Тема 10. Невласні інтеграли. Застосування визначених інтегралів

1. Невласні інтеграли першого роду. 1
2. Невласні нтеграли II роду.. 2
3. Застосування визначеного інтеграла.. 3

1. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО РОДУ.

Нехай *f*(*x*) інтегровна для будь-якого скінченного $b \in [a; +\infty)$, так що $\int\limits_a^b f(x)dx$ існує.

Означення. Невласним інтегралом I роду (з нескінченною верхньою межею) від функції *f(x)* називається границя від інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ і позначається так: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$. (1)

Якщо ця границя існує та скінченна, то невласний інтеграл називається *збіжним*, а якщо не існує (зокрема нескінченна), то — *розбіжним*.

Аналогічно розглядають невласний інтеграл I роду *(з нескінченною нижньою межею*).

Якщо функція *f*(*x*) інтегровна для скінченних *a* і *b*, тобто $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, то формули для обчислення невласних інтегралів I роду мають вигляд:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} (F(b) - F(a)),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} (F(b) - F(a)),$$

Зауважимо, що невласний інтеграл з двома нескінченними межами розбивають на два невласні інтеграли, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx, \quad c = \text{const}.$$

Приклад 1. Дослідити на збіжність інтеграл Діріхле $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Для дослідження інтеграла розглянемо такі три випадки.

I. Нехай $p = 1$. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|x|\right)\Big|_{1}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln b-\ln 1\right)=+\infty$, інтеграл розбіжний.

II. Нехай $p < 1$.

$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}}=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Bigg|_{1}^{b}=\frac{1}{1-p}\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-p}-1\right)=+\infty$, інтеграл розбіжний.

III. $p > 1$. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}}=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^{p}}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Bigg|_{1}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(b^{\frac{1}{p-1}}-1\right)=$

$=\frac{1}{1-p}(0-1)=\frac{1}{p-1}$, інтеграл збіжний.

Отже, інтеграл Діріхле збіжний при $p>1$та розбіжний при $p\le 1$.

Приклад 2. Дослідити інтеграл $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^{2}+4x+8}$ на збіжність.

<u>*Розв'язання*</u>. За означенням маємо

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^{2}+4x+8}=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{(x+2)^{2}+4}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}\Big|_{o}^{b}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b+2}{2}-\operatorname{arctg}1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}.$$

Отже, інтеграл є збіжним і дорівнює $\frac{\pi}{8}$.

2. НЕВЛАСНІ НТЕГРАЛИ II РОДУ.

Нехай $f(x)$ неперервна на проміжку $(a;\ b]$ і в точці $x = a$ має розрив другого роду.

Означення. Невласним інтегралом II роду (від необмеженої функції $f(x)$).

називається $\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$ і позначається

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+\infty}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx \qquad (2)$$

Якщо ця границя існує, то інтеграл називається *збіжним*, а якщо не існує, то — *розбіжним*.

Для обчислення таких невласних інтегралів використовують такі формули. Якщо $x=a$ – точка розриву другого роду функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} (F(b) - F(a+\varepsilon)).$$

Якщо $x = b$ – точка розриву другого роду, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} (F(b-\varepsilon) - F(a)).$$

Якщо $x = c \in (a;\ b)$ – точка розриву другого роду функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to+0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Зауваження. До невласних інтегралів, які мають точку розриву, що є внутрішньою для $[a;\ b]$, не можна застосувати формулу Ньютона—Лейбніца.

Приклад 3. Обчислити $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

Розв'язання. Для обчислення інтеграла дослідимо підінтегральну функцію на неперервність. Для функції $f(x) = \frac{1}{x^2}$ область визначення має вигляд $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, тому $x = 0 \in [-1;\ 1]$ — точка розриву 2-го роду функції $f(x)$. Отже, $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ — невласний інтеграл II роду. Розклавши його в суму двох інтегралів, дістанемо:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1\to+0} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2\to+0} \int_{0+\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1\to+0} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon_1} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2\to+0} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\varepsilon_2}^{1} = \lim_{\varepsilon_1\to+0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right) + \lim_{\varepsilon_2\to+0} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = +\infty + \infty = +\infty.$$

Отже, даний інтеграл розбіжний.

3. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА.

Розглянемо геометричні застосування визначеного інтеграла.

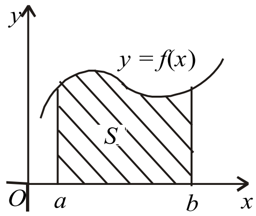
I. Обчислення площі плоскої фігури.

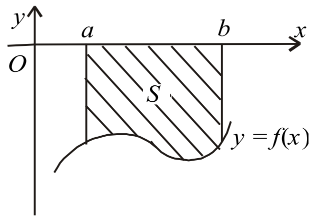
1. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис.1). Функція $f(x)$ — неперервна та $f(x) \ge 0$. Площа S такої криволінійної трапеції за геометричним змістом визначеного інтеграла така:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (3)$$

Якщо ж $f(x) \le 0$ (рис. 2), то площу фігури обчислюють так:

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$$





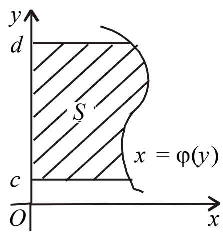


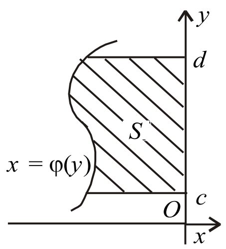
Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

2. Фігура обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ (рис. 3). Функція $x = \varphi(y)$ — неперервна та $\varphi(y) \geq 0$. Площа *S* такої фігури $S = \int_c^d \varphi(y)dy$.

Якщо $\varphi(y) \leq 0$ (рис.4), то $$S = \left| \int_c^d \varphi(y)\, dy \right|.$$

3. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = g(x), x = a, x = b.$ Функції $f(x)$ та $g(x)$ — неперервні та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a;\ b]$ (рис. 5). Площа *S* такої фігури визначається як різниця площ фігур aA_2B_1b та aA_2B_1b, тобто

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx. \tag{4}$$



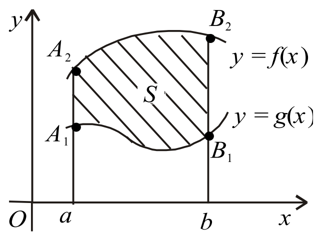


Рис. 4 Рис. 5

Якщо фігура обмежена параметрично заданою кривою

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \end{cases}$$

прямими $x = a$, $x = b$ і віссю Ox, то її площа обчислюється за формулою

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt, \tag{5}$$

де $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ і $y(t) \geq 0$ на відрізку $[a;\ b]$.

Приклад 4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=-x^2+4x+5$ та $y=2x-3$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру, обмежену параболою $y=-x^2+4x+5$ (l_1) та прямою $y=2x-3$ (l_2) на координатній площині; при цьому знаходимо точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат, а також координати вершини параболи (рис. 6).

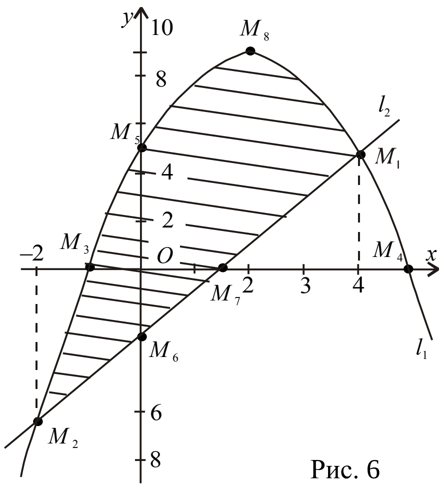


Рис. 6

$$l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} y=2x-3 \\ x^2-2x-8=0 \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(4;\ 5) \\ M_2(-2;\ -7). \end{array}\right.$$

$$l_1 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x^2-4x-5=0 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_4(5;\ 0) \\ M_3(-1;\ 0). \end{array}\right.$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ x=0 \end{cases} \begin{cases} y=5 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(0;\ 5).$$

$$l_2 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M_7(1{,}5;\ \ 0).$$

$$l_2 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow M_6(0;\ -3).$$

Точка $M_8(2;\ 9)$ — вершина параболи $y-9=-(x-2)^2$.

Площа S фігури $M_1M_8M_2$ за формулою (4) буде така:

$$S=\int_{-2}^{4}\left(-x^2+4x+5-(2x-3)\right)dx=\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right)\Bigg|_{-2}^{4}=$$

$$=-\frac{64}{3}+16+32-\left(\frac{8}{3}+4-16\right)=36.$$

II. *Обчислення об'єму тіла*.

1. Нехай функція $S=S(x)$ — площа поперечного перерізу просторового тіла площиною, перпендикулярною до осі *Ox* у деякій точці $x\in[a;\ b]$.

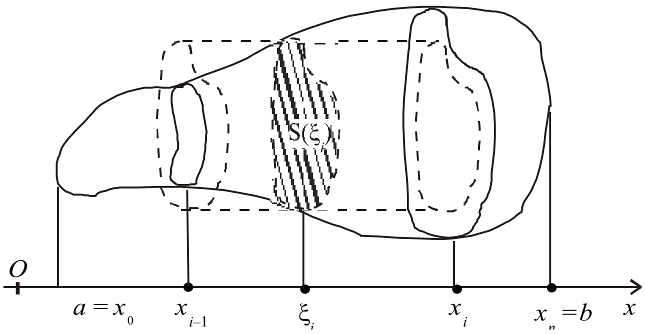


Рис. 7

Тоді об'єм тіла за площами паралельних перерізів визначають так:

$$V=\int_a^b S(x)dx \tag{6}$$

2. Об'єм тіла V_x, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y=f(x)\geq 0,\ y=0,\ x=a,\ x=b$ (рис. 8), обчислюють за формулою:

$$V_x=\pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \tag{7}$$

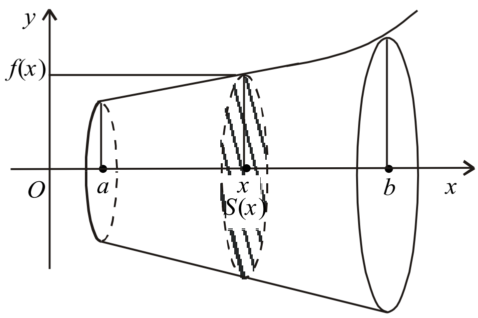


Рис. 8

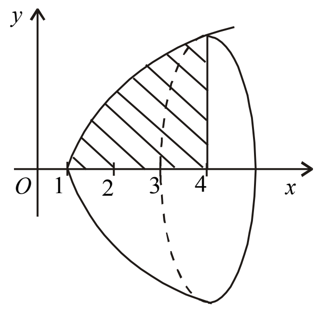


Рис. 9

Аналогічно об'єм тіла V_y, утвореного обертанням навколо осі *Oy* фігури, обмеженої лініями $x = 0$, $x=\varphi(y)\geq 0$, $y=c$, $y=d$, знаходять так

$$V_y=\pi\int_c^d \left(\varphi(y)\right)^2 dy \tag{8}$$

Приклад 5. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = 3x - 3$, $x = 1$, $x = 4$.

<u>*Розв'язання.*</u> У прямокутній системі координат будуємо фігуру, обмежену даними лініями (рис. 9). За формулою (7) визначаємо об’єм тіла:

$$V = \pi\int_1^4 y^2 dx = \pi\int_1^4 (3x-3)dx = \frac{3\pi}{2}(x-1)^2\Big|_1^4 = \frac{27}{2}\pi .$$

III. *Обчислення довжини дуги кривої.*

Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)$ неперервні, то довжина дуги кривої $f(x)$, обмеженої прямими $x = a$ та $x = b$, обчислюється за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx . \qquad (9)$$

Якщо ж крива задана параметрично: $x = x(t),\ y = y(t),\ \ \alpha \le t \le \beta$, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \cdot \qquad (10)$$

Довжину дуги просторової кривої, заданої рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \ \alpha \le t \le \beta$, обчислюють за формулою

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt \cdot$$

IV. *Площа поверхні, утвореної обертанням.*

Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої, заданої функцією $y = f(x),\ \ a \le x \le b$, обчислюється за формулою

$$Q = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx . \qquad (11)$$

Якщо дуга задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),\ \ \alpha \le t \le \beta$, то

$$Q = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt .$$