

## Лекція №11. Диференціальні рівняння першого порядку. Основні означення і положення

1. Поняття диференціального рівняння. ....	1
2. Основні означення і положення щодо диференціальних рівнянь першого порядку .....	2
3. Геометричний зміст розв'язку диференціального рівняння першого порядку .....	4
4. Задача Коші .....	5
5. Теорема існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння першого порядку .....	5
6. Особливі розв'язки диференціального рівняння першого порядку.....	6
7. Спосіб Лагранжа знаходження особливого розв'язку .....	7
8. Особливі точки .....	9

### 1. Поняття диференціального рівняння.

*Диференціальним рівнянням* називається рівняння, що пов'язує незалежну змінну  $x$ , функцію від цієї змінної, похідні функції і має вигляд

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Порядок старшої похідної називається **порядком** диференціального рівняння. *Розв'язком* диференціального рівняння (1) називається функція  $y = \varphi(x)$ , підставляючи яку разом із її похідними  $y' = \varphi'(x), \dots, y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x)$  у рівняння (1) дістаємо тотожність

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Сама назва "диференціальне рівняння" говорить про те, що це - рівняння, яке містить диференціали. Кожне фізичне явище характеризується однією чи декількома величинами, визначити які безпосередньо не завжди можливо, але можливо встановити зв'язок між диференціалами залежних між собою величин. Це стає можливим тому, що можна вводити деякі спрощення, які дозволяють встановити зв'язок між малими приростами цих величин. Застосування граничного переходу не змінює залежності між величинами, які містять похідні величин, що розглядаються.

Диференціальні рівняння виникають при розгляді залежності між деякими величинами та їх нескінченно малими змінними. Тобто, такі рівняння пов'язують шукані величини - функції, їхні похідні і незалежні змінні.

Якщо незалежна змінна одна, то диференціальне рівняння називається *звичайним диференціальним рівнянням*. Саме такі рівняння розглядаються

у цьому посібнику. Якщо незалежних змінних декілька, то маємо диференціальні рівняння в частинних похідних, які вивчаються в розділі вищої математики *математична фізика*.

Похідну функції  $y'$  можна записати у вигляді  $\frac{dy}{dx}$  і розглядати цей запис не як позначення похідної, а як відношення двох диференціалів  $dy$  та  $dx$ . Тоді стає зрозумілою назва - *диференціальне рівняння*, тобто це рівняння, що містить диференціали.

Диференціальні рівняння з'являються наприкінці XVII сторіччя майже одночасно з відкриттям інтегрального і диференціального числення. До перших задач, які розглядали І.Ньютон (1642-1727) та В.Г.Лейбніц (1646-1716), належать задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь.

Склавши диференціальне рівняння, яке пов'язує шукану функцію і її похідні, потрібно знайти цю функцію - розв'язати диференціальне рівняння. Знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням диференціального рівняння.

До виділення різних класів диференціальних рівнянь, розв'язки яких можна знайти, привело вивчення проблем динаміки точки, динаміки руху твердого тіла, задач небесної механіки, теорії руху планет. В свою чергу, успіхи самої математики привели до подальшого розвитку диференціальних рівнянь в XIX сторіччі. Була поставлена (і розв'язана О.Коші (1789-1857) ) загальна проблема існування розв'язків диференціальних рівнянь.

## 2. Основні означення і положення щодо диференціальних рівнянь першого порядку

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, що пов'язує незалежну змінну  $x$ , функцію  $y(x)$ , її похідну  $y'(x)$  і має вигляд

$$F(x, y, y') = 0. \quad (2)$$

Якщо рівняння (2) можна розв'язати відносно похідної  $y'$ , то воно матиме вигляд:

$$y' = f(x, y). \quad (3)$$

Розглядають також диференціальне рівняння у диференціалах  $dx$  та  $dy$ , тобто рівняння у вигляді

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (4)$$

Диференціальне рівняння (4) можна звести до рівняння (1.3), якщо  $Q(x, y) \neq 0$ , враховуючи, що

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad (5)$$

тобто, розглядаючи похідну як відношення двох диференціалів. І навпаки, диференціальне рівняння (3) можна звести до диференціального рівняння (4).

Зробимо деякі перетворення. Підставимо (5) в (1). Тоді

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \quad f(x, y) \neq 0.$$

Дістаємо так зване **обернене рівняння**

$$x'_y = \frac{1}{f(x, y)}. \quad (6)$$

У диференціальному рівнянні (6) незалежною змінною є  $y$ , а  $x = x(y)$  є функцією від  $y$ . Тобто це рівняння пов'язує незалежну змінну  $y$ , функцію  $x(y)$  та її похідну  $x'(y) = \frac{dx}{dy}$ .

Таким чином, у рівнянні (3) можна розглядати змінну  $y$  як функцію незалежної змінної  $x$ ,  $y(x)$ , або у рівнянні (6), яке є тотожним рівнянню (3) при  $f(x, y) \neq 0$ , розглядати змінну  $x$  як функцію незалежної змінної  $y$ ,  $x(y)$ . Отже змінні  $x$  та  $y$  в диференціальному рівнянні (2) є рівноправними.

**Означення.** Розв'язком диференціального рівняння першого порядку вигляду (2), (3), (4) називається функція  $y = \varphi(x)$ , підставляючи яку разом із похідною  $y' = \varphi'(x)$  у відповідне диференціальне рівняння дістаємо тотожність.

Розв'язок диференціального рівняння першого порядку може бути знайдений також у вигляді неявної функції

$$\Phi(x, y) = 0.$$

Такий розв'язок називають **інтегралом**.

**Приклад 1.** Покажемо, що функція  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , є розв'язком диференціального рівняння  $y' = y^2 + 1$ .

Дійсно, існує  $y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Тоді підставляючи  $y$  та знайдене  $y'$  в задане рівняння, маємо  $\frac{1}{\cos^2 x} \equiv 1 + \operatorname{tg}^2 x$ .

Зауважимо, що розв'язком цього рівняння є також функція  $y = \operatorname{tg}^2 x + C$ , де  $C$  - довільна стала.

Знаходження розв'язку диференціального рівняння називається **інтегруванням диференціального рівняння**.

При знаходженні розв'язку диференціальне рівняння вважається розв'язаним, якщо функцію  $y$  можна представити у вигляді інтеграла - звести до **кватратури**, незалежно від того, чи виражається інтеграл через елементарні функції, чи ні.

### 3. Геометричний зміст розв'язку диференціального рівняння першого порядку

Розв'язку  $y = \varphi(x)$  рівняння (3) відповідає деяка крива - інтегральна крива.

Нехай функція  $f(x, y)$  у рівнянні (3) - визначена і скінченна в кожній точці деякої області  $D$  площини  $XOY$ . Через довільну точку  $M(x, y) \in D$  проведемо одиничний відрізок, серединою якого є точка  $M$ , такий, що  $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$ , де  $\alpha$  - кут, який утворює одиничний відрізок з додатним напрямом осі  $OX$ . Тоді рівняння (3) визначає поле напрямів і саме рівняння геометрично означає, що напрям дотичної ( $y' = \operatorname{tg} \alpha$ ) до інтегральної кривої співпадає з напрямом поля в цій точці (рис. 1).

Задача інтегрування диференціального рівняння полягає в тому, щоб, виходячи із цієї властивості, знайти сім'ю інтегральних кривих  $y = \varphi(x, C)$ , де  $C$  - довільна стала.

Крива, в кожній точці якої нахил поля, що визначається диференціальним рівнянням (4), один і той же, називається **ізокліною** цього рівняння. Рівняння ізокліни має вигляд

$$f(x, y) = k,$$

де  $k$  - стала величина.

**Приклад 2.** Знайти ізокліни рівняння  $y' = 2x$ .

**Розв'язання.** Прирівнюємо праву частину заданого рівняння числу  $k$ :  $2x = k$ . Звідки  $x = \frac{k}{2}$ . Тобто, ізокліни - це прямі, паралельні осі  $Oy$  (рис. 1).

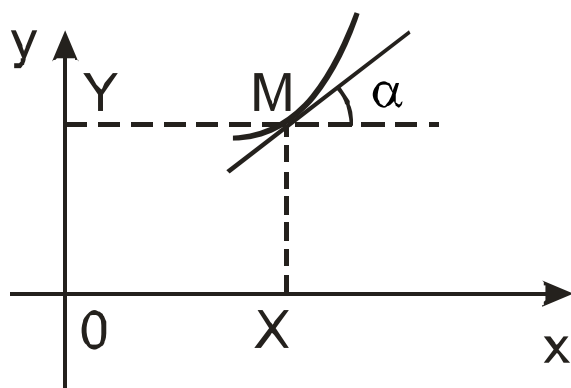


Рис. 1

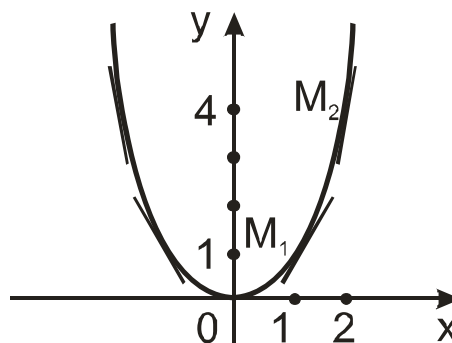


Рис. 2

На кожній із цих прямих напрям поля однаковий. Нехай  $k = 0$ . Тоді  $y' = 0$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 0$ ,  $\alpha = 0$ . Ізокліна - це пряма  $x = 0$  - вісь  $Ox$ . В точці  $O(0,0)$  напрям поля співпадає з напрямом осі  $Ox$  (рис. 2). Візьмемо пряму  $x = \frac{1}{2}$ .

Тоді  $y' = 1$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  (точка  $M_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ). Візьмемо пряму  $x = 1$ . Тоді

$y' = 2$ ,  $\alpha = \arctg 2$  ( точка  $M_2(1;2)$  ). З'єднавши точки  $O, M_1, M_2$  плавною лінією, дістаємо криву  $y = x^2$  - розв'язок заданого диференціального рівняння.

#### 4. Задача Коші

**Означення.** Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція, що містить довільну сталу і яка задовольняє умови:

1) функція  $\varphi(x, C)$  є розв'язком диференціального рівняння,

2) при заданих **початкових умовах**

$$y(x_0) = y_0$$

стала  $C$  знаходяться однозначно.

Знайшовши сталу  $C_0$ , маємо функцію  $\varphi(x, C_0)$  - частинний розв'язок диференціального рівняння (3).

Загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку може бути знайдений в неявному вигляді

$$\Phi(x, y, C) = 0. \quad (7)$$

Такий розв'язок називають **загальним інтегралом** диференціального рівняння першого порядку.

**Задача Коші** полягає в тому, щоб серед усіх розв'язків рівняння (3)

$$y' = f(x, y)$$

знайти такий розв'язок  $y = y(x)$ , в якому функція  $y = y(x)$  набуває задане значення  $y_0$  при заданому числовому значенні  $x_0$  незалежної змінної, тобто

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{або} \quad y|_{x=x_0} = y_0 \quad (8)$$

Число  $x_0$  називається **початковим значенням** незалежної змінної. Числа  $x_0, y_0$  називаються **початковими даними**, а умови (8) - **початковими умовами** рівняння (3).

Геометрично це означає: серед усіх інтегральних кривих  $y = \varphi(x, C)$  потрібно знайти ту криву, що проходить через задану точку  $M(x_0, y_0)$ .

#### 5. Теорема існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння першого порядку

**Теорема.** Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y)$$

має єдиний розв'язок, що задовольняє початкові умови (8) в деякому околі точки  $(x_0; y_0)$ , якщо в цьому околі функція  $f(x, y)$

1) неперервна по  $x$  та  $y$ ,

2) має неперервну похідну  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

Таким чином, теорема забезпечує існування розв'язку  $y = \varphi(x, C_0)$ , який називається **частинним розв'язком** диференціального рівняння.

## 6. Особливі розв'язки диференціального рівняння першого порядку

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f(x),$$

права частина якого не містить функцію  $y$ . Нехай функція  $f(x)$  неперервна

на проміжку  $a < x < b$ . Оскільки  $y' = \frac{dy}{dx}$ , то із заданого рівняння маємо

$$dy = f(x)dx.$$

Загальний розв'язок цього рівняння знаходимо, якщо проінтегруємо обидві частини цього рівняння:

$$y = \int f(x)dx + C.$$

Розв'язок визначений в області  $a < x < b, -\infty < y < +\infty$ .

Якщо порушуються умови 1) або 2) теореми, то рівняння може мати **особливий** розв'язок. Цей розв'язок не можна отримати із загального розв'язку ні при яких значеннях сталої  $C$ .

Розглянемо випадок, коли в точці  $x = x_1$  функція  $f(x_1) = \infty$ . Тоді в околі цієї точки розглядають обернене рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)}.$$

Для цього рівняння  $x = x_1$  є розв'язком. Це може бути або частинний, або особливий розв'язок. Частинний розв'язок можна отримати із загального розв'язку при  $C = +\infty$  або  $C = -\infty$ . Особливий розв'язок дістаємо при  $C = C(y)$ .

**Приклад 3.** Розглянемо диференціальне рівняння  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ .

Функція  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$  неперервна при всіх значеннях  $x$  крім точки  $x = 0$ .

Із заданого рівняння маємо  $dy = -\frac{1}{x^2}dx$ . Після інтегрування знаходимо, що

загальним розв'язком заданого рівняння є функція  $y = \frac{1}{x} + C$  при

$-\infty < x < 0, \quad 0 < x < +\infty$ .

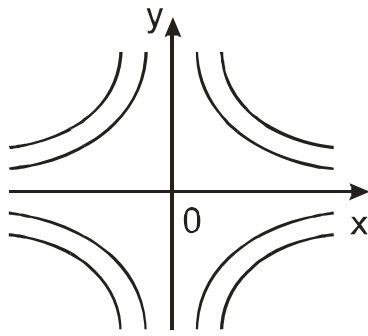


Рис. 3

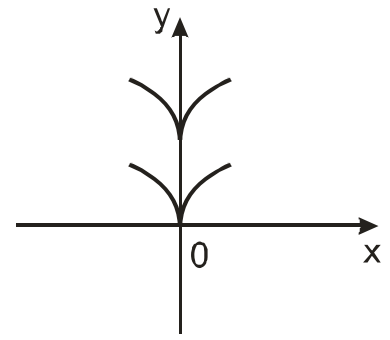


Рис. 4

Розглянемо обернене рівняння  $\frac{dx}{dy} = -x^2$ . Значення  $x = 0$  є розв'язком: цього рівняння, оскільки  $x' = 0$  і підставляючи у задане рівняння  $x = 0, x' = 0$ , отримуємо тотожність. Отже,  $x = 0$  - частинний розв'язок, тому що через точку  $x = 0$  проходить лише одна інтегральна крива (рис 3).

**Приклад 4.** Розглянемо диференціальне рівняння  $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ .

Функція  $f(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$  неперервна для всіх значень  $x$  крім  $x = 0$ . Маємо  $dy = \frac{2dx}{3\sqrt[3]{x}}$ . Після інтегрування маємо загальний розв'язок заданого рівняння є  $y = \sqrt[3]{x^2} + C$  або  $(y + C)^3 = x^2$  при  $-\infty < x < 0, -\infty < y < +\infty$  та  $0 < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ , тому що  $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + 0$  і  $\frac{dy}{dx} \equiv \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ .

Обернене рівняння  $\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x}$  має розв'язок  $x = 0$ . Це - **особливий** розв'язок, оскільки порушується єдиність розв'язку задачі Коші. Знайдемо його.

Покладаємо у загальному розв'язку заданого рівняння  $C = y$ . Тоді  $y = \sqrt[3]{x^2} + y$ . Ця рівність можлива лише при  $x = 0$ . Таким чином, через точки осі  $Oy$  проходять два розв'язки  $y = \sqrt[3]{x^2} + C$  та  $x = 0$  (рис. 4).

## 7. Спосіб Лагранжа знаходження особливого розв'язку

Нехай рівняння першого порядку

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2)$$

має розв'язок у вигляді загального інтеграла

$$\Phi(x, y, C) = 0. \quad (7)$$

Особливий розв'язок

$$y = \psi(x)$$

не можна дістати із загального інтеграла ні при яких значеннях сталої  $C$ . Вкажемо спосіб знаходження особливого розв'язку, яким є **спосіб Лагранжа**, який полягає в наступному.

Розв'яжемо загальне рівняння (2) відносно похідної:

$$y' = \varphi(x, y), \quad (9)$$

а загальний інтеграл (7) відносно  $y$ :

$$y = f(x, C). \quad (10)$$

Оскільки  $y = f(x, C)$  – це розв'язок рівняння (67.9), то має виконуватися тотожність

$$\frac{df(x, C)}{dx} \equiv \varphi(x, f(x, C)).$$

Нехай  $C = C(x)$  є функцією від  $x$ , тобто

$$y = f(x, C(x)) \quad (11)$$

Якщо вважати (10) розв'язком рівняння (9), то повинно виконуватися співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, C) + \frac{\partial f(x, C)}{\partial C} \frac{dC}{dx} = \varphi(x, f(x, C))$$

або, враховуючи (67.8),

$$\varphi(x, f(x, C)) + \frac{\partial f(x, C)}{\partial C} \frac{dC}{dx} = \varphi(x, f(x, C)), \quad \frac{\partial f(x, C)}{\partial C} \frac{dC}{dx} = 0.$$

Звідки

$$\text{або } \frac{dC}{dx} = 0, \quad \text{або } \frac{\partial f(x, C)}{\partial C} = 0.$$

Перша рівність означає, що  $C$  є сталою величиною. Із (11) маємо, що  $y = f(x, C)$ , тобто - це загальний розв'язок заданого диференціального рівняння.

Нехай  $\frac{\partial f(x, C)}{\partial C} = 0$ . Тоді із (10) маємо, що  $f(x, C) = y$  і  $C$  знаходимо із рівності  $\frac{dy}{dC} = 0$ .

Підсумовуючи вище сказане маємо :  
*особливий розв'язок можна отримати, розв'язуючи систему*

$$\begin{cases} y = f(x, C), \\ \frac{\partial y}{\partial C} = 0. \end{cases}$$

Якщо загальний розв'язок (7) не можна розв'язати відносно похідної, то знаходимо похідну від неявно заданої функції:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dC} = 0.$$

Звідки

$$\frac{dy}{dC} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial C}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}.$$

Враховуючи, що  $\frac{dy}{dC} = 0$ , маємо, що

$$\text{або } \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0, \quad \text{або } \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \infty,$$

В цьому випадку особливий розв'язок знаходимо із розв'язку систем

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \infty. \end{cases}$$

Після знаходження  $C(x)$  потрібно перевірити, чи задовольняє ця функція співвідношення (10). Якщо не задовольняє, то відкидаємо це значення. Якщо задовольняє, то перевіряємо чи це частинний розв'язок, чи особливий.

*Особливі розв'язки (інтеграли) є обвідними сім'ї інтегральних кривих.*

**Означення.** Лінія  $L$  називається **обвідною** однопараметричної сім'ї кривих  $\Phi(x, y, C) = 0$ , якщо вона в кожній своїй точці дотикається однієї із кривих сім'ї. При цьому в різних точках лінії  $L$  до неї дотикаються різні криві сім'ї.

Обвідна має спільну дотичну з деякою інтегральною кривою  $\Phi(x, y, C) = 0$ , де  $C$  - параметр. А саме, в кожній точці обвідної напрям дотичної співпадає з напрямом поля в цій точці. А це і означає, що обвідна - інтегральна крива.

У прикладі 4 пряма  $x=0$  є обвідною сім'ї інтегральних кривих  $y = \sqrt[3]{x^2} + C$  (рис. 4).

## 8. Особливі точки

Розглянемо диференціальне рівняння, розв'язане відносно похідної:

$$y' = f(x, y).$$

Якщо в деякій точці  $(x_0, y_0)$  області визначення  $D$  функції  $f(x, y)$  порушуються умови теореми існування і єдності розв'язку, то така точка називається **особливою**.

Розрізняють такі особливі точки: **вузол, сідло, центр**. Покажемо вигляд цих точок на прикладах.

**Приклад 5.** Розглянемо диференціальне рівняння  $y' = \frac{2y}{x}$ . Функція  $f(x, y) = \frac{2y}{x}$  невизначена в точці  $(0,0)$ , тобто в цій точці порушена умова теореми існування і єдності розв'язку. Загальним розв'язком є  $y = Cx^2$ . Перевіримо це.,  $y' = 2Cx$ ,  $2Cx = \frac{2Cx^2}{x}$ ,  $2Cx \equiv 2Cx$ . Тобто, маємо, що інтегральні криві - це сім'я парабол  $y = Cx^2$ , які проходять через точку  $(0,0)$ . Ця точка - вузол (рис 5).

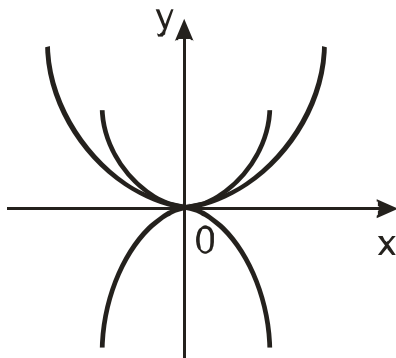


Рис. 5

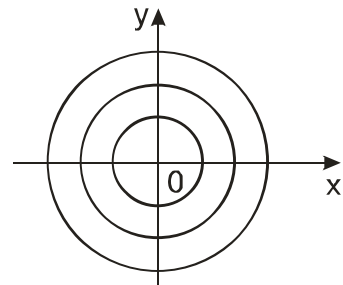


Рис. 6

**Приклад 6.** Розглянемо диференціальне рівняння  $y' = -\frac{y}{x}$ . Функція  $f(x, y) = -\frac{y}{x}$  невизначена в точці  $(0,0)$ . Загальним розв'язком цього рівняння є функція  $y = \frac{C}{x}$  (перевірте!). Тобто інтегральні криві - це сім'я гіпербол, які не проходять через точку  $(0,0)$ . Ця точка - сідло (рис 3).

**Приклад 7.** У диференціальному рівнянні  $y' = -\frac{x}{y}$  функція  $f(x, y) = -\frac{x}{y}$  невизначена в точці  $(0,0)$ . Загальним інтегралом є  $x^2 + y^2 = C$  (перевірте!) - сім'я кіл з центром в точці  $(0,0)$ . Точка  $(0,0)$  - центр (рис. 6).