# ВИЩА МАТЕМАТИКА

## для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

# Тема4: Монотонність та екстремум функції. Загальна схема дослідження функції

.

1. Зростання та спадання функцій.
2. Екстремум функції.
3. Опуклість і вгнутість кривої.Точка перегину.
4. Асимптоти.
5. План дослідження функцій і побудови їхніх графіків.

# Список джерел


- 1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. –647с.
- 2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Яковенко В.М. Вища математика, ч.2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.: НАУ, 2003, -297с.
- 3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М. Вища математика. Збірник задач. – К.: НАУ, 2003, -218с.
- 4. Шостак С.В. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» за модулем «Елементи математичного аналізу». –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2016, 115 с.
- 5. Батечко Н.Г., Шостак С.В. ВИЩА МАТЕМАТИКА. Похідна та її застосування, –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2015, 109 с.

# Зростання та спадання функцій

Якщо при $x_2 > x_1$ ⇒ $f(x_2) > f(x_1)$ - функція *спадна*

Якщо при $x_2 > x_1$ ⇒ $f(x_2) < f(x_1)$ - *зростаюча*

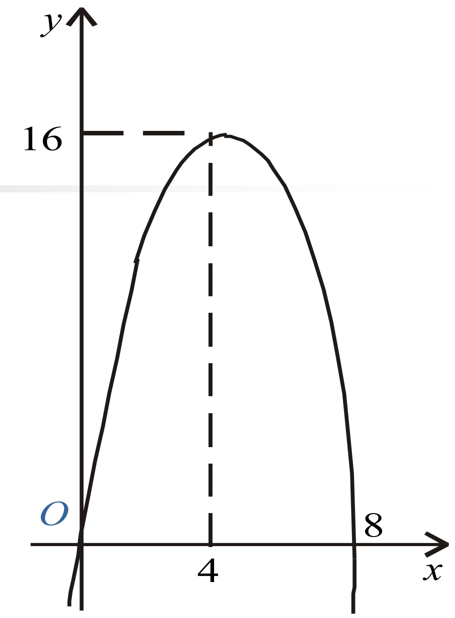
# *Теорема 1* (необхідна умова зростання (спадання) функції)

- **1. Якщо диференційовна функція зростає на деякому проміжку, то похідна цієї функції невід'ємна на цьому проміжку.**
- **2. Якщо диференційовна функція спадає на деякому проміжку, то похідна цієї функції недодатна на цьому проміжку.**

# *Теорема 2* (достатня умова зростання (спадання) функції)

- **1. Якщо похідна диференційовної функції додатна всередині деякого проміжку, то функція зростає на цьому проміжку.**
- **2. Якщо похідна диференційовної функції від’ємна всередині проміжку, то функція спадає на цьому проміжку.**

# Приклад



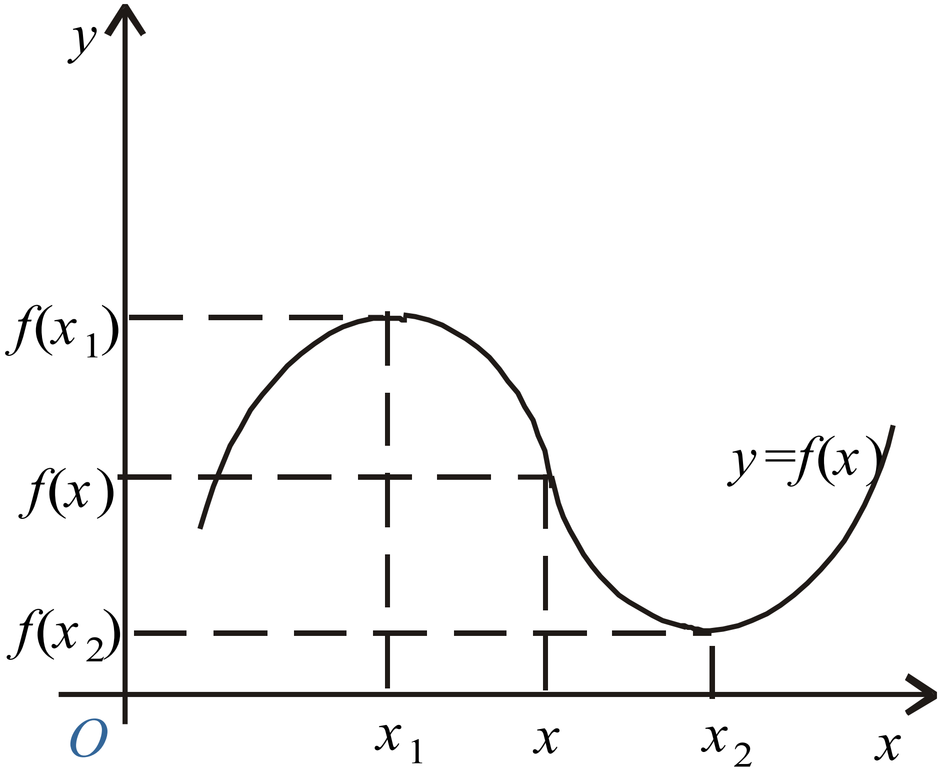

- Знайти проміжки зростання та спадання функції $y = 8x - x^2$.
- Похідна $y' = 8 - 2x$.
- Якщо $8 - 2x > 0,\ x < 4$

тобто функція зростає на проміжку $-\infty < x < 4$

- Якщо $8 - 2x < 0$,

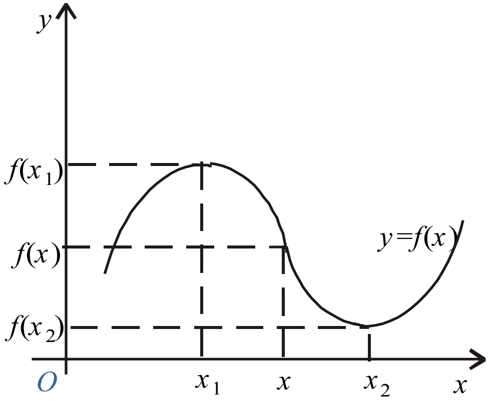
тобто функція спадає на проміжку $4 < x < +\infty$

# Екстремуми функцій



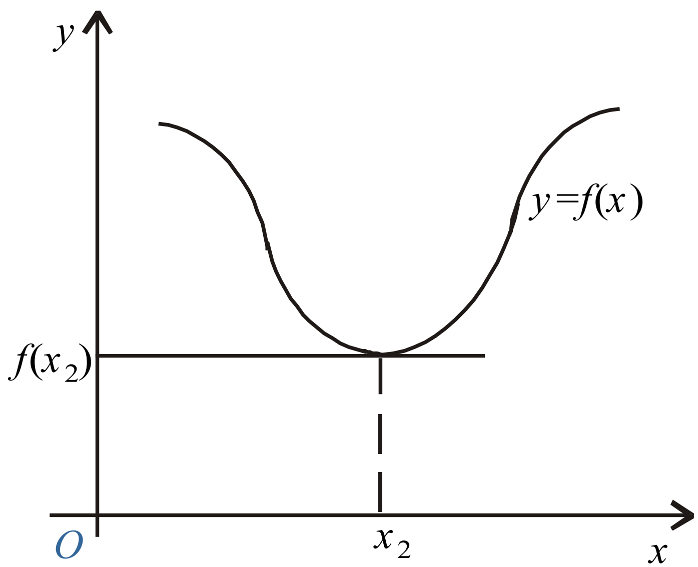
# Точки екстремуму

- *функція f (x) має максимум f (x*$_1$), якщо в деякому околі точки $x_1$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x)(x \neq x_1)$.
- *функція f (x) має максимум f (x*$_2$), якщо в деякому околі точки $x_2$ виконується нерівність $f(x_2) < f(x)(x \neq x_2)$.



# Необхідна умова існування екстремуму функції

- ***Теорема.*** **У точці екстремуму диференційовної функції похідна її дорівнює нулю:** $f'(x_2) = 0$. (1)



# Перша достатня умова існування екстремуму функції

***Теорема 1 (перше правило).***

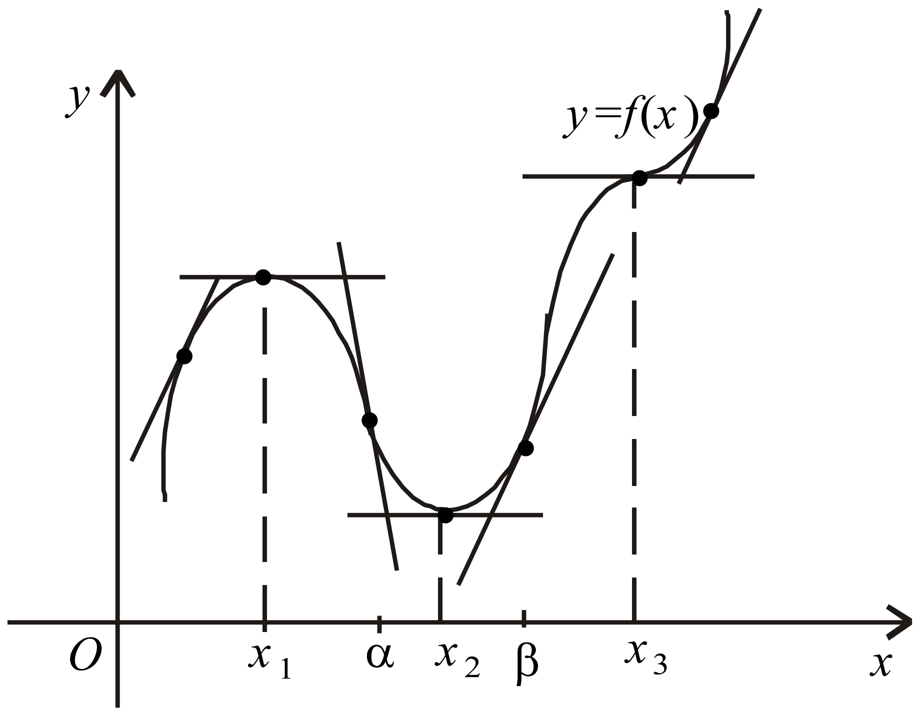
**Нехай функція неперервна на деякому інтервалі, в якому міститься критична точка $x_0$, і диференційовна в усіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки $x_0$). Якщо при переході зліва направо через цю точку похідна:**

**1) змінює знак з «+» на «–», то при $x = x_0$ функція має максимум;**

**2) змінює знак «–» на «+», то функція має у цій точці мінімум;**

**3) не змінює свого знака, то функція в точці $x = x_0$ екстремуму не має.**

# Геометрична ілюстрація теореми 1



# Правило дослідження неперервної функції на екстремум

- 1. Знаходимо першу похідну функції, тобто $f'(x)$.
- 2. Обчислюємо критичні значення аргументу $x$ (критичні точки), для цього:

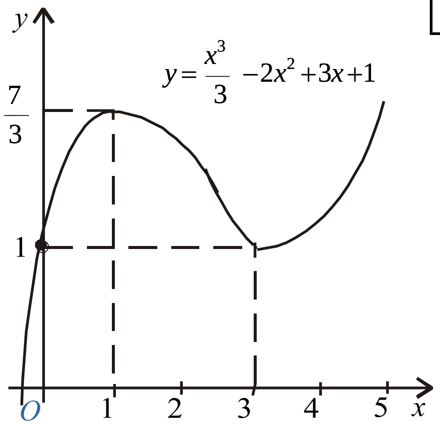
  а) прирівнюємо першу похідну до нуля і знаходимо дійсні корені здобутого рівняння $f'(x)=0$;

  б) знаходимо значення $x$, для яких похідна $f'(x)$ має розрив.
- 3. Досліджуємо знак похідної ліворуч і праворуч від критичної точки.

# Приклад

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$$

| $x$ | $(-\infty, 1)$ | $1$ | $(1, 3)$ | $3$ | $(3, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | $y_{\max}(1) = \frac{7}{3}$ | $\searrow$ | $y_{\min}(3) = 1$ | $\nearrow$ |

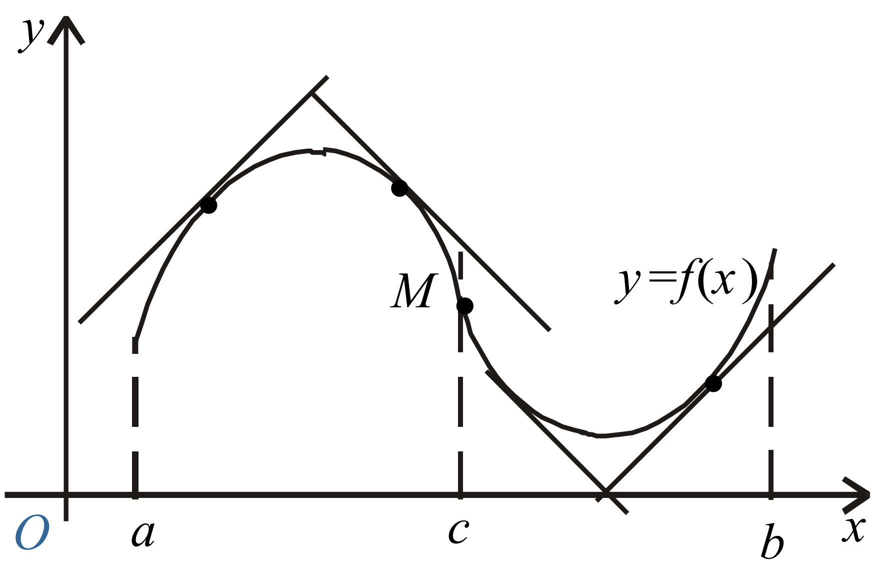


# Теорема 2 (друге правило)

- Якщо для диференційовної функції $f(x)$ у деякій точці $x_0$ її перша похідна $f'(x)$ дорівнює нулю, а друга похідна $f''(x)$ існує й відмінна від нуля, то:
- 1) якщо друга похідна $f''(x_0) > 0$ , то в точці $x_0$ функція має мінімум;
- 2) якщо $f''(x_0) < 0$ — максимум;
- 3) якщо $f''(x_0) = 0$ — питання залишається відкритим, і для його розв'язання треба застосувати перше правило.

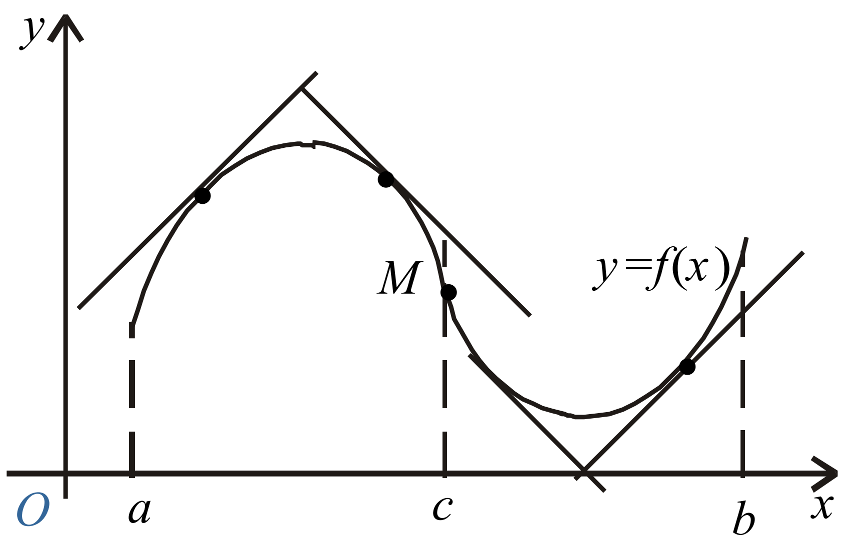
# Опуклість і вгнутість кривої

*Означення.* Крива на проміжку називається ***опуклою*** (***угнутою***), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) будь-якої її дотичної на цьому проміжку.



# Точка перегину

*Означення.* Точка, яка відокремлює опуклу частину кривої від вгнутої, називається *точкою перегину*.



# *Теорема 1*

- ***Теорема 1.***
- **1) Якщо в усіх точках проміжку (*c*, *b*) для функції $y = f(x)$ її друга похідна додатна $\left(f''(x) > 0\right)$, то графік функції вгнутий.**
- **2) Якщо в усіх точках проміжку (*a*, *c*) друга похідна від'ємна $\left(f''(x) < 0\right)$, то графік функції опуклий.**

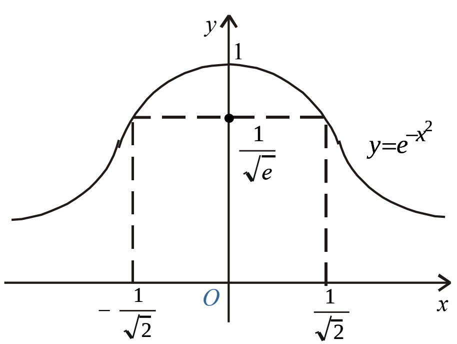
# *Теорема 2*

- **Якщо для функції $y = f(x)$ друга її похідна $f''(x)$ у деякій точці $x_0$ перетворюється на нуль або не існує й при переході через цю точку змінює свій знак на протилежний, то точка $M(x_0,\ f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції.**

# Приклад

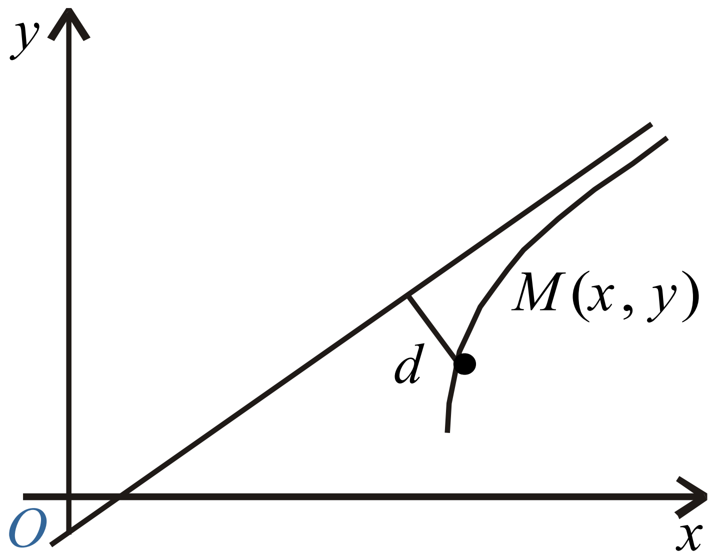
- Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y = e^{-x^2}$.

| $x$ | $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | $\cup$ | Перегин | $\cap$ | Перегин | $\cup$ |



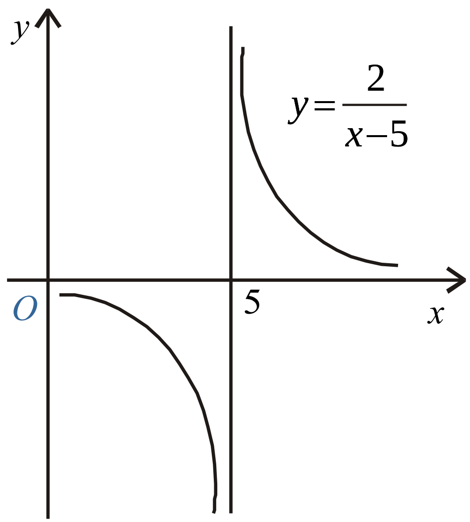
# Асимптоти

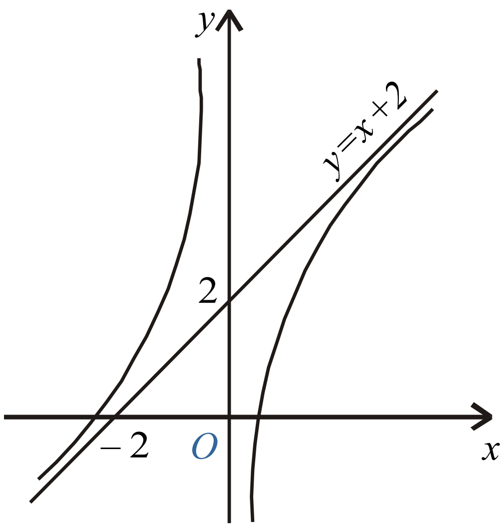
- *Означення*. Пряма називається ***асимптотою*** *кривої*, якщо відстань *d* від змінної точки *M* кривої до цієї прямої   при віддаленні точки *M* у нескінченність прямує до нуля.



# Види асимптот

- Асимптоти бувають ***вертикальні*** й ***похилі***.



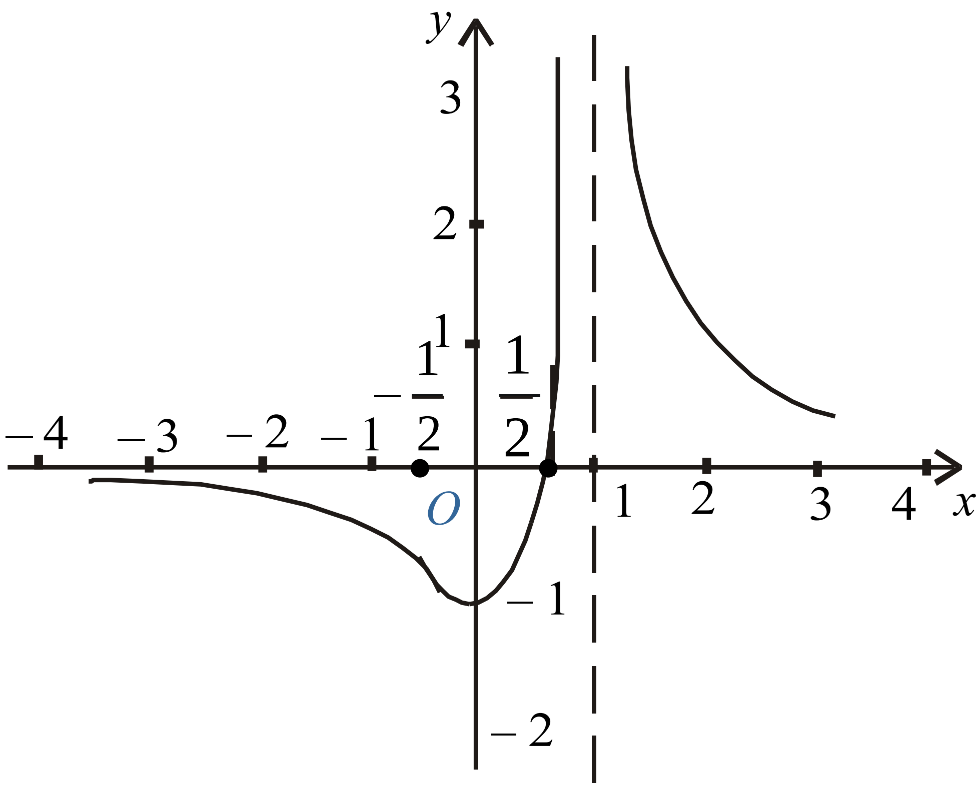
# План дослідження функцій і побудови їхніх графіків

1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність (непарність) і періодичність функції.
3. Знайти точки розриву функції та їх характер.
4. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Знайти точки екстремуму та обчислити значення функції у цих точках.
6. Визначити інтервали зростання й спадання функції.
7. Знайти точки перегину, інтервали випуклості й вгнутості.
8. Знайти асимптоти.
9. Знайти граничні значення функції, коли $x$ прямує до граничних точок області визначення.

Графік функції будують за характерними точками й лініями, отриманими у результаті дослідження. Якщо їх недостатньо, знаходять допоміжні точки для деяких конкретних значень аргументу.

# Приклад

$$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$



# Контрольні запитання

- Означення точки максимуму а мінімуму функції.
- Критичні і стаціонарні точки функції.
- Перша  та друга достатня умова існування екстремуму.
- Схема дослідження функції на монотонність та екстремум.
- Означення опуклості та угнутості кривої.
- Означення точки перегину.
- Ознака опуклості(угнутості) кривої.
- Інтервали опуклості та угнутості кривої.
- Необхідна умова існування точки перегину.
- Критичні точки другого роду функції.
- Достатня умова існування точки перегину.
- Правило знаходження інтервалів опуклості, угнутості та точок перегину.
- Вертикальні та похилі асимптоти.
- Загальна схема дослідження функції(основні етапи).