Лекція №15. Системи диференціальних рівнянь

1. Нормальні системи

1.1. Основні положення і означення

Сукупність співвідношень вигляду

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}; \ldots; y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_k)}) = 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(m_1)}; \ldots; y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_k)}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}; \ldots; y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_k)}) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

називається **системою диференціальних рівнянь**.

Система диференціальних рівнянь - це сукупність рівнянь, які пов’язують незалежну змінну x, n шуканих функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ і їх похідні до порядків $m_1, m_2, \ldots, m_k$. При цьому кількість шуканих функцій і кількість рівнянь співпадають.

Порядок старшої похідної називається **порядком системи**.

Якщо порядок системи дорівнює одиниці, то система називається **системою першого порядку**.

Означення. **Нормальними** системами називаються системи диференціальних рівнянь першого порядку, розв’язаних відносно похідної

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ... y_n). \end{cases} \tag{2}$$

де $y_1, y_2, ..., y_n$ шукані функції змінної x, функції $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), ..., f_n(x, y_1, y_2, ... y_n)$, визначені для значень $x \in (a, b)$.

Таку систему називають ще **системою порядку** n**,** згідно з кількістю рівнянь.

Розв'язком системи (2) називається будь-яка сукупність визначених в інтервалі (a, b) неперервно диференційовних функцій

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), ..., y_n = \varphi_n(x),$$

підставляючи яку в систему (73.2), дістаємо тотожності

$$\varphi_1'(x) \equiv f_1(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)),$$
$$\varphi_2'(x) \equiv f_2(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)),$$
$$\dots.$$
$$\varphi_1'(x) \equiv f_n(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)).$$

Система називається **автономною**, якщо праві частини рівнянь системи (2) не залежать явно від змінної x, тобто система має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(y_1, y_2, ... y_n). \end{cases} \tag{3}$$

Приклад 1. Розглянемо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 5y_1 + 4y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 4y_1 + 5y_2. \end{cases}$$

Покажемо, що розв'язками цієї системи є функції $y_1 = e^x, y_2 = -e^x$.

Дійсно, підставляємо ці функції у рівняння заданої системи:

$$\begin{cases} e^x = 5e^x + 4(-e^x), \\ -e^x = 4e^x + 5(-e^x) \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} e^x \equiv e^x, \\ -e^x \equiv -e^x. \end{cases}$$

Можна перевірити, що розв'язками системи є функції $y_1 = e^{9x}$, $y_2 = e^{9x}$, а також функції

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{9x},$$
$$y_2 = -C_1 e^x + C_2 e^{9x},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

1.2. Задача Коші. Достатня умова існування і єдиності розв'язку

Надалі розглядатимемо, як правило, системи третього або другого порядку. Основні положення щодо цих систем мають місце також і для систем порядку n.

Розглянемо нормальну систему третього порядку у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t, x, y, z), \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t, x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dt} = f_3(t, x, y, z). \end{cases} \tag{4}$$

Функції $f_1(t,x,y,z)$, $f_2(t,x,y,z)$, $f_3(t,x,y,z)$ визначені в деякій області D простору $Oxyz$. Ці функції залежать від координат x, y, z та часу t. Розв'язку

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \tag{5}$$

системи (73.4) відповідає деяка крива в просторі, задана параметрично. Ця крива називається **інтегральною кривою**.

Задачею Коші називають наступну задачу. Серед усіх розв'язків системи

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

знайти такий розв'язок, у якому знайдені функції набувають задані числові значення при заданому значенні $t = t_0$:

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0 \tag{6}$$

Геометрично це означає, що серед усіх інтегральних кривих треба знайти ту, що проходить через задану точку $(x_0; y_0; z_0)$. З механічної точки зору це означає, що серед усіх траєкторій руху треба знайти таку траєкторію, що точка, яка рухається по цій траєкторії, в заданий момент часу t_0 знаходиться в заданій точці. Точка $(x_0; y_0; z_0)$ називається **початковою точкою руху**, а t_0 - **початковим моментом руху.**

Числа t_0, x_0, y_0, z_0 називаються **початковими даними** руху, а умови (6) - **початковими умовами**.

Початкові умови записують ще так:

$$x\big|_{t=t_0} = x_0, y\big|_{t=t_0} = y_0, z\big|_{t=t_0} = z_0.$$

Приклад 2. Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y, \end{cases}$$

що задовольняє початкові умови $x(0) = 1, y(0) = 1$.

Розв'язання. Із першого рівняння маємо $x = C_1 e^{3t}$. Із другого рівняння маємо $y = C_2 e^t$. Використаємо початкові умови, а саме дістаємо $1 = C_1 e^0$, $1 = C_2 e^0$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$. Тобто рух описується кривою $x = e^{3t}, y = e^t$ або $x = y^3$. Це - кубічна парабола (рис. 1). Із точки $M_0(1;1)$ точка $M(x; y)$ при $t > 0$ прямує в нескінченність.

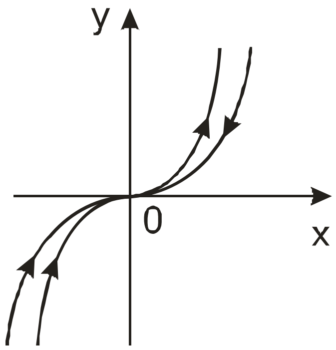

Рис. 1

1.3. Загальний, частинний і особливий розв'язки нормальних систем

Означення. **Загальним розв'язком** системи (4) називається множина неперервних по t функцій

$$x = \varphi_1(t, C_1, C_2, C_3), \quad y = \varphi_2(t, C_1, C_2, C_3), \quad z = \varphi_3(t, C_1, C_2, C_3), \tag{7}$$

заданих в області визначення змінних $t, C_1 C_2, C_3$, якщо

1) ця сукупність є розв'язком системи (4) при всіх значеннях сталих ;

2) сталі C_1, C_2, C_3 знаходяться однозначно із системи (7) при заданих початкових умовах (6).

Частинним розв'язком системи (4) називають розв'язок, який можна дістати із загального розв'язку при заданих значеннях сталих C_1, C_2, C_3. Тобто, розв'язуючи задачу Коші , ми дістаємо саме частинний розв'язок системи.

Особливим розв'язком системи (4) називають розв'язок, в кожній точці якого порушуються умови теореми єдності розв'язку задачі Коші для цієї системи. Тобто особливий розв'язок не можна отримати із загального розв'язку.

Приклад 4. Знайти розв'язки системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = t + 2x - \sqrt{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2\sqrt{y}. \end{cases}$$

Розв'язання. Із другого рівняння системи маємо при $y \neq 0$

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dt, \quad \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dt, \quad \sqrt{y} = t + C_1, \quad y = (t + C_1)^2.$$

Підставимо знайдене значення y в перше рівняння системи і розв'яжемо його

$$\frac{dx}{dt} = t + 2x - t - C_1, \quad \frac{dx}{2x - C_1} = dt, \quad \int \frac{dx}{2x - C_1} = \int dt, \quad \frac{1}{2}\ln|2x - C_1| = t + C_2,$$

$$2x - C_1 = e^{2(t + C_2)}, \quad x = \frac{1}{2}C_3 e^{2t} + \frac{C_1}{2}, \quad C_3 = \frac{1}{2}e^{2C_2}.$$

Таким чином, задана система має загальний розв'язок

$$x = \frac{1}{2}\left(C_1 + C_3 e^{2t}\right), \quad y = (t + C_1)^2.$$

Перевіримо, чи виконуються умови теореми єдиності розв'язку. Функції $f_1(t, x, y) = t + 2x - \sqrt{y}, \quad f_2(t, x, y) = 2\sqrt{y}$ визначені для $t \in R, x \in R, y \geq 0.$

Знаходимо частинні похідні: $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 2, \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = -\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{y}}.$

Неперервність похідних по y порушується при $y = 0$. Дослідимо це значення.

Маємо: $y = 0$ є розв'язком другого рівняння заданої системи. Підставимо це значення в перше рівняння системи. Дістанемо лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

$$\frac{dx}{dt}=t+2x.$$

Розв'яжемо його методом Бернуллі. Маємо

$$x=u(t)v(t),\quad \frac{dx}{dt}=u'v+uv',\quad u'v+uv'-2uv=t,\quad u'v+u(v'-2v)=t.$$

Звідки $v'-2v=0,\quad \frac{dv}{v}=2dt$, $\ln|v|=2t+C\quad (C=0),\quad v=e^{2t}$.

Тоді із заданого рівняння маємо

$$u'v=t,\quad u'e^{2t}=t,\quad \frac{du}{dt}=te^{2t},\quad u=\int te^{-2t}dt=-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+C$$

Оскільки $x=uv$, то $x=\left(-\frac{1}{4}e^{-2t}(2t+1)+C\right)e^{2t}=-\frac{2t+1}{4}+Ce^{2t}$.

Отже, маємо особливий розв'язок

$$x=Ce^{2t}-\frac{2t+1}{4},\quad y=0.$$

1.4. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ РІВНЯННЯМ ПОРЯДКУ n І СИСТЕМОЮ n РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Покажемо цей зв'язок на прикладі рівняння третього порядку. Нехай рівняння третього порядку розв'язане відносно похідної y''', тобто має вигляд

$$y'''=f(x,y,y',y''). \tag{8}$$

Вводимо нові функції. А саме, нехай $y=y_1$. Тоді $y'=y_1'=y_2$ або $\frac{dy_1}{dx}=y_2$. Знаходимо y''. А саме, $y''=y_1''=y_2'=y_3$. Звідки $\frac{dy_2}{dx}=y_3$. Тоді $y'''=y_3'$. Враховуючи, що $y=y_1$, $y'=y_2$, $y''=y_3$, задане рівняння набуває вигляду $\frac{dy_3}{dx}=f(x,y_1,y_2,y_3)$. Таким чином, рівняння третього порядку (8) зведено до нормальної системи

$$\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=y_2,\\ \frac{dy_2}{dx}=y_3,\\ \frac{dy_3}{dx}=f(x,y_1,y_2,y_3).\end{cases} \tag{9}$$

Система (9) називається нормальною системою, **рівносильною рівнянню** (8). Загальний розв'язок системи (9) є загальним розв'язком рівняння (8), і навпаки, загальний розв'язок рівняння (8) є загальним розв'язком системи (9). Таке зведення рівняння до рівносильної нормальної системи у деяких випадках спрощує знаходження загального розв'язку або розв'язку задачі Коші.

В інших випадках є доцільним зведення нормальної системи до відповідного диференціального рівняння. При цьому на праві частини диференціальних рівнянь потрібно накласти ще деякі умови.

2. Лінійні системи диференціальних рівнянь

2.1. Основні поняття і означення

Лінійні системи диференціальних рівнянь мають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \ldots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \ldots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{cases} \tag{10}$$

Коефіцієнти системи $p_{jk}(x),\ j,k = 1,2,\ldots,n,$ та функції $f_j(x)$ є неперервними функціями на проміжку (a,b). Така система задовольняє умови теореми існування і єдиності розв’язку. Отже, має єдиний розв’язок, що задовольняє в околі точки $x_0 \in (a,b)$ початкові умови

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}. \tag{11}$$

Означення. Лінійна система диференціальних рівнянь називаються **однорідною**, якщо в системі (10) всі функції $f_j(x)$, $j = 1,2,\ldots,n,$ дорівнюють нулю: $f_j(x) = 0$, тобто лінійна система має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \ldots + p_{1n}(x)y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \ldots + p_{2n}(x)y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = p_{n1}(x)y_1 + p_{2n}(x)y_2 + \ldots + p_{nn}(x)y_n. \end{cases} \tag{12}$$

Якщо в системі (10) не всі функції $f_j(x),\ j = 1,2,\ldots,n,$ дорівнюють нулю, то система називається **неоднорідною**.

2.2. Властивості лінійних однорідних систем

1. *Лінійна система (12) залишається лінійною* при будь-якій заміні незалежної змінної $x \in (a,b)$

$$x = \varphi(t),$$

де $\varphi(t)$ - неперервно диференційовна функція в проміжну (t_1, t_2). Межі проміжку зміни t визначаються із співвідношень $a = \varphi(t_1), \quad b = \varphi(t_2)$.

2. *Система (12) залишається лінійною* при будь-якому лінійному перетворенні функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

3. Якщо функції

$$y_1 = \varphi_1(t), \quad y_2 = \varphi_2(t), \ldots, y_n = \varphi_n(t) \qquad (13)$$

є розв'язками системи (74.3), то розв'язками є також функції

$$y_1 = C\varphi_1(t), y_2 = C\varphi_2(t), ..y_n = C\varphi_n(t),$$

де C - довільна стала.

4. Якщо функції (13) є розв'язками системи (12), то лінійна комбінація цих розв'язків

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x)$$

є також розв'язком системи (12).

2.3. Лінійні однорідні системи другого порядку

Розглянемо лінійну однорідну систему другого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y, \\ \dfrac{dy}{dt} = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y. \end{cases} \qquad (14)$$

Розв'язком системи (14) є дві функції $x(t)$ та $y(t)$. Перший розв'язок це x_1, y_1, другий розв'язок x_2, y_2. Згідно з властивістю 4 лінійних однорідних систем розв'язком системи (14) є також лінійна комбінація

$$x = C_1x_1(t) + C_2x_2(t),$$
$$y = C_1y_1(t) + C_2y_2(t).$$

Означення. Сукупність розв'язків

$$\begin{matrix} x_1(t), & y_1(t), \\ x_2(t), & y_2(t) \end{matrix} \qquad (15)$$

називається **фундаментальною**, якщо визначник Вронського, складений із цих функцій не дорівнює нулю, хоча в одній точці $t_0 \in (a,b)$:

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} x_1(t_0) & y_1(t_0) \\ x_2(t_0) & y_2(t_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Це означає, що розв'язки x_1, x_2, y_1, y_2 лінійно незалежні.

Аналогічне означення має місце і для системи порядку n.

3. Лінійні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

У загальному випадку методу знаходження розв'язків лінійних систем немає. Але є такий клас систем, що розв'язки можна знайти. Це системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Система лінійних рівнянь, коефіцієнти яких є числа a_{jk}, $j,k=1,2,\ldots,n$, має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{16}$$

де функції $f_k(x)$, $k=1,2,..,n,$ неперервні на проміжку (a,b).

3.1. Побудова фундаментальної системи розв'язків лінійної однорідної системи. Метод Ейлера

Однорідна лінійна система порядку n має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}y_2 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases} \tag{17}$$

Як знаходити фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок лінійних систем покажемо на прикладі однорідної системи другого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y, \end{cases} \tag{18}$$

де a_1, b_1, a_2, b_2 – числа.

Частинний розв'язок системи (18), як і для лінійного диференціального рівняння, шукатимемо у вигляді експоненціальних функцій

$$x = \lambda e^{kt}, \quad y = \mu e^{kt}, \tag{19}$$

де λ, μ – числа, що не дорівнюють нулю одночасно. Число k вибираємо однаковим для x та y. Підставляємо функції x, y в рівняння системи (18):

$$\begin{cases} k\lambda e^{kt} = a_1\lambda e^{kt} + b_1\mu e^{kt}, \\ k\mu e^{kt} = a_2\lambda e^{kt} + b_2\mu e^{kt}. \end{cases}$$

Після скорочення на множник $e^{kt} \neq 0$ дістаємо однорідну систему двох алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими k, λ, μ:

$$\begin{aligned} &(a_1 - k)\lambda + b_1\mu = 0, \\ &a_2\lambda + (b_2 - k)\mu = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Розв'язок λ, μ однорідної системи алгебраїчних рівнянь існує, якщо визначник із коефіцієнтів при невідомих λ, μ дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_1 - k & b_1 \\ a_2 & b_2 - k \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Рівняння (21) називається **характеристичним рівнянням системи (**18).

Зауважимо, що для системи порядку n характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, дістанемо алгебраїчне рівняння порядку n. Для системи другого порядку (18) знайдені корені k_1, k_2 характеристичного рівняння (21) підставляємо у систему (20) і знаходимо відповідні λ та μ і тим самим фундаментальні розв'язки.

Розглянемо різні випадки коренів характеристичного рівняння (21), яке запишемо у вигляді

$$k^2 - (a_1 + b_2)k + a_1b_2 - a_2b_1 = 0. \tag{22}$$

1. Корені рівняння (22) **дійсні і різні** $k_1 \neq k_2$.

Знайдемо λ_1 та μ_1, що відповідають кореню k_1. Для цього підставляємо k_1 у систему (20):

$$\begin{cases} (a_1 - k_1)\lambda_1 + b_1\mu_1 = 0, \\ a_2\lambda_1 + (b_2 - k_1)\mu_1 = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Ця система має безліч розв'язків. Рівняння системи такі, що одне із рівнянь є наслідком іншого або рівняння співпадають. Це означає, що одне із значень λ_1 або μ_1 можна вибрати довільно. Тоді кореню $k = k_1$ відповідає розв'язок

$$x_1 = \lambda_1 e^{k_1 t}, \quad y_1 = \mu_1 e^{k_1 t}. \tag{24}$$

Підставляючи у рівняння системи (75.5) $k = k_2$, знаходимо розв'язок

$$x_2 = \lambda_2 e^{k_2 t}, \quad y_2 = \mu_2 e^{k_2 t}. \tag{25}$$

Згідно з теоремою 2 про структуру розв'язку лінійної однорідної системи загальний розв'язок системи є лінійною комбінацією фундаментальних розв'язків. Отже, у випадку дійсних різних коренів характеристичного рівняння загальний розв'язок лінійної системи має вигляд

$$\begin{aligned} x &= C_1 \lambda_1 e^{k_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{k_2 t}, \\ y &= C_1 \mu_1 e^{k_2 t} + C_2 \mu_2 e^{k_2 t}. \end{aligned} \tag{26}$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 5y. \end{cases}$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 3 \\ 3 & 5-k \end{vmatrix} = 0, \quad k^2 - 10k + 16 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння $k_1 = 2, \ k_2 = 8$ дійсні і різні. Отже загальний розв'язок системи має вигляд (26).

Знайдемо $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ із системи вигляду (23). А саме, для $k = 2$ маємо систему

$$\begin{cases} (5-2)\lambda_1 + 3\mu_1 = 0, \\ 3\lambda_1 + (5-2)\mu_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\lambda_1 + 3\mu_1 = 0, \\ 3\lambda_1 + 3\mu_1 = 0. \end{cases}$$

Звідки знаходимо $\mu_1 = -\lambda_1$. Вибираємо λ_1 довільно, наприклад, $\lambda_1 = 1$. Тоді $\mu_1 = -1$. І частинний розв'язок (75.9) набуває вигляду

$$x_1 = e^{2t}, \quad y_1 = -e^{2t}.$$

Знаходимо другий частинний розв'язок. Підставляємо у систему (20) $k = 8$ і розв'язуємо отриману систему:

$$\begin{cases} (5-8)\lambda_2 + 3\mu_2 = 0, \\ 3\lambda_2 + (5-8)\mu_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -3\lambda_2 + 3\mu_2 = 0, \\ 3\lambda_2 - 3\mu_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\mu_2 = \lambda_2$. Покладаючи $\lambda_2 = 1$, маємо $\mu_2 = 1$ і частинний розв'язок набуває вигляду

$$x_2 = e^{8t}, \quad y_2 = e^{8t}.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння згідно з (26) має вигляд

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{8t},$$

$$y = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{8t}.$$

2. Корені характеристичного рівняння (22) **комплексно-спряжені**

Нехай характеристичне рівняння має корені $k_1=\alpha+i\beta,\quad k_2=\alpha-i\beta$. Побудуємо фундаментальну систему розв'язків. Заданим кореням відповідають лінійно незалежні розв'язки, які утворюють фундаментальну систему

$$x_1=\lambda_1 e^{(\alpha+i\beta)t},\ y_1=\mu_1 e^{(\alpha+i\beta)t},\quad x_2=\lambda_2 e^{(\alpha-i\beta)t},\ y_2=\mu_2 e^{(\alpha-i\beta)t}.$$

При цьому $\lambda_1,\mu_1,\lambda_2,\mu_2-$ комплексні числа, тобто мають вигляд:

$$\lambda_1=\lambda_{11}+i\lambda_{12},\ \mu_1=\mu_{11}+i\mu_{12},\quad \lambda_2=\lambda_{21}+i\lambda_{22},\ \mu_2=\mu_{21}+i\mu_{22}.$$

Тоді

$$x_1=(\lambda_{11}+i\lambda_{12})e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)=e^{\alpha t}\big((\lambda_{11}\cos\beta t-\lambda_{12}\sin\beta t)+i(\lambda_{12}\cos\beta t+\lambda_{11}\sin\beta t)\big)$$

Якщо x_1 є розв'язком системи, то його дійсна і уявна частина також є розв'язками, тобто маємо розв'язки

$$x_{11}=e^{\alpha t}(\lambda_{11}\cos\beta t-\lambda_{12}\sin\beta t),\quad x_{12}=e^{\alpha t}(\lambda_{12}\cos\beta t+\lambda_{11}\sin\beta t).$$

Розв'язками також є лінійні комбінації цих розв'язків. Виберемо наступні лінійні комбінації, які після простих перетворень набувають вигляду:

$$\lambda_{11}x_{11}+\lambda_{12}x_{12}=\left(\lambda_{11}^2+\lambda_{12}^2\right)e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad -\lambda_{12}x_{11}+\lambda_{11}x_{12}=\left(\lambda_{11}^2+\lambda_{12}^2\right)e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Аналогічні перетворення зробимо і для $y_1=\mu_1 e^{(\alpha+i\beta)t}$.

Тоді розв'язок x_1,y_1, що відповідає кореню $k_1=\alpha+i\beta$, матиме вигляд

$$x_1=e^{\alpha t}\left(C_1(\lambda_{11}^2+\lambda_{12}^2)\cos\beta t+C_2(\lambda_{11}^2+\lambda_{12}^2)\sin\beta t\right),$$
$$y_1=e^{\alpha t}\left(C_1(\mu_{11}^2+\mu_{12}^2)\cos\beta t+C_2(\mu_{11}^2+\mu_{12}^2)\sin\beta t\right).$$

Розв'язок x_2,y_2, що відповідає кореню $k_2=\alpha-i\beta$, має вигляд

$$x_2=e^{\alpha t}\left(C_1(\lambda_{21}^2+\lambda_{22}^2)\cos\beta t-C_2(\lambda_{21}^2+\lambda_{22}^2)\sin\beta t\right),$$
$$y_2=e^{\alpha t}\left(C_1(\mu_{21}^2+\mu_{22}^2)\cos\beta t-C_2(\mu_{21}^2+\mu_{22}^2)\sin\beta t\right).$$

Таким чином, загальний розв'язок лінійної системи другого порядку у випадку комплексно спряжених коренів має вигляд

$$x=e^{\alpha t}\left(C_1\left(\lambda_{11}^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{21}^2+\lambda_{22}^2\right)\cos\beta t+C_2\left(\lambda_{11}^2+\lambda_{12}^2-\lambda_{21}^2-\lambda_{22}^2\right)\sin\beta t\right),$$
$$y=e^{\alpha t}\left(C_1\left(\mu_{11}^2+\mu_{12}^2+\mu_{21}^2+\mu_{22}^2\right)\cos\beta t+C_2\left(\mu_{11}^2+\mu_{12}^2-\mu_{21}^2-\mu_{22}^2\right)\sin\beta t\right).$$

Зауважимо, що можна не переходити до дійсних чисел, а шукати λ_1,μ_1 та λ_2,μ_2 безпосередньо, а потім розглядати лінійну комбінацію комплексно значних функцій.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-y,\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=y+2x.\end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$x=\lambda e^{kt},\quad y=\mu e^{kt}.$$

Складаємо систему вигляду (75.5) для знаходження k, λ, μ:

$$\begin{cases} (2-k)\lambda - \mu = 0, \\ \lambda + (2-k)\mu = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Характеристичним рівнянням цієї системи є рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad k^2 - 4k + 5 = 0,$$

корені якого комплексно спряжені: $k_1 = 2+i, k_2 = 2-i.$

Підставляємо корінь $k_1 = 2+i$ в систему (*) і дістаємо:

$$\begin{cases} -i\lambda_1 - \mu_1 = 0, \\ \lambda_1 - i\mu_1 = 0. \end{cases}$$

Звідки $\mu_1 = -i\lambda_1$. Вибираємо $\lambda_1 = 1$. Тоді $\mu_1 = -i$ і частинний розв'язок, що відповідає кореню $k_1 = 2+i$, матиме вигляд

$$x_{11} = e^{(2+i)t} = e^{2t}(\cos t + i\sin t), \quad y_{11} = -ie^{(2+i)t} = e^{2t}(-i\cos t + \sin t).$$

Підставляємо у систему (*) $k_2 = 2-i$

$$\begin{cases} i\lambda_2 - \mu_2 = 0, \\ \lambda_2 + i\mu_2 = 0. \end{cases}$$

Звідки $\mu_2 = i\lambda_2$. Вибираємо $\lambda_2 = 1$. Тоді $\mu_2 = i$ і частинний розв'язок, що відповідає кореню $k_2 = 2-i$, матиме вигляд

$$x_{21} = e^{(2-i)t} = e^{2t}(\cos t - i\sin t), \quad y_{21} = ie^{(2-i)t} = e^{2t}(i\cos t + \sin t).$$

Частинними розв'язками будуть лінійні комбінації розв'язків x_{11} та x_{21} і розв'язків y_{11} та y_{21}. Нехай

$$x_1 = \frac{x_{11} + x_{21}}{2} = \frac{e^{2t}}{2}(\cos t + i\sin t + \cos t - i\sin t) = e^{2t}\cos t,$$

$$x_2 = \frac{x_{11} - x_{21}}{2i} = \frac{e^{2t}}{2i}(\cos t + i\sin t - \cos t + i\sin t) = e^{2t}\sin t,$$

$$y_1 = \frac{y_{11} + y_{21}}{2} = \frac{e^{2t}}{2}\left(-i\cos t + \sin t + i\cos t + \sin t\right) = e^{2t}\sin t,$$

$$y_2 = \frac{y_{11} - y_{21}}{2i} = \frac{e^{2t}}{2i}\left(-i\cos t + \sin t - i\cos t + \sin t\right) = -e^{2t}\cos t.$$

Таким чином, маємо фундаментальну систему розв'язків

$$x_1 = e^{2t}\cos t, \quad x_2 = e^{2t}\sin t, \quad y_1 = e^{2t}\sin t, \quad y_2 = -e^{2t}\sin t.$$

Загальний розв'язок системи є лінійною комбінацією фундаментальних розв'язків. Отже, загальним розв'язком заданої системи є розв'язок

$$x = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t), \quad y = e^{2t}(C_1\sin t - C_2\cos t).$$

3. Корені характеристичного рівняння (22) **дійсні і кратні**

Якщо $k = k_1 = k_2$, то *фундаментальну систему розв'язків* лінійної однорідної системи шукають у вигляді

$$x_1 = \lambda e^{kt}, \quad y_1 = \mu e^{kt}, \quad x_2 = \lambda t e^{kt}, \quad y_2 = \mu t e^{kt}.$$

Приклад 6. Знайти загальний розв’язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$$

Розв’язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-k & 1 \\ -1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad k^2 - 4k + 4 = 0,$$

корені якого кратні, тобто $k = 2$ - корінь кратності 2.

Фундаментальну систему розв’язків шукаємо у вигляді

$$x_1 = \lambda e^{kt}, \quad y_1 = \mu e^{kt}, \quad x_2 = \lambda t e^{kt}, \quad y_2 = \mu t e^{kt}.$$

Система вигляду (20) для знаходження k, λ, μ в даному випадку - це система

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0, \\ -\lambda - \mu = 0. \end{cases}$$

Звідки $\mu = -\lambda$. Вибираємо $\lambda = 1$. Тоді $\mu = -1$.

Таким чином , маємо фундаментальну систему розв’язків

$$x_1 = e^{2t}, \quad y_1 = -e^{2t}, \quad x_2 = te^{2t}, \quad y_2 = -te^{2t}.$$

Отже, загальний розв’язок заданої системи має вигляд

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{2t}, \quad y = -(C_1 + C_2 t)e^{2t}.$$

3.2. Зведення системи n лінійних диференціальних рівнянь до диференціального рівняння $n-$го порядку

Покажемо цей метод на прикладі системи другого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y. \end{cases}$$

Знайдемо похідну від обох частин першого рівняння системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1 \frac{dx}{dt} + b_1 \frac{dy}{dt}.$$

Використовуємо друге рівняння системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1 \frac{dx}{dt} + b_1 (a_2 x + b_2 y).$$

Із першого рівняння системи маємо

$$y = \frac{1}{b_1}\left(\frac{dx}{dt} - a_1 x\right). \qquad (27)$$

Попереднє рівняння набуває вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1\frac{dx}{dt} + b_1 a_2 x + b_2\left(\frac{dx}{dt} - a_1 x\right).$$

Тобто маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a_1 + b_2)\frac{dx}{dt} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)x = 0.$$

Вигляд розв’язку $x(t)$ залежить від коренів відповідного характеристичного рівняння. Знаходимо $x(t)$ і обчислюємо $y(t)$ за формулою (27). Тим самим знаходимо загальний розв’язок системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Приклад 6. Знайти загальний розв’язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Розв’язання. Знаходимо похідну від обох частин першого рівняння системи і використовуємо друге рівняння системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 3x + 4y.$$

Із першого рівняння маємо

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x.$$

Тоді попереднє рівняння набуває вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 3x + 4\frac{dx}{dt} - 8x.$$

Отже, отримали лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

Розв’язуємо його. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ має корені дійсні і різні корені $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5.$ Тоді розв’язок має вигляд

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}.$$

Знаходимо

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t} - 2C_1 e^t - 2C_2 e^{5t} = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$

Отже, загальним розв’язком заданої системи є

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \quad y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$