Лекція №14. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

1. Основні означення і положення

Означення. **Лінійним диференціальним рівняння порядку** n називається рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x),$$

де функції $p_1(x),\ldots,p_{n-1}(x), p_n(x), f(x)$ - задані і неперервні в проміжку (a,b).

Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння порядку n зі змінними коефіцієнтами $p_1(x), p_2(x),\ldots,p_n(x), f(x)$ в загальному випадку не є можливим. Навіть для диференціальних рівнянь другого порядку знайти загальний розв'язок можна знайти лише, якщо відомий один розв'язок.

Але є клас лінійних диференціальних рівнянь, для яких розв'язок можна знайти. Це диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Означення. **Лінійним** диференціальним рівнянням порядку n **зі сталими коефіцієнтами** називаються рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \qquad (1)$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - числа, $f(x)$ - функція, неперервна і визначена для всіх $x \in (a,b)$.

Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння (1) називається **лінійним неоднорідним** диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Якщо $f(x) = 0$, то рівняння має вигляд

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (2)$$

і називається **лінійним однорідним** диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Із теореми про структуру розв'язку лінійного однорідного рівняння відомо, що загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (3)$$

де $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - лінійно незалежні розв'язки рівняння (2).

Знайдемо ці розв'язки. Розв'язок рівняння (2) шукатимемо у вигляді

$$y = e^{\lambda x}, \qquad (4)$$

де λ - деяке число.

Знаходимо похідні $y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \ldots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ і підставляємо їх і y в рівняння (2):

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \ldots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = 0$$

або

$$\left(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n\right) e^{\lambda x} = 0. \qquad (5)$$

Звідки, враховуючи, що $e^{\lambda x} \neq 0$, дістаємо алгебраїчне рівняння

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \qquad (6)$$

яке називається **характеристичним рівнянням**.

Формально характеристичне рівняння дістаємо із однорідного рівняння (2), заміною

$$y^{(n)} \text{ на } \lambda^n,\ y^{n-1} \text{ на } \lambda^{n-1}, \quad ,\ y' \text{ на } \lambda, \quad y \text{ на } 1.$$

Розв'язуємо характеристичне рівняння. Отримуємо n коренів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тоді, враховуючи (4), маємо n розв'язків диференціального рівняння (2):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}. \qquad (7)$$

Розглянемо різні випадки коренів характеристичного рівняння (6).

2.1. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні

Нехай

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_{n-1} \neq \lambda_n.$$

Тоді розв'язки (7) лінійно незалежні тому, що функції $y_k, k = 1,2,\ldots,n,$ попарно лінійно незалежні:

$$\frac{y_k}{y_m}=\frac{e^{\lambda_k x}}{e^{\lambda_m x}}=e^{(k-m)x}\neq const. \quad (k\neq m)$$

і загальний розв'язок (3) однорідного диференціального рівняння (2) має вигляд

$$Y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\ldots+C_ne^{\lambda_n x}. \tag{8}$$

2.2. Корені характеристичного рівняння дійсні і кратні

Позначимо

$$P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n.$$

Тоді характеристичне рівняння набуває вигляду $P(\lambda)=0.$

Запишемо рівність (70.5) у вигляді

$$L(e^{\lambda x})=P(\lambda)e^{\lambda x} \tag{9}$$

Якщо λ_1 корінь характеристичного рівняння, то

$$P(\lambda_1)=0.$$

Якщо цей корінь має кратність 2, то і

$$P'_\lambda(\lambda_1)=0.$$

Знаходимо похідну по λ від обох частин рівності (9):

$$\frac{\partial L(e^{\lambda x})}{\partial\lambda}=\frac{\partial(P(\lambda)e^{\lambda x})}{\partial\lambda}=xP(\lambda)e^{\lambda x}+\frac{\partial P(\lambda)}{\partial\lambda}e^{\lambda x}.$$

З іншої сторони, похідна

$$\frac{\partial L(e^{\lambda x})}{\partial\lambda}=xL(e^{\lambda x})=L(xe^{\lambda x}).$$

Зрівнюючи праві частини отриманих рівностей, дістаємо:

$$L(xe^{\lambda x})=\frac{\partial P(\lambda)}{\partial\lambda}e^{\lambda x}+xP(\lambda)e^{\lambda x}. \tag{10}$$

Для кореня λ_1 із (10) маємо

$$L(xe^{\lambda_1 x})=\frac{\partial P(\lambda_1)}{\partial\lambda}e^{\lambda_1 x}+xP(\lambda_1)e^{\lambda_1 x}.$$

Оскільки λ_1 - корінь кратності 2, то $P(\lambda_1)=0$ і $\dfrac{\partial P(\lambda_1)}{\partial\lambda}=0$. Тоді із попередньої рівності дістаємо, що

$$L(xe^{\lambda_1 x})=0.$$

Це означає, що $y=xe^{\lambda_1 x}$ є розв'язком диференціального рівняння (2).

Отже, кореню λ_1 кратності 2 відповідають два лінійно незалежні розв'язки

$$y_1=e^{\lambda_1 x} \text{ та } y_2=xe^{\lambda_1 x}.$$

Для диференціального рівняння порядку n маємо: якщо λ_1 корінь кратності 2, а $\lambda_3\neq\lambda_4\neq\ldots\neq\lambda_n$, то загальний розв'язок (3) однорідного рівняння набуває вигляду

$$Y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + C_3 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_{n-1} x}.$$

Аналогічно можна довести, що якщо λ_1 корінь кратності k, то йому відповідає k лінійно незалежних функцій

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = x e^{\lambda_1 x}, y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots y_k = x^k e^{\lambda_1 x}.$$

2.3. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені

Доведемо спочатку наступну теорему.

Теорема 1. Якщо функція $y = u(x) + iv(x)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння $L(y) = 0,$ то і дійсна частина $u(x)$, і уявна частина $v(x)$ розв'язку є також розв'язками цього рівняння: $L(u) = 0, L(v) = 0$.

Доведення. Нехай $y = u(x) + iv(x)$ є розв'язком однорідного рівняння, тобто $L(u(x) + iv(x)) = 0.$ Враховуючи властивість лінійності 3, маємо $L(y) = L(u(x)) + iL(v(x))$. Комплексно-значна функція дорівнює нулю, якщо і дійсна, і уявна її частини дорівнюють нулю, тобто $L(u) = 0$ і $L(v) = 0.$ Теорема доведена.

Нехай $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ корінь характеристичного рівняння (5). Це рівняння має і спряжений корінь $\lambda_2 = \alpha - \beta i$. Розв'язок (4), що відповідає кореню $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, має вигляд

$$y = e^{(\alpha + \beta\, i) x} = e^{\alpha x} e^{i \beta x}.$$

Використаємо формулу Ейлера: $e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$. Тоді

$$y = e^{\alpha x} \left(\cos \beta x + i \sin \beta x \right) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Згідно з доведеною вище теоремою розв'язками диференціального рівняння (71.2), що відповідають кореню $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, є функції

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Ці функції лінійно незалежні тому, що

$$\frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = ctg \beta x \neq const, \quad x \neq 0.$$

Аналогічні розв'язки маємо і у випадку комплексно спряженого кореня $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

Отже, у випадку комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння, загальний розв'язок однорідного рівняння (70.2), при умові, що інші корені дійсні різні, матиме вигляд

$$Y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + C_3 e^{\lambda_3 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_{n-2}}.$$

Таким чином, в загальному випадку **фундаментальна система розв'язків** однорідного диференціального рівняння **є лінійною комбінацією лінійно незалежних функцій:**

e^{λ_k}, якщо корені λ_k дійсні і різні,

$$x^m e^{\lambda_1 x}, \quad \text{якщо } \lambda_1 \text{ дійсний корінь кратності } m-1,$$

$$x^m e^{\alpha x}\cos\beta x, x^m e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \text{якщо } \lambda = \alpha \pm i\beta \text{ корінь кратності } m-1.$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y^V - y^{IV} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0.$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^5 - \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Знайдемо корені цього рівняння :

$\lambda^4(\lambda-1) + 2\lambda^2(\lambda-1) + (\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = (\lambda-1)(\lambda^2-1)^2 = 0.$

Звідки

$$\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i\,.$$

Маємо дійсний корінь $\lambda_1 = 1$ і комплексні корені $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$ ($\alpha = 0,\ \beta = 1)$ кратності 2.

Фундаментальною системою розв'язків є система

$$e^x, \ \cos x, \quad x\cos x, \quad \sin x, \quad x\sin x\,.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$Y = C_1 e^x + C_2\cos x + C_3 x\cos x + C_4\sin x + C_5 x\sin x.$$

Отже, загальним розв'язком заданого рівняння є функція

$$Y = C_1 e^x + \left(C_2 + C_3 x\right)\cos x + \left(C_4 + C_5 x\right)\sin x.$$

3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{11}$$

де $a_1, \quad a_2$ - числа

Це рівняння має два лінійно незалежні розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$, тобто такі розв'язки, що задовольняють умову

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const.$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{12}$$

де $y_1, \quad y_2$ – лінійно незалежні розв'язки рівняння (11), C_1, C_2 – довільні сталі.

Характеристичне рівняння диференціального рівняння (11) є квадратним алгебраїчним рівнянням

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \tag{13}$$

яке дістаємо із рівняння (71.11) заміною

$$y'' \text{ на } \lambda^2,\ y' \text{ на } \lambda, \quad y \text{ на } 1.$$

Корені рівняння (13) визначаються знаком дискримінанта

$$D = a_1^2 - 4a_2.$$

В залежності від знака дискримінанта маємо різні випадки загального розв'язку однорідного рівняння (11). Розглянемо ці випадки.

I. **Нехай** $D > 0$**.**

Тоді корені характеристичного рівняння (13) дійсні і різні $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Функції $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ є лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння (11). Загальний розв'язок має вигляд

$$Y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{14}$$

II Нехай $D = 0$

Тоді корені характеристичного рівняння (13) однакові $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння (11) є функції $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$. Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$Y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}. \tag{15}$$

III Нехай $D < 0$

Тоді корені характеристичного рівняння (13) комплексно спряжені $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i$, де $\alpha = -\frac{a_1}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2}$, $i = \sqrt{-1}$. Функції $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ є лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння. Загальний розв'язок має вигляд

$$Y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x). \tag{16}$$

Приклад 2. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

при умові, що $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння, заміняючи y'' на λ^2, y' на λ, y на 1 і розв'язуємо його:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0,\ D = 4 - 20 = -16 < 0.$$

Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд (70.16), де $\alpha = -\frac{a_1}{2} = -\frac{-2}{2} = 1,\ \beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2} = \frac{\sqrt{|-16|}}{2} = 2$,

тобто

$$Y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Для знаходження сталих C_1, C_2 потрібно використати початкові умови. Спочатку знаходимо похідну:

$$Y' = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x).$$

Тоді, враховуючи початкові умови $y(0)=1$, $y'(0)=1$, маємо

$1 = e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0)$, $C_1 = 1$,

$1 = e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - 2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0)$, $\quad 1 = 1 + 2C_2$, $\quad C_2 = 0$.

Підставляємо знайдені сталі у загальний розв'язок. Дістаємо розв'язок задачі Коші для заданого рівняння при заданих початкових умовах:

$$y = e^x \cos 2x.$$

4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами другого порядку має вигляд

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \qquad (17).$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (11) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння (17), тобто має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \tilde{y}, \qquad (18)$$

де y_1, y_2 - лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння (11), $\tilde{y}$ - частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння. Частинний розв'язок в загальному випадку знаходиться за методом варіації довільних сталих - методом Лагранжа.

У деяких випадках частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (17) можна знайти іншим методом.

4.1. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з правою частиною спеціального вигляду

Частинний розв'язок $\tilde{y}$ шукають у вигляді, аналогічним вигляду правої частини з невідомими коефіцієнтами, які знаходять зрівнюючи вирази при однакових степенях x або при виразах, що містять $\sin \beta x$ та $\cos \beta x$. При цьому вигляд частинного розв'язку пов'язаний з виглядом коренів характеристичного рівняння.

Нехай λ_1 та λ_2 - корені відповідного характеристичного рівняння (13).

Розглянемо різні випадки вигляду правої частини $f(x)$ диференціального рівняння (17).

I *Права частина неоднорідного рівняння є многочленом степеня* n, тобто має вигляд

$$\underline{f(x) = P_n(x).} \quad (19)$$

<u>а)</u> *Нехай* $\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0$. Тоді частинний розв'язок шукають у вигляді многочлена степеня n, що містить усі степені x, починаючи із n

$$\tilde{y} = A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n. \quad (20)$$

Невідомі коефіцієнти $A_k, \quad k = 1,..n,$ потрібно визначити.

<u>б)</u> Один із коренів характеристичного рівняння (71.13) є нуль: $\lambda_1 = 0$ або $\lambda_2 = 0$. Тоді частинний розв'язок шукають у вигляді

$$\tilde{y} = \left(A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n\right) x. \quad (21)$$

II *Права частина неоднорідного рівняння має вигляд*

$$\underline{f(x) = e^{kx} P_n(x).} \quad (22)$$

<u>а)</u> Якщо жоден із коренів характеристичного рівняння (13) не співпадає із числом k: $k \neq \lambda_1, \quad k \neq \lambda_2$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = \left(A_1 x^n + A_2 x_{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n\right) e^{kx}. \quad (23)$$

<u>б)</u> Якщо один із коренів характеристичного рівняння (71.13) співпадає із k, наприклад, $k = \lambda_1, \quad k \neq \lambda_2$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = \left(A_1 x^n + A_2 x_{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n\right) x e^{kx}. \quad (24)$$

<u>в)</u> Якщо два корені характеристичного рівняння (13) співпадають із числом k: $k = \lambda_1 = \lambda_2$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = \left(A_1 x^n + A_2 x_{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n\right) x^2 e^{kx}. \quad (25)$$

III *Права частина неоднорідного рівняння має вигляд*

$$\underline{f(x) = P_n(x) \cos \beta^* x + Q_m(x) \sin \beta^* x,} \quad (26)$$

де $P_n(x), \quad Q_m(x) -$ многочлени відповідно степеня n та m.

Знаходимо число l, яке є найбільшим із степенів многочленів n та m:

$$l = \max\{n, m\}.$$

Складаємо так зване **характеристичне число правої частини**

$$k^* = \beta^* i.$$

<u>а)</u> Якщо k^* не співпадає з коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (71.24) шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = \left(A_1 x^l + \ldots + A_{l-1} x + A_l\right) \cos \beta^* x + \left(B_1 x^l + \ldots + B_{l-1} x + B_l\right) \sin \beta^* x, \quad (27)$$

де $A_j, B_j, \quad j = 1,2,\ldots,l,$ невідомі коефіцієнти.

<u>б)</u> Якщо k^* співпадає з коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (71.24) шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = \left(A_1 x^l + \ldots + A_{l-1} x + A_l\right) x \cos \beta^* x + \left(B_1 x^l + \ldots + B_{l-1} x + B_l\right) x \sin \beta^* x. \quad (28)$$

IV. *Права частина неоднорідного рівняння має вигляд*

$$\underline{f(x) = e^{\alpha^* x} \left(P_n(x) \cos \beta^* x + Q_m(x) \sin \beta^* x\right).} \quad (29)$$

Знаходимо число

$$l = \max\{n, m\}.$$

Складаємо так зване характеристичне число правої частини

$$k^* = \alpha^* + \beta^* i$$

і порівнюємо k^* із коренями характеристичного рівняння (13).

а) Якщо характеристичне число правої частини не співпадає з коренем характеристичного рівняння, тобто

$$\alpha^* + \beta^* i \neq \lambda_1 = \alpha + \beta i,$$

то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (71.24) шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = e^{\alpha^* x}((A_1 x^l + \ldots + A_{l-1} x + A_l)\cos\beta^* x + (B_l x^l + \ldots + B_{l-1} x + B_l)\sin\beta^* x). \quad (30)$$

б) Якщо характеристичне число правої частини співпадає з коренем характеристичного рівняння (71.13), тобто

$$\alpha^* + \beta^* i = \lambda_1 = \alpha + \beta i,$$

то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = e^{\alpha^* x}((A_1 x^l + \ldots + A_{l-1} x + A_l)\cos\beta^* x + (B_l x^l + \ldots + B_{l-1} x + B_l)\sin\beta^* x)x. \quad (31)$$

Зауваження. У випадках III та IV може бути, що один із многочленів або $P_n(x) = 0$, або $Q_m(x) = 0$. В цьому випадку число $l = m$ або $l = n$ відповідно. Розв'язок $\tilde{y}$ тим не менше шукаємо у загальному вигляді (27), (28), (30), (31), які містить і $\cos\beta^* x$, і $\sin\beta^* x$.

4.2. Схема знаходження розв'язку лінійного неоднорідного рівняння

Враховуючи вище викладене, доцільно використовувати наступну схему знаходження розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами другого порядку. Записуємо відповідне однорідне рівняння вигляду (11).

1. Записуємо його характеристичне рівняння (13).
2. Знаходимо корені характеристичного рівняння і знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння відповідно у вигляді або (14), або (15), або (16).
3. Перевіряємо, чи є права частина неоднорідного рівняння (17) спеціального вигляду I-IV. Якщо права частина спеціального вигляду, то переходимо до п. 5 Якщо ж -ні, то частинний розв'язок шукаємо методом Лагранжа.
4. В залежності від коренів характеристичного рівняння, шукаємо розв'язок неоднорідного рівняння відповідно у вигляді (20), (21), або (23)--(25), або (27), (28), або (30), (31).
5. Для визначення невідомих коефіцієнтів A_j, B_j $(j = 1,2,..l)$ у цих виразах знаходимо похідні $\tilde{y}', \tilde{y}''$, підставляємо $y, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в задане неоднорідне рівняння (17) і зрівнюємо вирази при однакових степенях x або при $x^k \cos\beta^* x, \quad x^k \sin\beta^* x,\ k = 0,1,\ldots,l.$
6. Знайдені числа підставляємо у відповідний вигляд частинного розв'язку. Маємо $\tilde{y}$.

7. Шуканий загальний розв’язок неоднорідного рівняння (17) дорівнює сумі загального розв’язку відповідного однорідного рівняння і знайденого частинного розв’язку неоднорідного рівняння.

Приклад 3. Знайти розв’язок задачі Коші диференціального рівняння

$$y'' - y = xe^x.$$

при умові, що $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Розв’язання. Записуємо відповідне однорідне рівняння

$$y'' - y = 0.$$

Замінюємо y'' на λ^2, y на 1. Маємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Знаходимо корені цього рівняння: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1.$ Корені - різні, дійсні. Отже, розв’язок має вигляд (14), тобто

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$$

Записуємо праву частину заданого неоднорідного рівняння:

$$f(x) = xe^x,$$

тобто, маємо праву частину спеціального вигляду II xe^x, де $P_n(x) = x, \quad n = 1.$ Число $k = 1$ і співпадає з одним із коренів характеристичного рівняння $k = \lambda_2 = 1.$ Тому частинний розв’язок шукаємо у вигляді (24):

$$\tilde{y} = (A_1 x + A_2) xe^x.$$

Знаходимо $\tilde{y}''$. Маємо

$$\tilde{y}' = (2A_1 x + A_2 + A_1 x^2 + A_2 x)e^x,$$

$$\tilde{y}'' = (2A_1 + 2A_1 x + A_2 + 2A_1 x + A_2 + 2A_1 x^2 + A_2 x)e^x.$$

Підставляємо $\tilde{y}, \tilde{y}''$ в задане рівняння:

$$(2A_1 x^2 + 4A_1 x + A_2 x + 2A_1 + 2A_2)e^x - (A_1 x^2 + A_2 x)e^x = xe^x.$$

Після скорочення на $e^x \neq 0,$ маємо рівняння

$$4A_1 x + 2A_1 + 2A_2 = x.$$

Зрівнюємо коефіцієнти при x та при x^0. Дістаємо

$$4A_1 = 1, \quad 2A_1 + 2A_2 = 0, \quad A_1 = \frac{1}{4}, \quad A_2 = -\frac{1}{4}.$$

Знайдені числа підставляємо у вираз для $\tilde{y}$:

$$\tilde{y} = \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x.$$

Шуканий загальний розв’язок заданого неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв’язку відповідного однорідного рівняння і знайденого частинного розв’язку неоднорідного рівняння, тобто

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x.$$

Визначимо сталі C_1, C_2 із початкових умов. Знаходимо спочатку

$$y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{1}{4}\left(2x - 1 + x^2 - x\right)e^x.$$

Тоді

$$0 = C_1 + C_2, \quad 1 = -C_1 + C_2 - \frac{1}{4}, \quad C_2 = \frac{5}{8}, \qquad C_1 = -\frac{5}{8}.$$

Отже, розв'язком задачі Коші для заданого рівняння є функція

$$y = \frac{5}{8}e^{-x} + \frac{1}{8}\left(2x^2 - 2x - 5\right)e^x.$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 7y' + 6y = 114\sin x.$$

Розв'язання. Записуємо відповідне однорідне рівняння

$$y'' - 7y' + 5y = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 - 7\lambda + 5 = 0.$$

Знаходимо корені цього рівняння: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 6.$ Корені - дійсні, різні. Отже, розв'язок однорідного рівняння має вигляд (14):

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{6x}.$$

Записуємо праву частину заданого неоднорідного рівняння :

$$f(x) = 114\sin x,$$

тобто права частина заданого рівняння має вигляд III, де $P_n(x) = 0, \quad Q_m(x) = 114, \ m = 0$. Тоді $l = 0$.

Характеристичне число правої частини $k^* = \beta^* i$. В нашому випадку $\beta^* = 1, \quad k^* = i$, отже, k^* не співпадає з коренями характеристичного рівняння $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 6$. Тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді (27):

$$\tilde{y} = A\cos x + B\sin x.$$

Знаходимо похідні

$$\tilde{y}' = -A\sin x + B\cos x, \quad \tilde{y}'' = -A\cos x - B\sin x$$

і підставляємо $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в задане рівняння:

$$-A\cos x - B\sin x - 7(-A\sin x + B\cos x) + 6(A\cos x + B\sin x) = 114\sin x,$$

$$(5A - 7B)\cos x + (7A + 5B)\sin x = 114\sin x.$$

Зрівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ та $\sin x$, маємо

$$5A - 7B = 0, \quad 7A + 5B = 114, \quad B = 5, \quad A = 7.$$

Знайдені числа підставляємо в шуканий частинний розв'язок. Дістаємо

$$\tilde{y} = 7\cos x + 5\sin x.$$

Шуканий загальний розв’язок заданого неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + 7\cos x + 5\sin x.$$