ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

Тема5: Задачі на екстремум

1. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.
2. Практичні задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значення.

Список джерел

- 1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. –647с.
- 2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Яковенко В.М. Вища математика, ч.2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.: НАУ, 2003, -297с.
- 3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М. Вища математика. Збірник задач. – К.: НАУ, 2003, -218с.
- 4. Шостак С.В. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» за модулем «Елементи математичного аналізу». –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2016, 115 с.
- 5. Батечко Н.Г., Шостак С.В. ВИЩА МАТЕМАТИКА. Похідна та її застосування, –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2015, 109 с.

Умови існування найбільшого і найменшого значення функції

- Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку [*a*; *b*], то вона набуває на цьому проміжку свого найбільшого й найменшого значення.

Найбільше значення функції

- **Функція $f(x)$ на відрізку [*a*, *b*] досягає свого найбільшого значення на одному з кінців цього проміжку або в такій його точці, яка є точкою максимуму.**

Найменше значення функції

- **Функція $f(x)$ на відрізку [*a*, *b*] досягає свого найменшого значення на одному з кінців цього проміжку або в такій його точці, яка є точкою мінімуму**

Правило знаходження найбільшого і найменшого значення функції на [a, b]

- 1) знайти всі максимуми та мінімуми функції на проміжку;
- 2) визначити значення функції на кінцях проміжку, тобто обчислити $f(a)$ і $f(b)$;
- 3) з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше та найменше: воно й буде найбільшим та найменшим значенням функції на проміжку.

Приклад

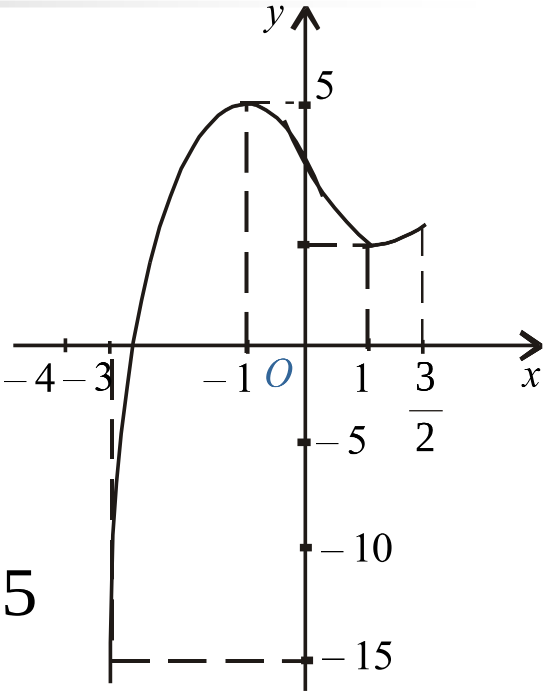
$$y = x^3 - 3x + 3, \quad \left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$$

1. $y' = 3x^2 - 3, 3x^2 - 3 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1$

$$y'' = 6x,\ y''(1) = 6 > 0$$

2. $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}, \quad y(-3) = -15$

3. $y_{\text{найб}} = y_{\max}(-1) = 5$, $y_{\text{найм}} = y(-3) = -15$



Практичні задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значення

- Задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значення деякої величини відіграють значну роль у природничих, технічних та економічних дослідженнях. Часто ці задачі зв’язані з доцільним і одночасно економним витрачанням тих чи інших матеріалів.

Схема розв'язання задач на екстремум

- ***1.Визначити, для якої величини вимагається знайти найбільше (найменше) значення. Ця величина і буде досліджуваною функцією.***
- ***2.Скласти аналітичний вираз для досліджуваної функції.***
- ***3.Серед величин, від зміни яких залежить зміна функції, вибрати одну за незалежну змінну (за аргумент). Виразити досліджувану функцію через аргумент (для цього умови задачі повинні дати достатнє число співвідношень між змінними).***
- ***4.Із самої суті прикладної задачі встановити область визначення функції (проміжок зміни аргументу).***
- ***5.Розв'язати задачу на знаходження найбільшого (найменшого) значення функції на цьому проміжку (він може бути і необмеженим).***

Доповнення до схеми

1) При розв’язанні текстових задач (особливо задач геометричного змісту) бажано зробити рисунок, який допоможе виразити змінні, що входять в умову задачі, через одну із них.

2) В прикладних задачах частіше всього трапляється випадок, коли всередині проміжку маємо тільки одну критичну точку. Якщо в цій точці неперервна функція має локальний максимум (мінімум), то він і є найбільше (найменше) значення.

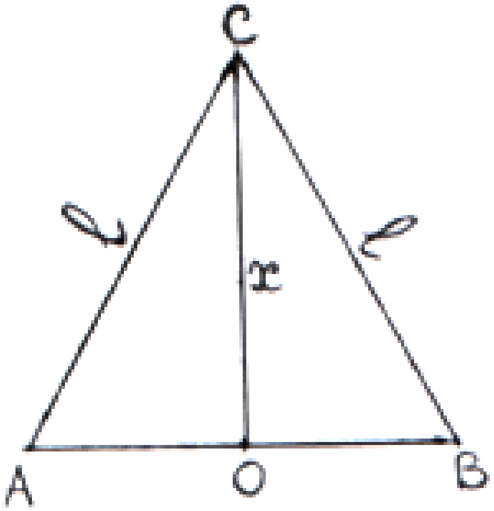
3) Інколи міркування чисто фізичного або геометричного характеру дають можливість легко судити про те, яка критична точка дає максимум, а яка мінімум. Це звільняє від необхідності подальшого аналітичного дослідження на екстремум.

Задача 1

- Сума двох додатних чисел дорівнює ***a.*** Які мають бути ці числа, щоб їхній добуток був найбільшим?

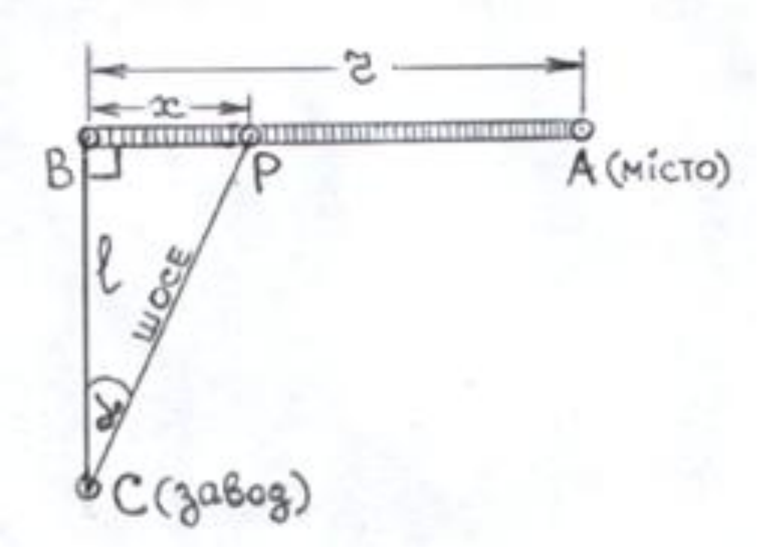
Задача 2

- Знайти максимальну площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює ***l***.



Задача 3

- Залізнична колія проходить по прямій ***AB=r.*** В стороні на відстані ***l*** від залізниці знаходиться завод ***C***, із якого перевозять вантаж в місто ***A.*** Завод потрібно з’єднати шосейною дорогою із залізницею. Вартість перевезень автотранспортом в 3 рази дорожча вартості перевезень залізницею. Виникає запитання: як провести шосе ***CP*** до залізниці, щоб вартість перевезень від заводу ***C*** до міста ***A*** була найменшою?



Задача 4

- Нехай витрати виробництва ***K(x)*** визначає функція $K(x) = x^3 - 8x^2 + 25x$, де x – обсяг продукції $(0 < x < \infty)$. При якому значенні x середні витрати виробництва мінімальні ?

Контрольні запитання

- Абсолютний максимум.
- Абсолютний мінімум.
- Правило знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку.
- Схема розв’язання задач на екстремум.
- Доповнення до схеми розв’язання задач на екстремум.