Тема 9. Визначений інтеграл та його властивості

1. ЗАДАЧІ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО ПОНЯТТЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА.

Задача 1. Обчислення площі плоскої фігури.

Розглянемо криволінійну трапецію – плоску фігуру, обмежену лініями $y = f(x) \geq 0,\ \ y = 0,\ \ x = a,\ \ x = b,$ і визначимо її площу.

Розіб'ємо проміжок $[a;\ b]$ на n частин точками $x_i,\ \ i = \left(\overline{0,\ n}\right)$ так що $a = x_0,\ \ b = x_n$. Виберемо точки ξ_i так: $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Побудуємо прямокутники з основою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і висотою $f\left(\xi_i\right)$ (рис. 1).

Площа елементарного прямокутника $\Delta S_i = f\left(\xi_i\right) \cdot \Delta x_i$. Площа ступінчастої фігури $\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right) \cdot \Delta x_i = S_n$ буде тим менше відрізнятись від площі криволінійної трапеції, чим менша довжина $\max \Delta x_i$, тобто

$$S_{aBAb} = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f \xi_i \cdot \Delta x_i .$$

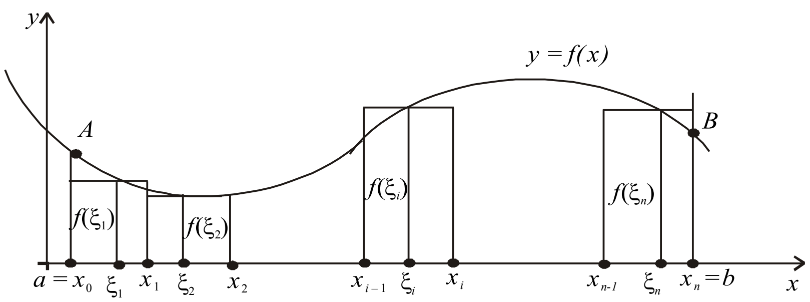

Рис. 1

Задача 2. Обчислення роботи змінної сили.

Визначимо роботу змінної сили $\vec{F}$ по переміщенню матеріальної точки із точки a в точку b на відрізку $[a;\ b]$ (рис. 2).

Розіб'ємо проміжок $[a;\ b]$ на n частин точками $x_i, i = \left(\overline{0, n}\right)$. На кожному з відрізків $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ вважатимемо, що сила стала і дорівнює $f\left(\xi_i\right)$, де $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$.

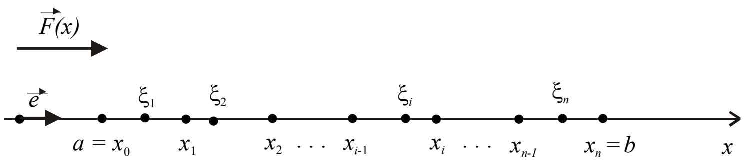

Рис. 2

Елементарна робота сили на відрізку Δx_i дорівнює $\Delta A_i = f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$. Тоді робота A сили $\vec{F}$ на відрізку [a; b] визначаєьбся так:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i .$$

Сума вигляду $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$ називається *інтегральною сумою*. В загальному випадку інтегральна сума може залежати від способу розбиття [a; b] на частини Δx_i, а також від вибору на них точок ξ_i.

2. ПОНЯТТЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА.

Нехай $y = f(x)$ — деяка функція, задана на проміжку [a; b]. Розіб'ємо [a; b] на n частин точками x_i, так що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обчислимо $f(\xi_i)$, де $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $i = \left(\overline{1, n}\right)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і складемо інтегральну суму $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Позначимо $\lambda = \max \Delta x_i$.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття [a; b] на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом від функції* $f(x)$ *на проміжку* [a; b] і позначається:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i , \qquad (1)$$

де $\int\limits_a^b$ — знак визначеного інтеграла, a, b — нижня та верхня межі інтегрування, $f(x)$ — підінтегральна функція, $f(x)\,dx$ — підінтегральний вираз, dx — диференціал змінної інтегрування.

З означення випливає, що визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ залежить від функції $f(x)$ та проміжку [a; b] і не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt$.

Означення. Функція, для якої на проміжку $[a;\ b]$ існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називається *інтегровною на цьому проміжку*.

Далі буде показано, що всі неперервні функції є інтегровними.

Геометричний зміст визначеного інтеграла: якщо $f(x) \ge 0,\quad x \in [a;\ b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції (рис. 1).

3. ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА.

I. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = kc \cdot \int\limits_a^b f(x)dx.$$

II. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровні на $[a;\ b]$, то

$$\int\limits_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\, dx.$$

III. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить свій знак на протилежний:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

IV. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

V. Якщо $f(x)$ – інтегровна на проміжках: $[a;\ b]$, $[a;\ c]$, $[c;\ b]$, то:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

VI. Якщо $f(x) = c = \text{const}$, то $\int\limits_a^b c dx = c \cdot (b-a)$.

VII. Якщо $f(x)$ функція інтегровна на $[a,\ b]$ і $f(x) \ge 0$ для всіх $x \in [a,\ b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$.

VIII. Якщо $f(x),\ g(x)$ — інтегровні на $[a,\ b]$, причому $f(x) \ge g(x)$ для $x \in [a,\ b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b g(x)\, dx$.

IX. Якщо $f(x)$ — інтегровна на $[a,\ b]$, причому $m \le f(x) \le M$ для $x \in [a,\ b]$, то

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\, dx \le M(b-a).$$

X. *Теорема про середнє.* Якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x \in [a,\ b]$, то знайдеться така точка $c \in [a,\ b]$, що:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a) \tag{2}$$

Геометричний зміст теореми про середнє: існує прямокутник зі сторонами $f(c), c \in [a,\ b]$, та $b-a$, рівновеликий криволінійній трапеції *aABв* за умови, що функція $f(x) \ge 0$ і неперервна на проміжку $[a;\ b]$ (рис. 3).

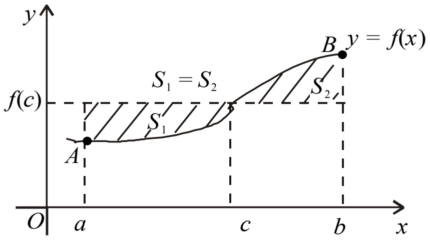

Рис. 3.

4. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНІЦА.

Розглянемо інтеграл $\Phi(x) = \int_a^x f(x)dt$, який є функцією від верхньої межі інтегрування.

Теорема. Якщо функція f(x) неперервна для будь-якого $x \in [a;\ b]$, *то похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування дорівнює підінтегральній функції, тобто*

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)_x' = f(x). \tag{3}$$

Наслідок 1. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею від функції $f(x)$ є первісною для цієї функції.

Наслідок 2. Будь-яка неперервна функція на проміжку $[a;\ b]$ має на цьому проміжку первісну, зокрема, функцію $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Позначивши $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, розглянемо формулу Ньютона-Лейбніца, яка встановлює зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Отже, для обчислення визначеного інтеграла потрібно знайти первісну підінтегральної функції і підставити верхню і нижню межі інтегрування.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)dx$**.**

Розв'язання. Знайдемо первісну підінтегральної функції і підставимо межі інтегрування, дістанемо:

$$\int_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)dx=\left(e^x-x\right)\Big|_0^{\ln 2}=\left(e^{\ln 2}-\ln 2\right)-\left(e^0-0\right)=2-\ln 2-1=1-\ln 2.$$

5. МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ У ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ.

Розглянемо метод заміни змінної.

Якщо $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a;\,b]$, а функція $x=\varphi(t)$ неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на $[\alpha;\,\beta]$, причому $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\left|\begin{array}{c} x=\varphi(t), \\ dx=\varphi'(t)dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array}\end{array}\right|=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (5)$$

Зауваження. При заміні змінної у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, тому не потрібно повертатись до початкової змінної.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

Розв'язання. Зробивши заміну змінної, дістанемо

$$\int_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\left|\begin{array}{c} x=t^2,\quad dx=2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array}\end{array}\right|=\int_2^3\frac{2tdt}{t+1}=2\int_2^3\frac{t+1-1}{t+1}dt=$$

$$=2\int_2^3\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_2^3=2\left(3-\ln 4-\left(2-\ln 3\right)\right)=2\left(1+\ln\frac{3}{4}\right).$$

Розглянемо метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Якщо функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ мають неперервні похідні для $x\in[a;\,b]$, то

$$\int_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b vdu. \qquad (6)$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2xdx$.

Розв'язання. Застосувавши формулу (6), дістанемо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ dv = \cos 2x dx, \\ v = \int \cos 2x dx = \\ = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$