Лекція №13. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку

1. Диференціальні рівняння другого порядку

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1}$$

Розв'язком цього рівняння є функція $y = \varphi(x)$, графіком якої є інтегральна крива.

Початкові умови для такого рівняння мають вигляд

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \tag{2}$$

Геометрично початкові умови визначають початкову точку (x_0, y_0) і напрям дотичної y'_0 в цій точці.

Задача Коші для диференціального рівняння другого порядку полягає в тому, що серед усіх інтегральних кривих потрібно знайти криву, що проходить через задану точку (x_0, y_0) і має заданий напрям дотичної в цій точці y'_0.

Розглянемо типи диференціальних рівнянь, які зводяться до диференціальних рівнянь меншого порядку. Це - так звані диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку.

2. Диференціальні рівняння, права частина яких не залежить від функції y та її похідної y'

Рівняння такого типу мають вигляд

$$y^{(n)} = f(x). \tag{3}$$

Як відомо, похідна порядку n - це перша похідна від похідної порядку $n-1$:

$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}.$$

Тоді рівняння (3) набуває вигляду

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x), \quad dy^{(n-10} = f(x)dx.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння: $\int dy^{(n-1)} = \int f(x)dx.$ Дістанемо

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1.$$

Порядок рівняння знизився на одиницю. Повторюємо цю процедуру, враховуючи знайдене $y^{(n-1)}$:

$$y^{(n-1)} = \frac{dy^{(n-2)}}{dx}, \quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx, \quad y^{(n-2} = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx,$$

$$y^{(n-2)} = \iint f(x)dxdx + C_1 x + C_2.$$

Звідки

$$y^{(n-3)} = \int\int\int f(x)dxdxdx + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Продовжуючи диференціювання, дістанемо загальний розв'язок рівняння (3):

$$y = \int \ldots \int f(x)dx \cdots dx + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1} x + C_n.$$

Сталі знаходимо із початкових умов (якщо вони задані), знайшовши спочатку $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ і розв'язавши систему відносно $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Сталі можна знаходити і поступово, використовуючи початкові умови.

Приклад 1. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння

$$y''' = 24x$$

при умові, що $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2.$

Розв'язання. Інтегруємо задане рівняння послідовно:

$$y'' = 24\int x dx = 12x^2 + C_1 .$$

Використовуємо умову $y''(0) = 2.$ Із рівняння $y'' = 12x^2 + C_1$ дістаємо $C_1 = 2$ і підставляємо знайдене $C_1 = 2$. Тоді:

$$y'' = 12x^2 + 2 .$$

Звідки

$$y' = 12\int x^2 dx + 2\int dx = 4x^3 + 2x + C_2 .$$

Використовуємо умову $y'(0) = 1$. Із рівняння $y' = 4x^3 + 2x + C_2$ маємо $C_2 = 1$ і

$$y' = 4x^3 + 2x + 1.$$

Звідки

$$y = 4\int x^3 dx + 2\int x dx + \int dx = x^4 + x^2 + x + C_3 .$$

Використовуємо умову $y(0) = 0$. Маємо $0 = C_3$. Таким чином, розв'язком задачі Коші для заданого рівняння при заданих початкових умовах є функція

$$y = x^4 + x^2 + x.$$

3. Диференціальні рівняння, що не містять явно функцію $y(x)$

Рівняння такого типу мають вигляд

$$F(x, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0 . \qquad (4)$$

Знизити порядок такого рівняння можна, застосовуючи заміну

$$y' = p(x), \quad y'' = p', \ldots \quad y^{(n)} = p^{(n-1)},$$

де функція $p(x)$ має похідні до порядку $n-1$ включно. Тоді рівняння (4) набуває вигляду

$$F(x, p, p', ..., p^{(n-1)}) = 0.$$

Це рівняння пов'язує незалежну змінну x, функцію від цієї змінної $p(x)$ і похідні вже до порядку $n-1$ включно, тобто порядок рівняння (4) знизився на одиницю.

Зокрема, диференціальне рівняння **другого порядку**, що не містить явно функцію $y(x)$, має вигляд

$$F(x, y', y'') = 0. \qquad (5)$$

Заміною

$$y' = p(x), \quad y'' = p'(x) \qquad (6)$$

диференціальне рівняння другого порядку (5) зводиться до диференціального рівняння першого порядку

$$F(x, p, p') = 0 \quad \text{або} \quad F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

Далі знаходимо розв'язок цього рівняння

$$p = p(x, C_1)$$

і враховуємо, що $p = \dfrac{dy}{dx}$ і отримуємо рівняння з відокремлюваними змінними вигляду (3):

$$\frac{dy}{dx} = p(x, C_1).$$

Звідки $dy = p(x, C)dx$ і розв'язок диференціального рівняння (5) набуває вигляду

$$y = \int p(x, C_1)dx + C_2.$$

Приклад 2. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння

$$y''x\ln x = y',$$

при початкових умовах: $y(e) = 2,\ y'(e) = 3.$

Розв'язання. Задане диференціальне рівняння не містить явно функцію $y(x)$. Зробимо заміну

$$y' = p(x),\ y'' = p' = \frac{dp}{dx}.$$

Рівняння набуває вигляду

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x\ln x}, \quad x \neq 0,\ x \neq 1.$$

Це - рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x\ln x}, \quad \int\frac{dp}{p} = \int\frac{dx}{x\ln x}, \quad \ln|p| = \int\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + \ln C_1,$$

$$p = C_1 \ln x.$$

Беручи до уваги, що $p = \dfrac{dy}{dx} = y'$, знайдемо сталу C_1, використовуючи початкову умову $y'(e) = 3$: $3 = C_1 \ln e, C_1 = 3$. Підставляємо знайдену сталу в попереднє рівняння. Інтегруючи частинами, дістаємо

$$\frac{dy}{dx} = 3\ln x, \quad dy = 3\ln x\,dx, \quad y = 3\int \ln x\,dx = 3\left(x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx\right).$$

Звідки маємо

$$y = 3x(\ln x - 1) + C_2.$$

Для знаходження сталої C_2 використаємо умову $y(e) = 2.$

А саме, $2 = 3e(\ln e - 1) + C_2, \quad C_2 = 2.$

Отже, розв'язком задачі Коші є функція

$$y = 3x(\ln x - 1) + 2.$$

4. Диференціальні рівняння, що не містять явно незалежної змінної x

Диференціальні рівняння такого типу мають вигляд

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Застосуємо заміну $y' = p(y)$. Функція $p(y)$ є складною функцією від x. Тоді

$$y'' = \frac{dp}{dy}p, \quad y''' = \frac{d^2p}{dy^2}p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2, \ldots$$

Задане рівняння набуває вигляду

$$F(y, p, p'_y, \ldots, p_y^{(n-1)}) = 0.$$

Диференціальне рівняння **другого порядку**, що не містить явно незалежної змінної x має вигляд

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{7}$$

і зводиться до диференціального рівняння першого порядку за допомогою заміни

$$y' = p(y), \quad y'' = \frac{dp}{dy}p, \tag{8}$$

тобто набуває вигляду

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0. \tag{9}$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо

$$p = p(y, C_1).$$

Враховуємо, що $p = \dfrac{dy}{dx}$. Тоді із попередньої рівності маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1).$$

Відокремлюємо змінні та знаходимо розв'язок:

$$x = \int \frac{dy}{p(y, C_1)} + C_2.$$

Зауваження. При заміні

$$y' = p(y), \quad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

у диференціальному рівнянні (9) можуть з’явитися окремі розв’язки, що не містяться у загальному розв’язку.

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$2yy'' - (y')^2 - 1 = 0.$$

Розв’язання. Задане рівняння – це диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно x, тобто вигляду (69.12).

Зробимо заміну:

$$y' = p(y), \quad y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Задане рівняння набуває вигляду

$$2yp\frac{dp}{dy} = p^2 + 1, \quad 2ypdp = (p^2 + 1)dy.$$

Це диференціальне рівняння, при диференціалах dp та dy якого є добутки функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної. Тобто, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’язуємо його. Маємо

$$\frac{2pdp}{p^2+1} = \frac{dy}{y}, \quad \int \frac{2pdp}{p^2+1} = \int \frac{dy}{y}, \quad \ln\left|p^2+1\right| = \ln|y| + \ln|C_1|, \quad p^2 + 1 = C_1 y.$$

$$p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}.$$

Але $\quad p = \dfrac{dy}{dx}. \quad$ Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 y - 1}, \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm dx, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm\int dx,$$

$$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y-1}=\pm x+C_2, \quad \sqrt{C_1\, y-1}=\frac{C_1}{2}\left(C_2 \pm x\right).$$

Отже, загальний розв’язок заданого диференціального рівняння має вигляд:

$$y=\frac{C_1}{4}\left(C_2 \pm x\right)^2+\frac{1}{C_1}.$$

Приклад 4. Знайти розв’язок задачі Коші для диференціального рівняння

$$y^2 y''=-1,$$

якщо $y(0)=2, \;\; y'(0)=1.$

Розв’язання. Задане рівняння – це диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно x, тобто вигляду (69.12). Зробимо заміну:

$$y'=p(y), \quad y''=p\frac{dp}{dy}.$$

Дістанемо:

$$y^2 p\frac{dp}{dy}=-1, \quad pdp=-\frac{dy}{y^2}, \quad \int pdp=-\int\frac{dy}{y^2}, \quad \frac{p^2}{2}=\frac{1}{y}+C_1.$$

Знайдемо сталу C_1, використовуючи , що $y'=p$ і початкові умови $y(0)=2, y'(0)=1.$ Маємо

$$\frac{(y')^2}{2}=\frac{1}{y}+C_1, \quad \frac{1^2}{2}=\frac{1}{2}+C_1, \quad C_1=0.$$

Тоді

$$\frac{(y')^2}{2}=\frac{1}{y}, \quad (y')^2=\frac{2}{y}, \quad y'=\pm\sqrt{\frac{2}{y}}, \quad \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{2}{y}}, \quad \sqrt{y}dy=\pm\sqrt{2}dx,$$

$$\int\sqrt{y}dy=\pm\sqrt{2}\int dx, \quad \frac{2}{3}\sqrt{y^3}=\pm\sqrt{2}x+C_2.$$

Сталу C_2 визначимо із початкової умови $y(0)=2$:

$$\frac{2}{3}\sqrt{2^3} = \pm\sqrt{2}\cdot 0 + C_2, \quad C_2 = \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Підставляємо знайдену сталу у розв'язок і дістаємо

$$\frac{2}{3}\sqrt{y^3} = \sqrt{2}x + \frac{4}{3}\sqrt{2}, \quad \sqrt{2y^3} = 3x + 4.$$

Отже, розв'язком задачі Коші для заданого диференціального рівняння є функція, задана у неявному вигляді

$$y^3 = \frac{(3x+4)^2}{2}.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' tg\, y = 2(y')^2.$$

Розв'язання. Задане рівняння – це диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно x, тобто рівняння вигляду (7). Зробимо заміну

$$y' = p(y),\ y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Задане рівняння набуває вигляду:

$$p\frac{dp}{dy} tg\, y = 2p^2, \qquad p\left(\frac{dp}{dy} tg\, y - 2p\right) = 0.$$

Дістаємо два диференціальні рівняння:

$$p = 0 \quad \text{та} \quad \frac{dp}{dy} tg\, y - 2p = 0.$$

Із першого рівняння дістаємо

$$y' = 0$$

і маємо *окремий розв'язок* заданого диференціального рівняння $y = C$, який не можна отримати із загального розв'язку.

Друге рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його.

$$\frac{dp}{p}=\frac{2dy}{tg\,y}, \qquad \int\frac{dp}{p}=2\int\frac{dy}{tg\,y}, \quad \ln|p|=2\ln|\sin y|+\ln|C_1|, \;\; p=C_1\sin^2 y.$$

Оскільки $p=y'$, то дістаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{dx}=C_1\sin^2 y.$$

Звідки

$$\frac{dy}{\sin^2 y}=C_1dx, \qquad \int\frac{dy}{\sin^2 y}=C_1\int dx.$$

Дістаємо загальний інтеграл заданого диференціального рівняння:

$$ctg\,y=-C_1x+C_2.$$