Лекція №12. Диференціальні рівняння, що розв'язуються в квадратурах

1. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними

Розв'язати диференціальне рівняння означає проінтегрувати його. Інтеграл можна знайти тільки тоді, коли під інтегралом функція і диференціал залежать від однієї тієї самої змінної. У диференціальному рівняння є дві змінні x та y. Тому найбільш простим є *відокремити ці змінні.*

Дійсно, після того, як змінні відокремлені, кожний член рівняння можна розглядати як частковий диференціал, що залежить лише від однієї змінної. І лишається лише взяти інтеграл від кожного члена, додавши довільну сталу.

Отже, рівняння потрібно звести до такого вигляду

$$P(x)dx = Q(y)dy. \tag{1}$$

Для того, щоб знайти розв'язок рівняння (1) потрібно знайти інтеграли від обох частин рівності (1). Тоді матимемо

$$\int Q(y)dy = \int P(x)dx + C.$$

Запис розв'язку в такому вигляді називається **розв'язком у квадратурах.** Диференціальне рівняння вважається розв'язаним, незалежно від того, чи обчислюються інтеграли в елементарних функціях, чи ні.

Диференціальні **рівняння з відокремлюваними змінними** мають вигляд

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0 \tag{2}$$

або

$$y' = f_1(x)\,f_2(y). \tag{3}$$

Ознака рівняння з відокремлюваними змінними

При кожному диференціалі dx та dy в рівнянні (2) множниками є добутки функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної x або y. У рівнянні (3) права частина рівняння - функція $f(x,y)$, є добутком функцій $f(x)$ та $f(y)$: $f(x,y) = f_1(x)\,f_2(y)$.

Якщо диференціальне рівняння має вигляд (2) або (3), то потрібно зробити такі перетворення, щоб при dx була функція від x, а при dy - функція від y.

А саме, якщо диференціальне рівняння має вигляд (2), то змінні відокремлюємо наступним способом.

Записуємо рівняння (2) у вигляді

$$Q_1(x)Q_2(y)dy = -P_1(x)P_2(y)dx.$$

Ділимо обидві частини цієї рівності на $Q_1(x)P_2(y) \neq 0$. Отримуємо рівняння з відокремленими змінними вигляду (1)

$$\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = -\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx$$

і далі знаходимо інтеграли від кожної частини отриманої рівності.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y(1+x^2)dy + x(1-y^2)dx = 0.$$

Розв'язання. В заданому рівнянні $P(x,y)=x(1-y^2)$, тобто є добутком двох функцій $P_1(x)=x$, $P_2(y)=1-y^2$. Функція $Q(x,y)=y(1+x^2)$ є добутком функцій $Q_1(x)=1+x^2$, $Q_2(y)=y$. Отже, задане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділимо обидві частини рівняння на $(1-y^2)(1+x^2)$, при цьому $1-y^2\neq 0$ для всіх y, крім $y=\pm 1$. Дістаємо

$$\frac{x(1-y^2)dx}{(1-y^2)(1+x^2)}=-\frac{y(1+x^2)dy}{(1+x^2)(1-y^2)},\quad \frac{xdx}{1+x^2}=-\frac{ydy}{1-y^2}.$$

Звідки

$$\int\frac{xdx}{1+x^2}=-\int\frac{ydy}{1-y^2},\quad \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1-y^2)}{1-y^2},$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|=\frac{1}{2}\ln\left|1-y^2\right|-C_1,\ \ln\left|1+x^2\right|=\ln\left|1-y^2\right|+\ln C, 1-y^2=C(1+x^2)\ .$$

Отже, загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд

$$y^2=1-C(1+x^2).$$

Наведемо схему розв'язання диференціального рівняння вигляду (3).

$$y'=f(x,y).$$

Схема розв'язання диференціального рівняння $y'=f(x,y)$

1. Перевіряємо, чи виконується умова

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)\,. \tag{4}$$

2. Якщо умова виконується, то записуємо співвідношення

$$y'=\frac{dy}{dx}. \tag{5}$$

3. Підставляємо (2.4) та (2.5) в задане рівняння і дістаємо

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y)\,.$$

4. Множимо обидві частини рівності на dx. Маємо

$$dy=f_1(x)f_2(y)dx\,.$$

5. Ділимо обидві частини на $f_2(y) \neq 0$. Диференціальне рівняння набуває вигляду

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx,$$

тобто, маємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними вигляду (68.1).

6. Знаходимо інтеграли від обох частин рівності

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx.$$

Прилад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1 + y^2) + xyy' = 0.$$

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді

$$y' = -\frac{1 + y^2}{xy}, \quad x \neq 0, y \neq 0.$$

Перевіряємо, чи є права частина отриманого рівняння добутком двох функцій, кожна з яких залежить лише від одного аргументу, тобто, чи виконується умова $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$. Маємо

$$f_1(x) = -\frac{1}{x}, \quad f_2(y) = \frac{1 + y^2}{y}.$$

Записуємо задане рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1 + y^2}{y}.$$

Множимо обидві частини рівняння на dx:

$$dy = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1 + y^2}{y} dx.$$

Множимо обидві частини рівняння на $\frac{y}{1 + y^2}$ і дістаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dx}{x} = -\frac{ydy}{1 + y^2}.$$

Інтегруємо обидві частини цього рівняння

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{ydy}{1+y^2}, \quad \ln|x| = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2}, \quad \ln|x| = -\frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| + \ln|C|.$$

Довільну сталу C_1 представили у вигляді $\ln|C|$.

Отже, маємо загальний розв'язок заданого рівняння

$$x = \frac{C}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Цей розв'язок можна записати і у вигляді:

$$x^2(1+y^2) = C.$$

2. Однорідні по x та y диференціальні рівняння

Означення. **Функція** $f(x,y)$ називається **однорідною** функцією по x та y порядку k, якщо виконується умова

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y).$$

Диференціальне рівняння вигляду (2) називається **однорідним**, якщо функції $P(x,y), \quad Q(x,y)$ є однорідними функціями одного порядку.

Якщо диференціальне рівняння має вигляд (3), то воно називається **однорідним по** x **та** y, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового порядку. Тоді цю функцію можна звести до функції вигляду $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ або $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ і рівняння (3) набуває вигляду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{6}$$

Розв'язування однорідного диференціального рівняння зводиться до розв'язування рівняння з відокремленими змінними за допомогою заміни

$$\frac{y}{x} = z, \quad y' = z'x + z. \tag{7}$$

А саме, із рівняння $y' = f(x, y)$ (маємо

$$z'x + z = \varphi(z).$$

Звідки

$$z' = \frac{\varphi(z) - z}{x}, \quad x \neq 0,$$

тобто дістали рівняння з відокремлюваними змінними x та z, яке розв'язуємо вказаним вище способом. Знайшовши із цього рівняння z, маємо розв'язок однорідного рівняння

$$y = zx.$$

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

при умові, що $y(3) = 4$.

Розв'язання. Розв'яжемо задане рівняння відносно похідної:

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \quad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y}{x}}, \quad x \neq 0.$$

Дістали рівняння вигляду (6), тобто однорідне по x та y диференціальне рівняння. Зробимо заміну (7):

$$\frac{y}{x} = z, \quad y' = z'x + z$$

Задане рівняння набуває вигляду

$$z'x + z = z + \sqrt{1 + z^2}, \quad z'x = \sqrt{1 + z^2}.$$

Це - рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його

$$\frac{dz}{dx} x = \sqrt{1 + z^2}, \qquad \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln\left|z + \sqrt{1 + z^2}\right| = \ln|x| + \ln|C|, \quad z + \sqrt{1 + z^2} = Cx.$$

Повернемося до змінної y, тобто підставимо в останню рівність $z = \frac{y}{x}$.

Загальним інтегралом заданого рівняння є функція:

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx, \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2.$$

Використаємо початкову умову $y(3) = 4$. Дістаємо

$$4 + \sqrt{3^2 + 4^2} = 3^2 C, \quad C = 1.$$

Отже, шуканий розв'язок задачі Коші є інтегралом

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2.$$

3. Геометричні властивості інтегральних кривих однорідного диференціального рівняння

Із однорідного диференціального рівняння $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ маємо:

1. Нехай $y = kx$, тоді $y' = \varphi(k)$, тобто прямі $y = kx \quad (x > 0, y > 0)$ та $y = kx, \quad x < 0, y < 0,$ є ізоклінами однорідного диференціального рівняння;

2. Якщо знайдено будь-яку інтегральну криву, то зробивши заміну координат $x_1 = kx, y_1 = ky$, дістанемо іншу інтегральну криву.

3. Якщо деяка крива є інтегральною кривою, то і симетрична їй відносно початку координат крива також є інтегральною кривою.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(x^2 - y^2)y' = 2xy.$$

Розв'язання. Функція $Q(x, y) = x^2 - y^2$ є однорідною функцією другого порядку: $Q(tx, ty) = (tx)^2 - (ty)^2 = t^2(x^2 - y^2) = t^2 Q(x, y)$. Функція $P(x, y) = 2xy$ є також однорідною функцією другого порядку: $P(tx, ty) = 2txty = t^2 2xy = t^2 P(x, y)$. Отже, задане рівняння є однорідним диференціальним рівнянням. Запишемо це рівняння у вигляді

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \quad y \neq x, y \neq -x \text{ або } y' = \frac{2\dfrac{y}{x}}{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}, \quad x \neq 0.$$

Рівняння набуло вигляду (6). Зробимо заміну (7):

$$\frac{y}{x} = z, \quad y' = z'x + z.$$

Маємо

$$z'x + z = \frac{2z}{1 - z^2}, \; z'x = \frac{z + z^3}{1 - z^2}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{z + z^3}{1 - z^2}, \quad \frac{1 - z^2}{z + z^3} dz = \frac{dx}{x}.$$

Знаходимо інтеграл від правої частини рівняння:

$$\int \frac{1 - z^2}{z + z^3} dz = \int \frac{-z^2 - 1 + 2}{z(z^2 + 1)} dz = -\int \frac{dz}{z} + 2\int \frac{(1 + z^2) - z^2}{z(1 + z^2)} dz =$$

$$= \int \frac{dz}{z} - \int \frac{2zdz}{1 + z^2} = \ln|z| - \ln\left|1 + z^2\right| = \ln\left|\frac{z}{1 + z^2}\right|.$$

Знаходимо інтеграл від лівої частини рівняння:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C_1.$$

Отже, маємо

$$\ln\left|\frac{z}{1 + z^2}\right| = \ln|x| + \ln C_1, \quad \frac{z}{1 + z^2} = C_1 x.$$

Повертаємось до змінної y: $z = \frac{y}{x}$. Тоді попередня рівність набуває вигляду:

$$\frac{\dfrac{y}{x}}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = C_1 x, \quad \frac{y}{x^2 + y^2} = C_1.$$

Звідки маємо загальний інтеграл

$$x^2 + y^2 = Cy, \quad C = \frac{1}{C_1}.$$

Інтегральні криві - це сім’я кіл з центрами в точках $\left(0;\dfrac{C}{2}\right)$, що не проходять через початок координат (рис 7).

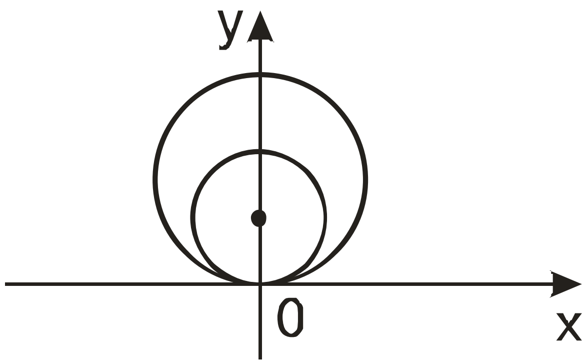

Рис. 7

Зауважимо, що крім загального розв’язку задане рівняння має ще частинний розв’язок.

Частинним розв’язком заданого рівняння є і функція $y=0$. А саме, підставляємо $y=0, \quad y'=0$ в задане рівняння і отримуємо тотожність $0\equiv 0$.

Визначимо, чи має задане рівняння особливі розв’язки. **Особливі розв’язки** шукаємо серед значень, що задовольняють співвідношення $x^2-y^2=0$. Переконуємось, що особливих розв’язків немає, тому що значення $y=x, \quad y=-x$ не задовольняють задане рівняння: $y'=1$ і

$$(x^2-x^2)\cdot 1\neq 2x\cdot x \text{ та}$$

$$y'=-1, \ .(x^2-x^2)(-1)\neq 2x\cdot(-x)$$

Задача 3. Знайти форму дзеркала, що відбиває промені, яку виходять із точки O, паралельно осі Ox.

Розв’язання. Поверхня дзеркала має бути поверхнею обертання.. Тому знайдемо лише рівняння лінії $y=y(x)$, яку потрібно обертати.

Нехай початок координат знаходиться в точці O і OM - промінь, що виходить із точки O і відображається в напрямі MP (рис. 8).

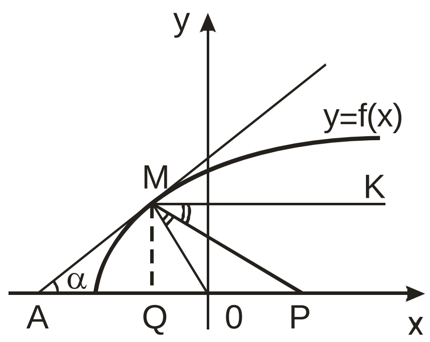

Рис. 8

Кут OMQ дорівнює куту PMQ. Позначимо його β. Маємо MQ - нормаль до кривої в точці M, дотична до кривої в точці M - це AM. Нехай (x, y)- координати точки M, де $x = ON$, $y = MN$. У трикутнику OMQ маємо $OM = MQ$, тому що кути MOQ і OMQ дорівнюють β. Тоді $OM = OQ = AO = \sqrt{x^2 + y^2}$. Із трикутника ANM маємо $tg\alpha = \frac{|MN|}{|AN|}$, де $MN = y$, $AN = AO + ON = \sqrt{x^2 + y^2} + y$. Згідно з геометричним змістом похідної $tg\alpha = y'$. Отже,

$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Дістали однорідне диференціальне рівняння: права частина цього рівняння є однорідною функцією нульового порядку:

$$f(tx, ty) = \frac{ty}{tx + \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = f(x, y).$$

Розглянемо обернене рівняння

$$x'_y = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}.$$

Зробимо заміну

$$\frac{x}{y} = z, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{dz}{dy} y + z.$$

Маємо

$$\frac{dz}{dy}y+z=z+\sqrt{1+z^2},\quad \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{dy}{y},\quad \int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\int\frac{dy}{y},$$

$$\ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right|=\ln|y|-\ln C,\quad C(z+\sqrt{1+z^2})=y.$$

Врахуємо, що $z=\frac{x}{y}$. Тоді розв'язок набуває вигляду

$$C\left(\frac{x}{y}+\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\right)=y,\quad x+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{y^2}{C},\quad x^2+y^2=\left(\frac{y^2}{C}-x\right)^2.$$

Звідки

$$y^2=2Cx+C^2.$$

Це - сім'я парабол, в фокусі яких знаходиться джерело світла. Дзеркало, що відбиває промені паралельно осі Ox, це параболоїд обертання $y^2+z^2=2C\left(x-\frac{1}{C}\right)$.

4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку називається **лінійним по** y**,** якщо функція y та її похідна y' входять у рівняння в першому степені і має вигляд

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{8}$$

де $p(x),\quad q(x)$ - неперервні функції на проміжку (a,b), $a\geq-\infty,\quad b\leq+\infty$.

Лінійне по x диференціальне рівняння має вигляд

$$x'_y+p(y)x=q(y). \tag{9}$$

Розв'яжемо диференціальне рівняння відносно похідної y':

$$y'=-p(x)y+q(x).$$

Отже, диференціальне рівняння вигляду $y' = f(x, y)$ називають лінійним, якщо функція $f(x, y)$ є лінійною функцією по y з коефіцієнтом при y, що залежить від x.

5. Властивості лінійного диференціального рівняння

1. Лінійне диференціальне рівняння залишається лінійним при будь-якій заміні незалежної змінної

$$x = \varphi(t),$$

де $\varphi(t)$ довільна функція від t, визначена і диференційована в проміжку (t_0, t_1), $a = \varphi(t_0), b = \varphi(t_1)$, похідна $\varphi'(t) \neq 0$ в усьому проміжку. Це означає, що існує обернена функція $t = \psi(x)$.

Доведення. Знаходимо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Із рівняння (8) дістаємо

$$\frac{dy}{dt}\frac{1}{\varphi'(t)} + p(\varphi(t))y = q(\varphi(t)),$$

тобто маємо лінійне диференціальне рівняння вигляду (68.8)

$$\frac{dy}{dt} + p(\varphi(t))\varphi'(t)y = q(\varphi(t))\varphi'(t).$$

2. Лінійне диференціальне рівняння зберігає свій вигляд при заміні

$$y = \alpha(x)z + \beta(x),$$

де функції $\alpha(x), \varphi(x)$ - диференційовні функції від x, що мають неперервні похідні, і $\alpha'(x) \neq 0$.

Доведення. Знаходимо похідну

$$y' = \alpha' z + \alpha z' + \beta'$$

і підставляємо y', y в рівняння (8):

$$\alpha' z + \alpha z' + \beta' + p\alpha z + p\beta = q, \quad \alpha z' + (\alpha' + p\alpha) z = q - \beta' - p\beta .$$

Звідки маємо лінійне рівняння вигляду (8) по z:

$$z'' + \frac{\alpha'(x) + p(x)\alpha(x)}{\alpha(x)} z = \frac{q(x) - \beta'(x) - p(x)\beta(x)}{\alpha(x)}$$

Означення. Лінійне диференціальне рівняння (8) називається **неоднорідним**, якщо $q(x) \neq 0$ і **однорідним**, якщо $q(x) = 0$.

Однорідне рівняння має вигляд

$$y' + p(x) y = 0 . \tag{10}$$

Зауважимо, що лінійне однорідне рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$y' = -p(x) y.$$

Розв'язання лінійного неоднорідного рівняння зводиться до розв'язання двох рівнянь з відокремлюваними змінними.

Наведемо два методи розв'язання лінійного неоднорідного рівняння.

6. Метод Бернуллі

Розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (8) можна також шукати іншим методом - методом Бернуллі. Розв'язок $y(x)$ представляють у вигляді добутку двох функцій $u(x)$ та $v(x)$. Тому на одну із них, наприклад $v(x)$, можна накладати будь-які додаткові умови. Наведемо схему розв'язування лінійного рівняння цим методом.

Схема розв'язання лінійного рівняння методом Бернуллі

1. Вводимо заміну

$$y(x) = u(x) v(x) . \tag{11}$$

2. Знаходимо

$$y' = u'v + uv' \tag{12}$$

3. Підставляємо (68.16), (68.17) в рівняння (68.8)

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x), \quad u'v + u(v' + p(x)v) = q(x) \tag{13}$$

4. Нехай функція $v(x)$ така, що вираз в дужках дорівнює нулю, тобто маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$v' + p(x)v = 0, \tag{14}$$

   яке розв'язуємо за наведеною схемою. Знаходимо $v(x)$.

5. Із рівності (68.18) маємо

$$u'v = q(x) \tag{15}$$

6. Підставляємо знайдену із рівняння (14) функцію $v(x)$ в рівняння (15) і розв'язуємо рівняння з відокремлюваними змінними. Знаходимо функцію $u(x)$.

7. Шуканий розв'язок має вигляд

$$y = u(x)v(v).$$

Таким чином, *розв'язання лінійного диференціального рівняння зводиться до розв'язання двох рівнянь (14) і (15) з відокремлюваними змінними.*

Зауважимо, що знаходження розв'язку $v(x)$ рівняння (14) є фактично знаходженням розв'язку відповідного однорідного рівняння (10).

Приклад 6. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння

$$y' + y\cos x = \sin x \cos x$$

при умові, що $y(0) = -1$.

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням по y, тому що y та y' входять в задане рівняння в першому степені. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv'.$$

Тоді маємо

$$u'v + uv' + \cos x \cdot uv = \sin x \cos x, \quad u'v + u(v' + \cos x \cdot v) = \sin x \cos x.$$

Рівняння (68.19) в цьому випадку набуває вигляду

$$v' + v\cos x = 0.$$

Розв’язуємо це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dv}{dx} = -v\cos x, \quad \frac{dv}{v} = -\cos x dx, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \cos x dx, \quad \ln|v| = -\sin x + C.$$

На функцію $v(x)$ накладемо ще умову: $C = 0$. Тоді із попередньої рівності маємо

$$v = e^{-\sin x}.$$

Далі розв’язуємо рівняння вигляду (68.20) для заданого прикладу:

$$u'v = \sin x \cos x, \quad u'e^{-\sin x} = \sin x \cos x, \quad \frac{du}{dx} = \sin x \cos x e^{\sin x},$$

$$du = \sin x \cos x e^{\sin x} dx, \quad u = \int \sin x \cos x \, e^{\sin x} dx.$$

Знайдемо інтеграл окремо. Нехай $\sin x = z, \; dz = \cos x dx.$ Тоді дістаємо інтеграл, який обчислюємо інтегруючи частинами:

$$\int ze^z dz = \begin{vmatrix} u_1 = z, & du_1 = dz, \\ dv_1 = e^z dz, & v_1 = e^z \end{vmatrix} = ze^z - \int e^z dz = ze^z - e^z + C.$$

Отже,

$$u = e^{\sin x}(\sin x - 1) + C.$$

Оскільки $y = uv$, то маємо

$$y = \left(e^{\sin x}(\sin x - 1) + C\right)e^{-\sin x}, \quad y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}.$$

Використаємо початкову умову для знаходження сталої C. Маємо

$$-1 = \sin 0 - 1 + Ce^{\sin 0}, \quad C = 0.$$

Таким чином, розв’язок задачі Коші для заданого рівняння має вигляд

$$y = \sin x - 1.$$

Приклад 7. Знайти розв’язок диференціального рівняння

$$(2x - y)y' = 1.$$

Розв’язання. Задане рівняння не є лінійним по y тому, що воно містить добуток yy'. Воно не є ні однорідним по x та y, ні рівнянням з відокремлюваними змінними. Запишемо задане рівняння у вигляді

$$y' = \frac{1}{2x-y} \quad (2x-y) \neq 0$$

і розглянемо обернене рівняння

$$x'_y = 2x - y,$$

тобто розглядатимемо x як функцію від y. Обернене рівняння є лінійним по x, оскільки функція $f(x,y)$ лінійно залежить від x і рівняння має вигляд

$$\frac{dx}{dy} - 2x = -y.$$

Розв’яжемо це рівняння методом Бернуллі. Зробимо заміну

$$x = u(y)v(y), \quad \frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy}v(y) + \frac{dv}{dy}u(y).$$

Із заданого рівняння маємо

$$\frac{du}{dy}v(y) + \frac{dv}{dy}u(y) - 2u(y)v(y) = -y, \; \frac{du}{dy}v(y) + u(y)\left(\frac{dv}{dy} - 2v(y)\right) = -y.$$

Вибираємо функцію $v(y)$ так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю:

$$\frac{dv}{dy} - 2v(y) = 0.$$

Тоді попереднє рівняння набуває вигляду

$$\frac{du}{dy}v(y) = -y.$$

Розв’язуємо ці рівняння:

$$\frac{dv}{v} = 2dy, \quad \int \frac{dv}{v} = 2\int dy, \quad \ln|v| = 2y, \quad v(y) = e^{2y}.$$

Підставляємо знайдене $v(y)$ в попереднє рівняння. Маємо:

$$\frac{du}{dy}e^{2y}=-y,\quad du=-ye^{-2y}dy,$$

$$u=-\int ye^{-2y}dy=\frac{y}{2}e^{-2y}-\frac{1}{2}\int e^{-2y}dy=\frac{1}{4}e^{-2y}(2y+1)+C.$$

Підставляємо знайдені функції $u(y), v(y)$ в шуканий розв'язок

$$x=\left(\frac{1}{4}e^{-2y}(2y+1)+C\right)e^{2y}.$$

Отже, загальним розв'язком заданого рівняння є функція

$$x=Ce^{2y}+\frac{2y+1}{4}.$$

7. Диференціальні рівняння Бернуллі

Рівняннями Бернуллі називають рівняння вигляду

$$y'+p(x)y=y^k q(x), \tag{16}$$

де $k-$ будь-яке дійсне число таке, що $k\neq 0, k\neq 1$. Якщо $k=0$ або $k=1$, то рівняння (16) набуває відповідно вигляду

$$y'+p(x)y=q(x),\quad y'=(q(x)-p(x))y,$$

тобто є або лінійним рівнянням, або рівнянням з відокремлюваними змінними.

Рівняння вигляду (16) було запропоноване Якобом Бернуллі в 1695р. Метод розв'язку цього рівняння був опублікований в 1697 р. Йоганном Бернуллі.

Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного диференціального рівняння. Запишемо рівняння (16) у вигляді

$$\frac{y'}{y^k}+p(x)\frac{1}{y^{k-1}}=q(x). \tag{17}$$

Покладемо

$$\frac{1}{y^{k-1}}=z. \tag{18}$$

Тоді

$$y^{-k+1}=z,\quad z'=(-k+1)y^{-k}y'=(-k+1)\frac{y'}{y^k},\quad \frac{y'}{y^k}=\frac{z'}{1-k}$$

Рівняння (17) набуває вигляду

$$\frac{z'}{1-k}+p(x)z=q(x),\quad z'+(1-k)p(x)z=(1-k)q(x),$$

тобто є лінійним диференціальним рівнянням по z. Розв'язавши це рівняння, знайдемо функцію $z(x)$. Повертаємось до шуканої функції $y(x)$ (формула (18) і знаходимо розв'язок диференціального рівняння Бернуллі

$$y=\frac{1}{\sqrt[k-1]{z(x)}}.$$

Зауваження. Розв'язок диференціального рівняння Бернуллі можна шукати безпосередньо методом Бернуллі, не зводячи його попередньо до лінійного рівняння.

Приклад 8. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння

$$xy'-2y-x^2\sqrt{y}=0$$

при умові, що $y(1)=1$.

Розв'язання. Зробимо просте перетворення при $x\neq 0$. Маємо

$$y'-\frac{2}{x}y=x\sqrt{y}.$$

Це - диференціальне рівняння Бернуллі з $k=\frac{1}{2}$. Розв'язок шукаємо у вигляді $y=u(x)v(x)$. Маємо

$$u'v+uv'-\frac{2}{x}uv=x\sqrt{uv},\quad u'v+u\left(v'-\frac{2}{x}v\right)=x\sqrt{uv}.$$

Покладаємо

$$v'-\frac{2}{x}v=0$$

і із попереднього рівняння маємо друге диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$u'v = x\sqrt{uv}\,.$$

Розв’язуємо перше рівняння:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = 0, \quad \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = 2\ln|x| + C\,.$$

Нехай $C = 0$. Тоді дістаємо

$$v = x^2\,.$$

Друге диференціальне рівняння набуває вигляду

$$u'x^2 = x\sqrt{ux^2}\,.$$

Розв’язуємо це рівняння:

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{u}, \; \frac{du}{\sqrt{u}} = dx, \quad \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int dx, \quad 2\sqrt{u} = x + C, \quad u = \left(\frac{x+C}{2}\right)^2.$$

Оскільки $y = uv,$ то маємо

$$y = \frac{x^2(x+C)^2}{4}\,.$$

Використаємо початкову умову. Дістаємо $1 = \frac{1}{4}(1+C)^2$. Звідки маємо $C^{(1)} = 1, \quad C^{(2)} = -3$, тобто маємо дві функції

$$y_1 = \frac{x^2(x+1)^2}{4} \text{ та } y_2 = \frac{x^2(x-3)^2}{4}\,.$$

8. Диференціальні рівняння у повних диференціалах

Рівняння такого типу мають вигляд

$$P(x,y)dx + Q(x,y) = 0, \tag{19}$$

де

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU(x,y) \tag{20}$$

і функції $P(x,y), Q(x,y)$ мають неперервні частинні похідні в області D площини XOY, $a \le x \le b$, $c \le y \le d$.

Відомо, що вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом тоді і тільки тоді, якщо в заданій області D виконується умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{21}$$

Загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах має вигляд

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C.$$

Для спрощення покладають $x_0 = 0, y_0 = 0$ і тоді загальний інтеграл диференціального рівняння в повних диференціалах набуває вигляду:

$$\int_0^x P(x,0)dx + \int_0^y Q(x,y)dy = C. \tag{22}$$

Приклад 9. Знайти розв'язок рівняння

$$(8x + y^2)dx + (2xy + 5y^3)dy = 0.$$

Розв'язання. Маємо $P(x,y) = 8x + y^2, Q(x,y) = 2xy + 5y^3$. Тоді $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$, тобто умова (20) виконується. Із (22) дістаємо

$$\int_0^x 8x dx + \int_0^y (2xy + 5y^3)dy = C, \quad \frac{8x^2}{2} + 2x\frac{y^2}{2} + 5\frac{y^4}{4} = C.$$

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння є вираз

$$4x^2 + xy^2 + \frac{5}{4}y^4 = C.$$

Розв'язувати диференціальне рівняння в повних диференціалах можна інакше. А саме, порівнюючи вирази (19) і (20), маємо, що

$$dU(x,y) = 0.$$

При цьому $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \quad \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$.

Проінтегруємо по x першу рівність:

$$U = \int P(x, y)dx + \varphi(y). \tag{23}$$

Потрібно знайти функцію $\varphi(y)$. Для цього знайдемо похідну по y від отриманої рівності:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx + \varphi'_y.$$

З іншої сторони, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$. Зрівнюючи обидва вирази, маємо рівняння для знаходження $\varphi(y)$:

$$\varphi'_y = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx.$$

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}\, dy = 0.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є задане диференціальне рівняння рівнянням в повних диференціалах. Маємо

$$P(x, y) = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}), \quad Q(x, y) = \sqrt{x^2 - y} \quad .$$

Знаходимо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}}.$$

Тобто умова (68.26) виконується і задане рівняння є рівнянням в повних диференціалах. Тоді

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y) = 2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right).$$

Звідки

$$U = \int 2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx, \quad U = x^2 + \frac{2}{3}\left(x^2 - y\right)^{3/2} + \varphi(y).$$

Знаходимо похідну по y від отриманого виразу:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\sqrt{x^2 - y} + \varphi'_y.$$

Зрівнюючи цей вираз із $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) = -\sqrt{x^2 - y}$, отримуємо

$$-\sqrt{x^2 - y} + \varphi'_y = -\sqrt{x^2 - y}, \quad \varphi'_y = 0, \quad \varphi(y) = C.$$

Підставляючи знайдене значення $\varphi(y) = C$ у вираз для $U(x, y)$, дістаємо загальний інтеграл заданого диференціального рівняння

$$x^2 + \frac{2}{3}\left(x^2 - y\right)^{3/2} = C.$$