

ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

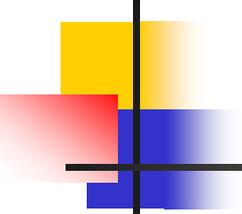
спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

Тема 3: Основні теореми диференціального числення



- 1. Основні теореми диференціального числення.**
- 2. Правило Лопіталя-Бернуллі.**
- 3. Перетворення невизначеностей.**
- 4. Формула Тейлора.**
- 5. Розклад за формулою Маклорена функцій.**

Список джерел

- 1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. –647с.
- 2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Яковенко В.М. Вища математика, ч.2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.: НАУ, 2003, -297с.
- 3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М. Вища математика. Збірник задач. – К.: НАУ, 2003, -218с.
- 4. Шостак С.В. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» за модулем «Елементи математичного аналізу». –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2016, 115 с.
- 5. Батечко Н.Г., Шостак С.В. ВИЩА МАТЕМАТИКА. Похідна та її застосування, –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2015, 109 с.

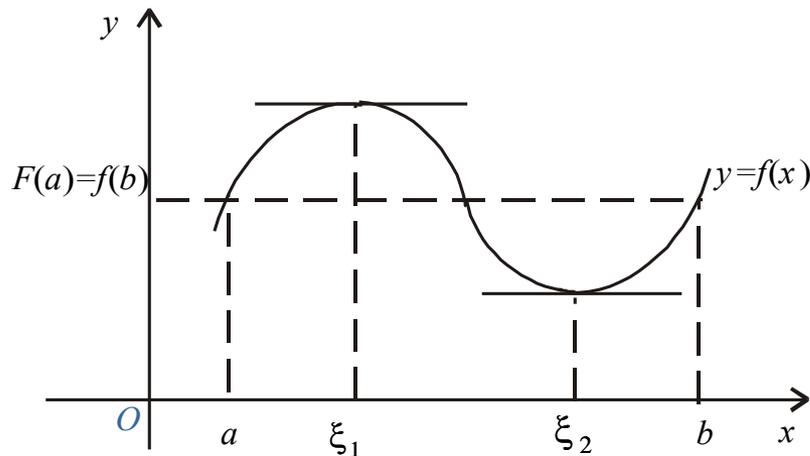
Теорема Ферма

- Якщо диференційовна на проміжку D функція $y = f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення у внутрішній точці ξ цього проміжку, то похідна функції в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(\xi) = 0$.

Геометричний зміст теорему Ферма

Рівність нулю похідної $f'(\xi)$

геометрично означає, що у
відповідній точці цієї кривої
дотична паралельна осі Ox .

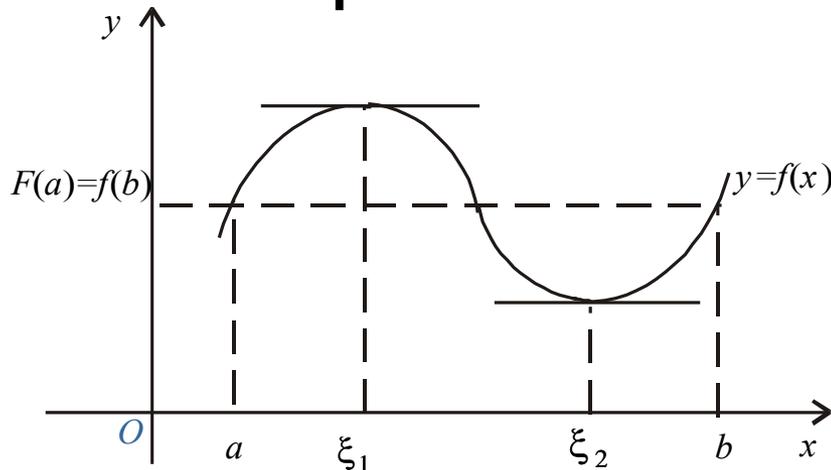


Теорема Ролля

- Якщо функція $f(x)$:
- 1) неперервна на відрізку $[a; b]$;
- 2) диференційовна на інтервалі $(a; b)$;
- 3) на кінцях відрізка набуває рівних між собою значень, тобто $f(a) = f(b)$, то на інтервалі $(a; b)$ існує хоча б одна точка $x = \xi (a < \xi < b)$, для якої $f'(\xi) = 0$.

Геометричний зміст теорему Ролля

Якщо крайні ординати неперервної кривої $y = f(x)$, яка має в кожній точці дотичну, рівні, то на цій кривій знайдеться принаймні одна точка з абсцисою $\xi (a < \xi < b)$, в якій дотична паралельна осі Ox .



Теорема Лагранжа

(теорема про скінченні прирости функції)

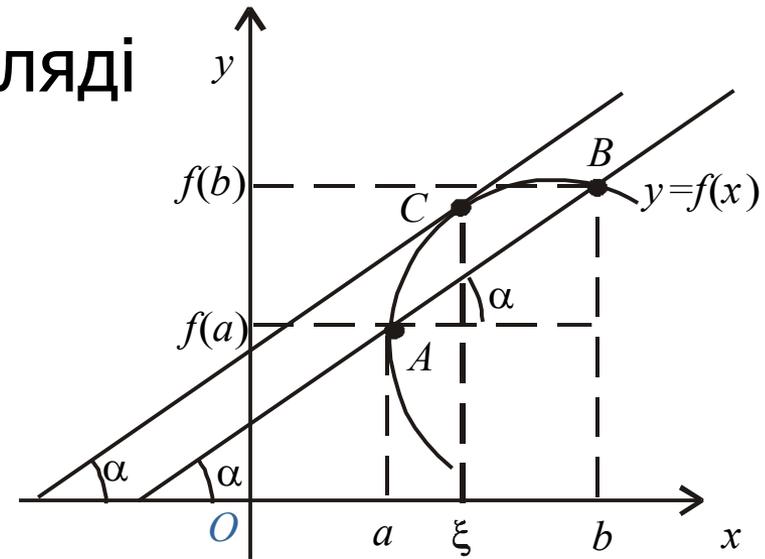
- Якщо функція $f(x)$:
 - 1) неперервна на відрізку $[a; b]$;
 - 2) диференційовна на інтервалі $(a; b)$,то на інтервалі $(a; b)$ знайдеться хоча б одна точка $x = \xi (a < \xi < b)$, така що

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi). \quad (1)$$

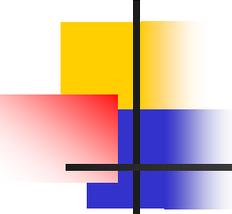
Геометричний зміст теорему Лагранжа

Запишемо формулу (1) у вигляді

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \cdot (2)$$



Якщо для всіх точок кривої $y = f(x)$ існує дотична, то на цій кривій знайдеться точка з абсцисою ξ , в якій дотична паралельна хорді AB , що сполучає точки A і B .



Теорема Коші

Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ дві функції:

- 1) неперервні на відрізку $[a; b]$;
- 2) диференційовні на інтервалі $(a; b)$;
- 3) $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a; b)$, то на інтервалі $(a; b)$ знайдеться хоча б одна точка $x = \xi (a < \xi < b)$ така, що

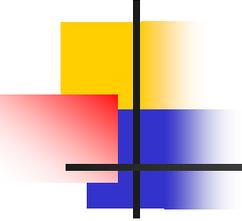
$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Поняття невизначеності

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

- Якщо при $x \rightarrow a$ обидві функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ прямують до 0 або до ∞ , то говорять, що в точці a функція $f(x)$ має невизначеність виду

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ - \\ 0 \end{array} \right] \text{ або } \left[\begin{array}{c} \infty \\ - \\ \infty \end{array} \right] . \quad (3)$$

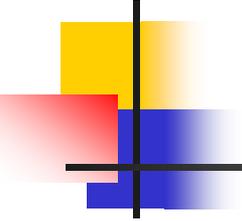


Теорема

(правило Лопітала-Бернуллі)

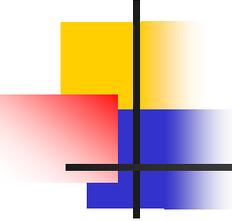
- **Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних (скінченній або нескінченній), якщо остання існує.**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}$$



Приклад 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 7x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \cos x}{2} = \frac{7}{2}$$



Приклад 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 + 7x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 3x + 1)'}{(2x^3 + 7x + 5)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{6x^2 + 7} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 3)'}{(6x^2 + 7)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{12x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \cdot 0 = 0$$

Перетворення невизначеностей

Правило Лопітала можна застосувати тільки для розкриття невизначеностей вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

При розкритті інших типів невизначеностей

$[0 \cdot \infty]$; $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$, $[\infty - \infty]$

їх перетворюють до одного з видів $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Невизначеність виду $[0 \cdot \infty]$

Нехай $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = \infty$

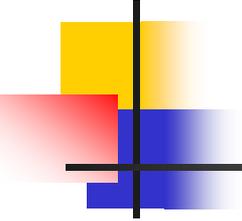
Потрібно знайти

$$\lim_{x \rightarrow a} (u(x) \cdot v(x)). \quad (4)$$

Якщо вираз (4) записати у вигляді

$$\lim_{x \rightarrow a} u \cdot v = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u}{\frac{1}{v}} \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow a} u \cdot v = \lim_{x \rightarrow a} \frac{v}{\frac{1}{u}},$$

то при $x \rightarrow a$ дістанемо невизначеність відповідно вигляду $\left[\frac{0}{0} \right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.



Приклад

Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \ln x)$.

Маємо невизначеність вигляду $[0 \cdot \infty]$.

Застосуємо правило Лопітала:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-3})'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0.$$

Невизначеності вигляду

$$[0^0], [\infty^0], [1^\infty]$$

Нехай маємо функцію $u(x)^{v(x)}$.

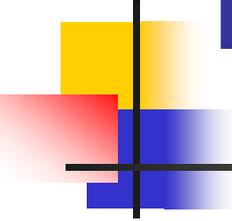
При $x \rightarrow a$ (a — скінченне або нескінченне) можливі три випадки:

- а) $u \rightarrow 0, v \rightarrow 0$ маємо невизначеність виду $[0^0]$;
- б) $u \rightarrow \infty, v \rightarrow 0$ дістанемо невизначеність $[\infty^0]$;
- в) $u \rightarrow 1, v \rightarrow \infty$ маємо невизначеність виду $[1^\infty]$.

Ці невизначеності за допомогою логарифмування зводяться до невизначеності вигляду $[0 \cdot \infty]$.

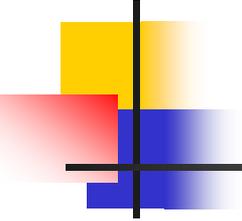
Приклад

- Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$.
- Це невизначеність виду $[0^0]$.
- Позначимо $y = (\sin x)^x$.
- Логарифмуємо : $\ln y = x \ln \sin x = \frac{\ln \sin x}{x^{-1}}$
- Застосуємо правило Лопіталя:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x (-x^{-2})} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} = 0$$
- Звідси $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = e^0 = 1$.



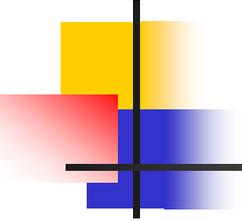
Невизначеність виду $[\infty - \infty]$

- За допомогою алгебраїчних перетворень зводиться до невизначеності $\left[\frac{0}{0} \right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.



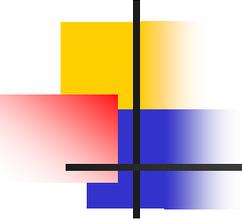
Приклад

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.\end{aligned}$$



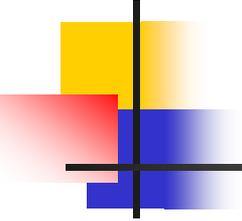
Формула Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \\ + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x).$$



Формула Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\Theta x).$$



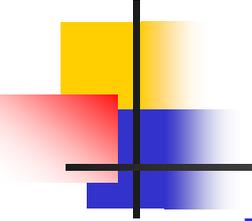
Розклад функцій за формулою Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin \left(\xi + (n+1) \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos \left(\xi + (n+1) \frac{\pi}{2} \right), \quad |\xi| < |x|.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+\xi} \right)^{n+1}, \quad |\xi| < |x|.$$



Контрольні запитання

- Теорема Ролля.
- Геометричний зміст теореми Ролля.
- Теорема Ферма.
- Геометричний зміст теореми Ферма.
- Теорема Лагранжа.
- Геометричний зміст теореми Лагранжа.
- Теорема Коші.
- Правило Лопіталя-Бернуллі.
- Перетворення невизначеностей виду:
 $[0 \cdot \infty]$; $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$, $[\infty - \infty]$
- Формула Тейлора.
- Формула Маклорена.