**ЛЕКЦІЯ№4**

# Монотонність та екстремум функції. Загальна схема дослідження функції



## 1. Зростання та спадання функцій

Нагадаємо: функція $f(x)$ називається *зростаючою на проміжку*, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (якщо $x_2 > x_1$ то $f(x_2) > f(x_1)$); функція *спадна* на проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції (якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$).

***Теорема 1*** **(необхідна умова зростання (спадання) функції):**

**1. Якщо диференційовна функція зростає на деякому проміжку, то похідна цієї функції невід'ємна на цьому проміжку.**

**2. Якщо диференційовна функція спадає на деякому проміжку, то похідна цієї функції недодатна на цьому проміжку.**

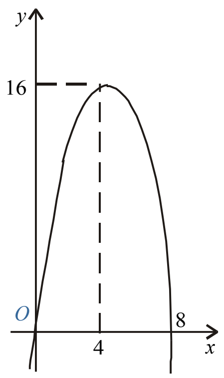



Рис. 1

***Теорема 2*** **(достатня умова зростання (спадання) функції):**

**1. Якщо похідна диференційовної функції додатна всередині деякого проміжку, то функція зростає на цьому проміжку.**

**2. Якщо похідна диференційовної функції від'ємна всередині проміжку, то функція спадає на цьому проміжку.**

**Приклад.** Знайти проміжки зростання та спадання функції $y = 8x - x^2$.

Область визначення функції — уся числова вісь $-\infty < x < +\infty$. Знайдемо похідну $y' = 8 - 2x$. Функція диференційовна на проміжку $-\infty < x < +\infty$.

Для визначення проміжку зростання функції розв'яжемо нерівність $8 - 2x > 0$, $x < 4$, тобто функція зростає на проміжку $-\infty < x < 4$.

При визначенні проміжку спадання функції (рис. 1) маємо $8 - 2x < 0$, тобто $4 < x < +\infty$.

## 2. Екстремуми функцій

***Означення.*** При значенні $x_1$ аргументу $x$ *функція* $f(x)$ *має максимум* $f(x_1)$, якщо в деякому околі точки $x_1$ виконується нерівність (рис. 2) $f(x_1) > f(x) (x \neq x_1)$.

Аналогічно: при значенні $x_2$ аргументу *x функція* $f(x)$ *має мінімум* $f(x_2)$, якщо в деякому околі точки $x_2$ має місце нерівність (див. рис. 4.9) $f(x_2) < f(x)(x \neq x_2)$.

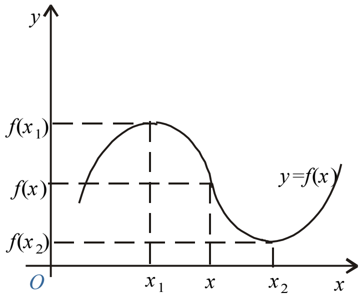



Рис. 2

Максимум або мінімум функції називається екстремумом функції, а ті значення аргументу, при яких досягаються екстремуми функції, називаються точками екстремуму функції (відповідно точками максимуму або мінімуму функції).

Екстремум функції, у загальному випадку, має локальний характер — це найбільше або найменше значення функції порівняно з ближніми її значеннями.

**Необхідна умова екстремуму функції. *Теорема.* У точці екстремуму диференційовної функції похідна її дорівнює нулю:**

$$\boldsymbol{f'(x_2) = 0.} \qquad (1)$$

Геометрична умова (4.19) означає, що в точці екстремуму диференційовної функції $y = f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі $Ox$ (рис. 3).

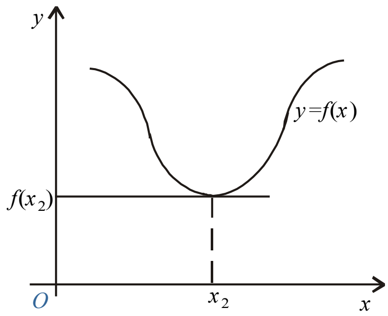



Рис. 3

*Наслідок.* **Неперервна функція може мати екстремум тільки в тих точках, де похідна функції дорівнює нулю або не існує.**

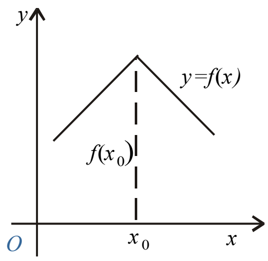



Рис. 4

Справді, якщо в точці $x_0$ екстремуму функції $f(x)$ існує похідна $f'(x_0)$, то, згідно з даною теоремою, ця похідна дорівнює нулю.

Те, що в точці екстремуму неперервної функції похідна може не існувати, показує приклад функції, графік якої має форму «ламаної» (рис. 4).

Ті значення аргументу $x$, які для заданої функції перетворюють на нуль її похідну $f'(x)$ або для якої похідна $f'(x)$ не існує (наприклад, перетворюється на нескінченність), називаються *критичними значеннями аргументу* (*критичними точками*).

**Достатні умови екстремуму функції.** Із того, що $f'(x_0)=0$, не випливає, що функція $f(x)$ має екстремум при $x=x_0$.

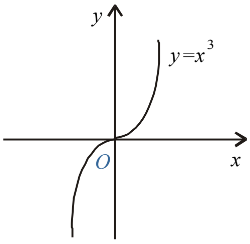



Рис. 5

Наприклад, нехай $f(x)=x^3$. Тоді $f'(x)=3x^2$ і $f'(0)=0$, однак значення $f(0)=0$ не є екстремумом даної функції, оскільки різниця $f(x)-f(0)$ змінює знак при зміні знаку аргументу $x$ (рис. 5).

Отже, не для будь-якого критичного значення аргументу функції $f(x)$ має місце екстремум цієї функції. Через це поряд з необхідною умовою існують достатні умови існування екстремуму функції.

***Теорема 1 (перше правило).***

**Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі, в якому міститься критична точка $x_0$, і диференційовна в усіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки $x_0$). Якщо при переході зліва направо через цю точку похідна:**

**1) змінює знак з «+» на «–», то при $x = x_0$ функція має максимум;**

**2) змінює знак «–» на «+», то функція має у цій точці мінімум;**

**3) не змінює свого знака, то функція в точці $x = x_0$ екстремуму не має.**

*Геометрична ілюстрація теореми 1* (рис. 6). Нехай у точці $x = x_1$ маємо $f'(x_1)=0$ і для всіх $x$, достатньо близьких до точки $x_1$, виконуються нерівності

$$\begin{cases} f'(x)>0 \text{ при } x<x_1; \\ f'(x)<0 \text{ при } x>x_1. \end{cases}$$

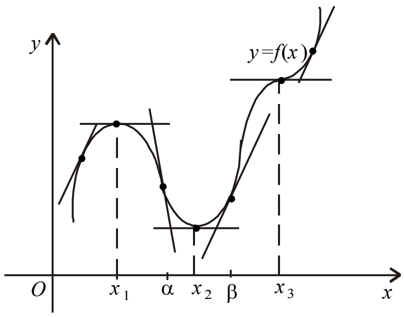



Рис. 6

Тоді при $x<x_1$ дотична до кривої утворює з віссю $Ox$ гострий кут — функція зростає, а при $x>x_1$ дотична утворює з віссю $Ox$ тупий кут — функція спадає; при $x = x_1$ функція переходить від зростання до спадання, тобто має максимум.

Якщо в точці $x_2$ маємо $f'(x_2)=0$ і для всіх значень $x$, достатньо близьких до точки $x_2$, виконуються нерівності

$$\begin{cases} f'(x)>0, \ \ x>x_2, \\ f'(x)<0, \ \ x<x_2, \end{cases}$$

то при $x<x_2$ дотична до кривої утворює з віссю $Ox$ тупий кут — функція спадає, а при $x>x_2$ дотична до кривої утворює гострий кут — функція зростає. При $x = x_2$ функція переходить від спадання до зростання, тобто має мінімум.

Якщо при $x = x_3$ маємо $f'(x_3)=0$ і для всіх значень $x$, достатньо близьких до $x_3$, виконуються нерівності $f'(x)>0$ при $x<x_3$; $f'(x)>0$ при $x>x_3$, то функція зростає як при $x<x_3$, так і при $x>x_3$. Звідси при $x = x_3$ функція не має ні максимуму, ні мінімуму.

*Зауваження.* На основі даної теореми можна сформулювати таке правило для дослідження неперервної функції $y=f(x)$ на максимум і мінімум.

1. Знаходимо першу похідну функції, тобто $f'(x)$.

2. Обчислюємо критичні значення аргументу $x$ (критичні точки), для цього:

а) прирівнюємо першу похідну до нуля і знаходимо дійсні корені здобутого рівняння $f'(x)=0$;

б) знаходимо значення $x$, для яких похідна $f'(x)$ має розрив.

3. Досліджуємо знак похідної ліворуч і праворуч від критичної точки. Оскільки знак похідної залишається сталим в інтервалі між двома критичними точками, для дослідження знака похідної ліворуч і праворуч, наприклад від критичної точки $x_2$ (див. рис. 6), досить визначити знак похідної в точках $\alpha$ і $\beta$ $(x_1<\alpha<x_2<\beta<x_3)$, де $x_1$ і $x_3$ — найближчі критичні точки).

4. Обчислюємо значення функції $f(x)$ у кожній критичній точці.

Таким чином, маємо таке схематичне зображення можливих випадків:

*Таблиця 1*

<table>
<tr><td>$x$ (досліджуваний інтервал змінної)</td><td>$(x_1, x_2)$</td><td>$x_2$</td><td>$(x_2, x_3)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f'(x)$ (знак похідної в досліджуваному інтервалі)</td><td>+</td><td rowspan="3">$f(x_2) = 0$<br>або не існує</td><td>–</td></tr>
<tr><td>–</td><td>+</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$f(x)$ (характер поводження функції)</td><td>+ (–)</td><td>+ (–)</td></tr>
<tr><td>$\nearrow$<br>Функція зростає</td><td>Точка максимуму</td><td>$\searrow$<br>Функція спадає</td></tr>
<tr><td>Функція спадає<br>$\searrow$</td><td>Точка мінімуму</td><td>Функція зростає $\nearrow$</td></tr>
<tr><td>Функція зростає (спадає)<br>$\nearrow$ ($\searrow$)</td><td>Немає ні максимуму, ні мінімуму</td><td>Функція зростає (спадає)<br>$\nearrow$ ($\searrow$)</td></tr>
</table>

**Приклад.** Дослідити на максимум і мінімум функцію $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

● 1. Знаходимо першу похідну $y'=x^2-4x+3$.

2. Знаходимо дійсні корені рівняння $x^2-4x+3=0\,(f'(x)=0)$. Звідки $x_1=1,\ x_2=3$.

Похідна скрізь неперервна. Значить, інших критичних точок для заданої функції не існує.

3. Досліджуємо критичні значення. Для цього область визначення функції $(-\infty, +\infty)$ здобутими критичними точками розбиваємо на три інтервали $(-\infty, 1)$, (1, 3), $(3, +\infty)$.

Виберемо в кожному інтервалі по одній точці і обчислимо значення похідної в цих точках:

$$x = 0 \in (-\infty, 1),\ y'(0) = 3 > 0;$$

$$x = 2 \in (1, 3),\ y'(2) = 2^2 - 4\cdot 2 + 3 = -1 < 0;$$

$$x = 4 \in (3, +\infty),\ y'(4) = 4^2 - 4\cdot 4 + 3 = 11 > 0.$$

Знак похідної на кожному з трьох інтервалів збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного інтервалу (табл. 2).

З таблиці видно: при переході (зліва направо) через значення $x$ = 1 похідна змінює знак з «+» на «–». Звідси, при $x$ = 1 функція має максимум:

$$y_{\max}(1) = \frac{1^3}{3} - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 = \frac{7}{3}.$$

*Таблиця 2*

| $x$ | $(-\infty, 1)$ | 1 | (1, 3) | 3 | $(3, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $y$ | ↗ | $y_{\max}(1) = \frac{7}{3}$ | ↘ | $y_{\min}(3) = 1$ | ↗ |

При переході через значення $x$ = 3 похідна змінює знак з «–» на «+». Звідси, при $x$ = 3 функція має мінімум:

$$Y_{\min}(3) = \frac{3^3}{3} - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1 = 1.$$

На інтервалі:

1) $(-\infty, 1)$ — функція зростає;

2) (1, 3) — спадає;

3) $(3, +\infty)$ — зростає.

Крім того,

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1\right) = \pm\infty.$$

На основі проведеного дослідження будуємо графік функції (рис. 7).

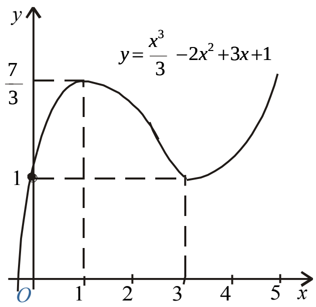



Рис. 7

***Теорема 2** (друге правило).* **Якщо для диференційовної функції $f(x)$ у деякій точці $x_0$ її перша похідна $f'(x)$ дорівнює нулю, а друга похідна $f''(x)$ існує й відмінна від нуля, тобто $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то:**

**1) якщо друга похідна $f''(x_0) > 0$, то в точці $x_0$ функція $f(x)$ має мінімум;**

**2) якщо $f''(x_0) < 0$ — максимум;**

**3) якщо $f''(x_0) = 0$ — питання залишається відкритим, і для його розв'язання треба застосувати перше правило.**

*Зауваження.* Для критичних точок, в яких похідна функції не існує або дорівнює нескінченності, друге правило не застосовується.

**Приклад.** За допомогою другої похідної дослідити на екстремум функцію $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

● Перша похідна цієї функції $y' = x^2 - 4x + 3$ перетворюється в нуль у точках $x = 1$ і $x = 3$ (див. попередній приклад).

Друга похідна $y'' = 2x - 4$:

а) при $x = 1$ $y''(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2 < 0$, звідси в точці $x = 1$ функція має максимум $y_{\max}(1) = \frac{7}{3}$;

б) при $x = 3$ $y''(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 > 0$, тобто в точці $x = 3$ функція має мінімум $Y_{\min}(3) = 1$ (див. рис. 7).

## 3. Опуклість і вгнутість кривої. Точка перегину

*Означення.* Крива на проміжку називається *опуклою* (*угнутою*), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) будь-якої її дотичної на цьому проміжку.

З графіка функції $y = f(x)$ (рис. 8) бачимо: крива $y = f(x)$ є опуклою на проміжку $(a, c)$ і вгнутою на проміжку $(c, b)$.

*Означення.* Точка, яка відокремлює опуклу частину кривої від вгнутої, називається *точкою перегину*. На рис. 8 точка $M$ — точка перегину.

Наведемо дві теореми.

***Теорема 1.*** **1) Якщо в усіх точках проміжку $(c, b)$ для функції $y = f(x)$ друга її похідна додатна $(f''(x) > 0)$, то графік функції вгнутий.**

**2) Якщо в усіх точках проміжку $(a, c)$ друга похідна від'ємна $(f''(x) < 0)$, то графік функції випуклий.**

***Теорема 2.*** **Якщо для функції $y = f(x)$ друга похідна її $f''(x)$ у деякій точці $x_0$ перетворюється на нуль або не існує й при переході через цю точку змінює свій знак на обернений, то точка $M(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції.**

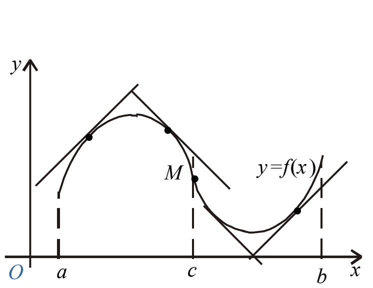



Рис. 8

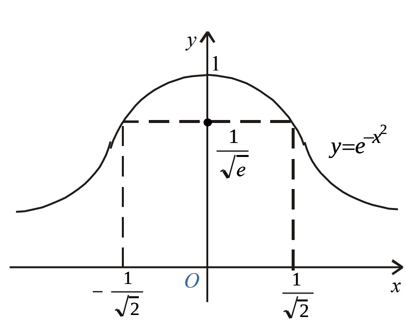


Рис.9

*Зауваження.* Якщо у точці $x_0$ друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, але при переході через цю точку $f''(x)$ не змінює свого знака, то точка $M(x_0,\ f(x_0))$ не є точкою перегину.

**Приклад.** Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y = e^{-x^2}$.

● Маємо $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

Друга похідна $y''$ перетворюється в нуль, коли

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0\text{, звідки } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При переході через точки $x_1$ і $x_2$ друга похідна змінює знак. Таким чином, точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції (рис. 9).

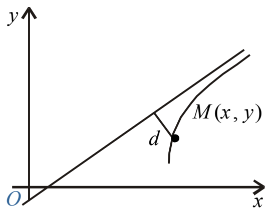
Результати дослідження заносимо в табл. 3.

*Таблиця 3*

| $x$ | $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $y$ | $\cup$ | Перег ин | $\cap$ | Переги н | $\cup$ |

Із цієї таблиці бачимо, що графік функції на інтервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ вгнутий, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — опуклий.

## 4. Асимптоти




Змінна точка $M$ рухається по кривій у нескінченність, ко-
ли відстань від цієї точки до початку координат необмежено зростає.

Рис.10

*Означення.* Пряма називається *асимптотою кривої*, якщо відстань $d$ від змінної точки $M$ кривої до цієї прямої при віддаленні точки $M$ у нескінченність прямує до нуля (рис.10). Асимптоти бувають *вертикальні* й *похилі*.

**Вертикальні асимптоти.** Якщо

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty\text{, або } \lim_{x\to a-0} f(x) = \infty,$$

або $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою для графіка функції $y = f(x)$.

**Приклад.** Крива $y=\dfrac{2}{x-5}$ має вертикальну асимптоту $x = 5$, оскільки $\lim\limits_{x\to 5\pm 0} y=\pm\infty$ (рис. 11).

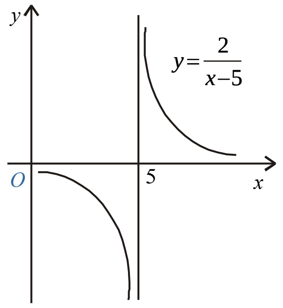



Рис. 11

**Похилі асимптоти.** Нехай крива $y=f(x)$ має похилу асимптоту $y=kx+b$, тоді

$$\left.\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Якщо хоча б одна з границь (2) не існує, то крива похилих асимптот у відповідній напівплощині не має.

**Приклад.** Визначити асимптоти кривої $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

1. Оскільки

$$\lim_{x\to\pm 0} y=\lim_{x\to\pm 0}\frac{x^2+2x-1}{x}=\lim_{x\to\pm 0}\left(x+2-\frac{1}{x}\right)=\mp\infty,$$

то пряма $x = 0$ (вісь $Ox$) є вертикальною асимптотою.

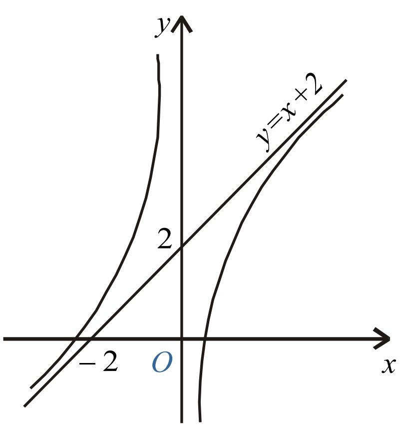
2. Нехай похила асимптота має рівняння $y=kx+b$, тоді

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2.$$

Отже, пряма $y=x+2$ — похила асимптота для графіка функції (рис. 12).

Рис. 12



# 5. План дослідження функцій і побудови їхніх графіків

При дослідженні функцій треба:
1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність (непарність) і періодичність функції.
3. Знайти точки розриву функції та їх характер.
4. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Знайти точки екстремуму та обчислити значення функції у цих точках.
6. Визначити інтервали зростання й спадання функції.
7. Знайти точки перегину, інтервали випуклості й вгнутості.
8. Знайти асимптоти.
9. Знайти граничні значення функції, коли *x* прямує до граничних точок області визначення.

Графік функції будують за характерними точками й лініями, отриманими у результаті дослідження. Якщо їх недостатньо, знаходять допоміжні точки для деяких конкретних значень аргументу.

**Приклад.** Дослідити функцію $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

● 1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях *x* за винятком значення *x* = 1. Звідси її область визначення $\{-\infty<x<1;\ 1<x<+\infty\}$.

2. Точка *x* = 1 є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x\to1\pm0} y=\lim_{x\to1\pm0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to1\pm0}(x-1)^2}=+\infty.$$

Як ліворуч, так і праворуч точки *x* = 1 маємо нескінченний розрив.

Точка *x* = 1 — точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма *x* = 1 є вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат: з віссю *Ox*: *y* = 0, $\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0,\ 2x-1=0,\ x=\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2};\ 0\right)$; з віссю *Oy*: *x* = 0, $y=\frac{-1}{1}=-1,\ (0;\ -1)$.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у табл. 4.3:

$$y'=\frac{2(x-1)^2-2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4}=-\frac{2x}{(x-1)^3};\ y'=0\Rightarrow$$

$-2x=0\Rightarrow x=0$ — критична точка. При $x=1$ $y'$ не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку *x* = 0 на екстремум:

при $x=-1$ $y'=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}<0(-)$;

при $x=\frac{1}{2}$ $y'=\frac{-1}{-1/8}=8>0(+)$.

*Таблиця 4*

| $x$ | $(-\infty, 0)$ | 0 | (0, 1) | 1 | $(1, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | – | 0 | + | Не існує | – |
| $y$ | ↘ | $y_{\min}$ (–1) | ↗ | Не існує | ↘ |

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», через це в точці $x = 0$ функція має мінімум:

$$y_{\min} = \frac{-1}{1} = -1.$$

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'(x) < 0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}; \; y'' = 0 \Rightarrow$$

$2(2x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$; при $x = 1$ $y''$ не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x = -\frac{1}{2}$:

при $x = -1$ $y'' = \frac{2(-2+1)}{(-2)^4} = -\frac{1}{8} < 0(-)$;

при $x = 0$ $y'' = \frac{2}{1} = 2 > 0(+)$.

Друга похідна, проходячи через $x = -\frac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = -\frac{8}{9} \approx -0{,}9.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$ — точка перегину.

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'' > 0$, значить, графік функції вгнутий.

Результати дослідження заносимо у табл. 5.

*Таблиця 5*

| $x$ | $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ | $-\frac{1}{2}$ | $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ | $1$ | $(1, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | + | 0 | + | Не існує | + |
| $y$ | $\cap$ | Перегин (– 8/9) | $\cup$ | Не існує | $\cup$ |

7. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $y = 0$ (вісь $Ox$).

На підставі результатів дослідження будуємо графік функції. Для точнішої побудови візьмемо додатково точки на рис. 13: (–5; – 0,3), $\left(\frac{2}{3}, 3\right)$, (2; 3), (3; 1,3).

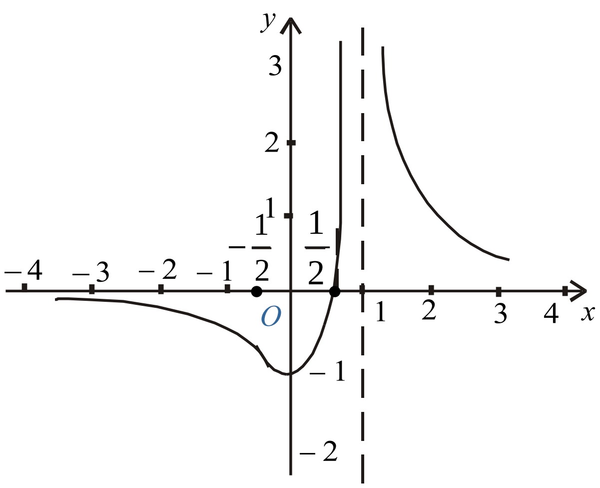



Рис. 13