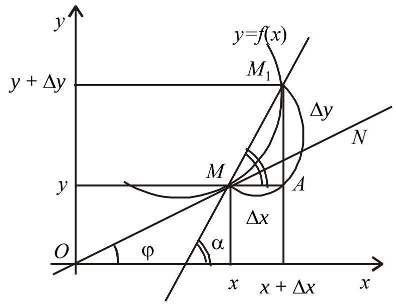

Рис. 2

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, то $f'(x) = k$, тобто похідна $f'(x)$ чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції у точці з абсцисою x. У цьому полягає геометричний зміст похідної.

3. Механічний зміст похідної

Припустимо, що точка M рухається прямолінійно нерівномірно по деякій прямій лінії, яку візьмемо за вісь Ox (рис. 3).

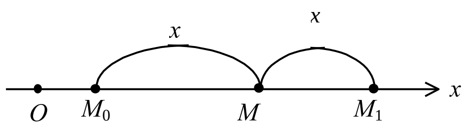

Рис. 3

Рух точки відбувається за законом $x = f(t)$, де x — шлях; t — час. Знайдемо швидкість точки M у даний момент часу t (миттєва швидкість).

Нехай точка M у момент t перебувала на відстані x від початкової точки M_0, а в момент часу $t+\Delta t$ точка опинилася на відстані $x+\Delta x$ від початкової точки й зайняла положення M_1. Отже, час t набув приросту Δt, а шлях x — приросту $\Delta x = f(\Delta t + t) - f(t)$. Середня швидкість руху точки M за час Δt описується формулою $V_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Якщо точка M рухається рівномірно, то $V_{\text{ср}}$ є величина стала, і її беруть за швидкість точки. Для нерівномірного руху точки очевидно, що для достатньо близьких значень Δt до нуля середня швидкість точки M буде близька до її швидкості у момент часу t. Тому за точне значення швидкості точки M у момент часу t беруть величину

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

яка є швидкістю зміни функції $x = f(t)$ у точці. У цьому полягає механічний зміст похідної.

4. Залежність між неперервністю і диференційовністю функції

Функція $y = f(x)$ є *неперервною в точці* x, якщо у цій точці $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *диференційовною в точці*, якщо у цій точці вона має похідну, тобто якщо існує кінцева границя:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *диференційовною на інтервалі* $(a; b)$, якщо вона диференційовна в кожній точці даного інтервалу.

Зв'язок між неперервністю і диференційовністю функції встановлює теорема.

***Теорема.* Якщо функція диференційовна в деякій точці, то у цій точці функція неперервна.**

Обернене твердження неправильне: для неперервної функції може не існувати похідної.

Справді, нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x. Запишемо тотожність $\Delta y = \dfrac{\Delta y \cdot \Delta x}{\Delta x} (\Delta x \neq 0)$, звідси $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y \cdot \Delta x}{\Delta x} = \; = f'(x) \cdot 0 = 0$.

Таким чином, функція $y = f(x)$ неперервна в точці x.

Наслідок. Якщо функція розривна в деякій точці, то вона не має похідної в цій точці.

Прикладом неперервної функції, що не має похідної в одній точці, є функція $y = |x|$ (рис. 5). Ця функція неперервна при $x = 0$, але не диференційовна для цього значення, оскільки в точці з абсцисою $x = 0$ не існує дотичної до графіка функції.

Таким чином, необхідною умовою

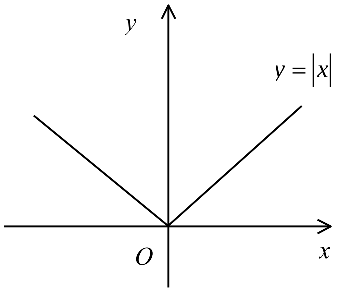

Рис. 5

диференційовності функції $y = f(x)$ у точці x є її неперервність у цій точці.

5. Основні правила диференціювання

Теорема 1. **Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо $y = c$, де c = const, то $y' = 0$.**

Теорема 2. **Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості диференційовних функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій: $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$.**

Теорема 3. **Похідна добутку двох диференційовних функцій дорівнює добутку першого множника на похідну другого плюс добуток другого множника на похідну першого:**

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Теорема 4. **Сталий множник можна виносити за знак похідної:**

$$(cu)' = cu', \text{ де } c = \text{const}.$$

Теорема 5. **Якщо чисельник і знаменник дробу диференційовні функції (знаменник не перетворюється в нуль), то похідна дробу також дорівнює дробу, чисельник якого є різницею добутків знаменника на похідну чисельника і чисельника на похідну знаменника, а знаменник є квадратом знаменника початкового дробу $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.**

Зауваження. Похідну від функції $y = \frac{u(x)}{c}$, де $c = \text{const}$, зручно обчислювати як похідну від добутку сталої величини $\frac{1}{c}$ на функцію $u(x)$:

$$\left(\frac{u(x)}{c}\right)' = \left(\frac{1}{c}u(x)\right)' = \frac{1}{c}u'(x).$$

Приклад. Обчислити похідну для функції $y = \operatorname{tg} x$.

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким чином, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Похідна складної функції. Нехай $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, тобто $y = f(\varphi(x))$. Функція $f(u)$ називається *зовнішньою*, а функція $\varphi(x)$ — *внутрішньою*, або *проміжним аргументом*.

Теорема 6. **Якщо $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ — диференційовні функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.**

Таким чином, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.

6. Похідні від основних елементарних функцій

За аналогією з попередніми прикладами можна дістати похідні від основних елементарних функцій:

1. $(x)' = 1$;
2. $\left(x^m\right)' = m x^{m-1}$;
3. $\left(e^x\right)' = e^x$;
4. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$;
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Продиференціювати подані далі функції.

Приклад. $y = 3x^2 - \sqrt[3]{x} + \ln x$.

● Дана функція є алгебраїчною сумою функцій, тому використовуємо теорему 2:

$$y' = \left(3x^2\right)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (\ln x)'.$$

У здобутому виразі перший доданок алгебраїчної суми є добуток сталої величини на степеневу функцію ⇒ — застосуємо до нього теорему 4 і формулу (2) таблиці похідних; другий — ірраціональна функція з показником $m = \frac{1}{3}$ — застосуємо формулу (2) таблиці похідних; третій — логарифмічна функція з основою e ⇒ — використаємо формулу (5):

$$y' = 3 \cdot 2x - \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} = 6x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x}.$$

Приклад. $y = 6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}$.

● Задана функція складна: зовнішня — показникова функція з основою 6, внутрішня для неї — обернена тригонометрична. Обернена тригонометрична, у свою чергу, є складною, для якої внутрішня функція — алгебраїчна сума $x^5 - 4$. Для суми аргументом (скінченним) є x.

Таким чином, задана функція є суперпозицією трьох функцій.

При диференціюванні послідовно застосовуємо два рази теорему 6:

$$y = \left[6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}\right]'_{\arcsin\left(x^3-4\right)} \left[\arcsin\left(x^5-4\right)\right]'_x =$$

$$= \left[6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}\right]'_{\arcsin\left(x^5-4\right)} \left[\arcsin\left(x^5-4\right)\right]'_{x^5-4} \left[x^5-4\right]'_x.$$

У цьому виразі знизу біля кожної квадратної дужки вказано аргумент, за яким слід диференціювати функцію, взяту в дужки.

Тепер послідовно скористаємося формулами (4), (11), (2) таблиці похідних та теоремами 1, 2. Дістанемо:

$$y' = 6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}\ln 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(x^5-4\right)^2}} \cdot 5x^4 .$$

Взагалі використані правила та формули не фіксують, а записують кінцевий результат їх застосування.