ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

Тема2: Диференціювання функцій однієї змінної. Диференціал функції та його застосування

1 Рівняння дотичної і нормалі до плоскої кривої.

2. Диференціювання неявних і параметрично заданих функцій.

3. Похідні вищих порядків.

4. Означення диференціала функції.

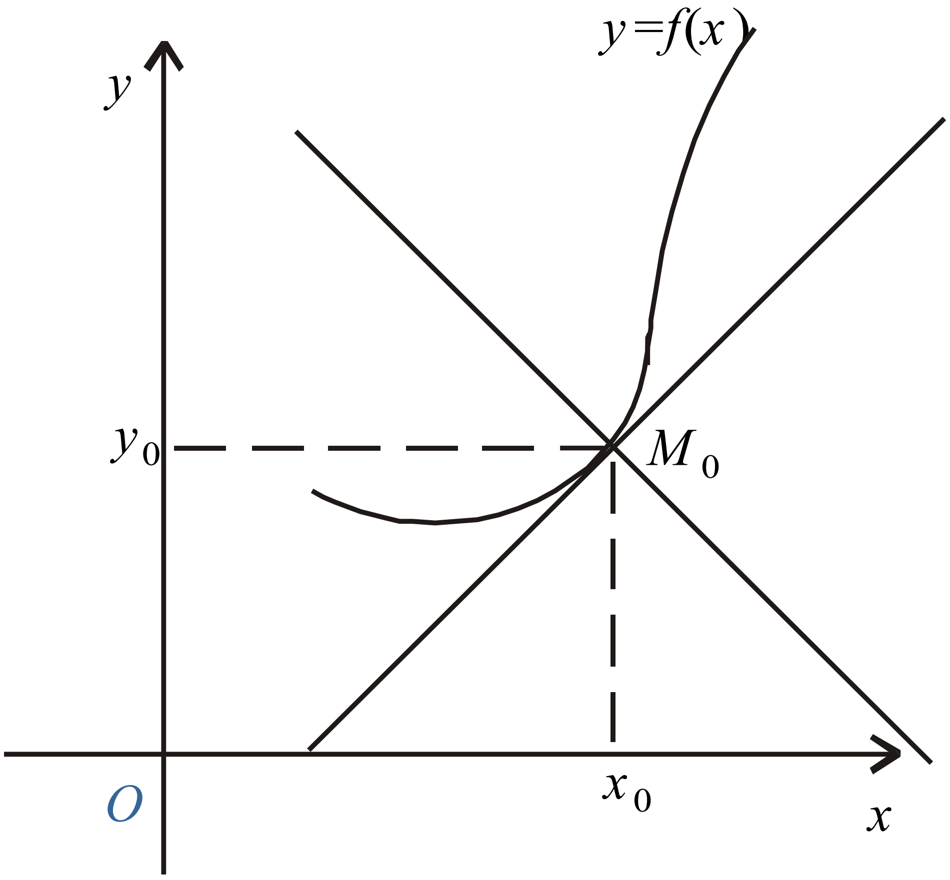
5. Застосування деференціала в наближених обчисленнях.

6. Правила знаходження диференціала.

Список джерел

- 1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. –647с.
- 2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Яковенко В.М. Вища математика, ч.2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.: НАУ, 2003, -297с.
- 3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М. Вища математика. Збірник задач. – К.: НАУ, 2003, -218с.
- 4. Шостак С.В. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» за модулем «Елементи математичного аналізу». –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2016, 115 с.
- 5. Батечко Н.Г., Шостак С.В. ВИЩА МАТЕМАТИКА. Похідна та її застосування, –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2015, 109 с.

Графік функції $y = f(x)$



Рівняння дотичної

- Будемо шукати рівняння дотичної у вигляді рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 $(x_0; y_0)$ у даному напрямі:

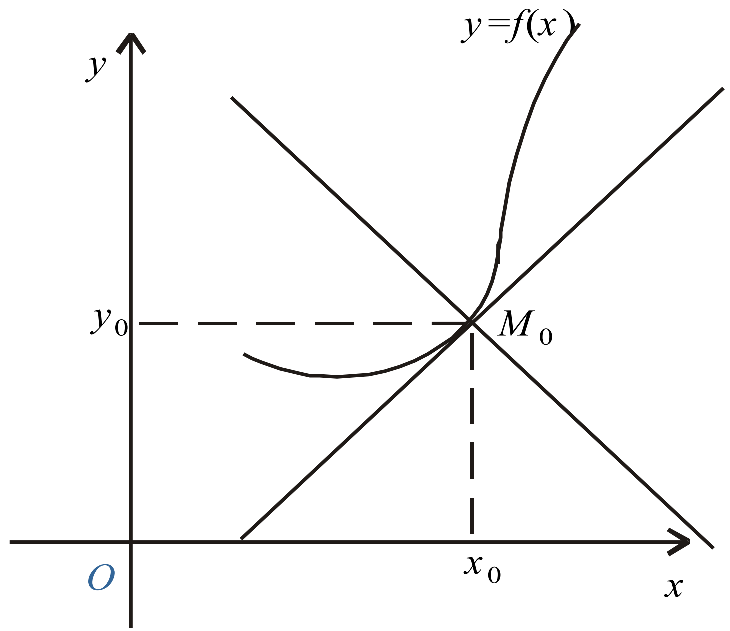
$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (1)$$

Використовуючи геометричний зміст похідної, маємо $k = f'(x_0)$, то з виразу (1) дістанемо рівняння дотичної у вигляді

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

Означення нормалі

- ***Нормаллю*** до графіка функції в точці M_0 називається перпендикуляр, проведений до дотичної в цій точці



Рівняння нормалі

$$y - f\left(x_0\right) = -\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right) \quad (3)$$

Приклад

- Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -3$.

$f'(x) = 2x$, $f'(-3) = -6$; $f(-3) = (-3)^2 = 9$.

- Рівняння дотичної (2) і нормалі (3) запишуться так: $y - 9 = -6(x+3)$, $y - 9 = \frac{1}{6}(x+3)$

або у загальному вигляді:

$6x + y + 9 = 0$, $x - 6y + 57 = 0$.

Неявна функція

Рівняння $\boldsymbol{F(x;y) = 0}$ визначає y як неявну функцію від x

Приклад

Знайти y'_x з рівняння $x^2 + y^2 = 4$.

Продиференціювавши по x обидві частини заданого рівняння, дістанемо:

$$2x + 2yy' = 0 \ .$$

Звідси $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Параметрично задані функції

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \Psi(t) \end{aligned}\right\} \left(t_1 \le t \le t_2\right)$$

Похідна параметрично заданої функції

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Приклад

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \end{aligned}\right\}(0 \le t \le \pi)$$

$$y'_x = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\mathrm{ctg}\, t$$

$$\left(y'_x\right)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

Похідна степенево-показникової функції

$$y = \left(u(x)\right)^{v(x)} \quad (4)$$

$$\ln y = v \ln u \quad (5)$$

$$y' = u^{v}\left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v\right) \quad (6)$$

Приклад

$$y = (\mathrm{tg}\,3x)^{\sin 4x}$$

$$y' = (\mathrm{tg}\,3x)^{\sin 4x} \cdot \left(4\cos 4x \cdot \ln \mathrm{tg}\,3x + \frac{3\sin 4x}{\mathrm{tg}\,3x \cdot \cos^2 3x} \right)$$

Похідні вищих порядків

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)', \ n = 1, \ 2, \ \ldots$$

Позначення: $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \dfrac{d^n y}{dx^n}$

Приклад

$$y = \sin(5x + 4)$$

$$y' = 5\cos(5x+4); \quad y'' = -25\sin(5x+4); \quad y''' = -125\cos(5x+4)$$

Диференціал функції

$$dy = f'(x)\Delta x \quad (7)$$

Приклад

$$y = x^2 \operatorname{tg}(3x+1)$$

$$dy = \left(2x \operatorname{tg}(3x+1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)} \right) dx$$

Застосування диференціала в наближених обчисленнях

Оскільки $\Delta y \approx dy$

або $f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right) \approx f'\left(x\right)\Delta x$,

то $f\left(x+\Delta x\right) \approx f\left(x\right) + f'\left(x\right)\Delta x$ (8)

Приклад

Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

$$\sqrt{27}=\sqrt{25\left(1+\frac{2}{25}\right)}=5\sqrt{1+\frac{2}{25}}$$

Введемо функцію $f(x)=\sqrt{x}$, тоді $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Оскільки $\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$, де $x=1, \Delta x=\frac{2}{25}$

то $\sqrt{1+\frac{2}{25}}\approx\sqrt{1}+\frac{1}{2\sqrt{1}}\frac{2}{25}=1+\frac{1}{25}=1{,}04$ або $\sqrt{27}\approx 5\cdot 1{,}04=5{,}2$

Правила знаходження диференціала

1. $y = c$; $dy = 0$;

2. $y = u + v, \quad dy = du + dv;$

3. $y = uv, \; dy = udv + vdu$

4. $y = \dfrac{u}{v}, \; dy = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

Контрольні запитання

- Диференціювання неявних функцій.
- Диференціювання параметрично заданих функцій.
- Похідні степенево-показникових функцій.
- Похідні вищих порядків.
- Рівняння дотичної до кривої.
- Рівняння нормалі до кривої.
- Означення диференціала функції.
- Геометричний зміст диференціала.
- Застосування диференціала до наближених обчислень.