Тема 6:

Невизначений інтеграл та його властивості. Основні методи інтегрування

План лекції:

1. Первісна функції.
2. Поняття невизначеного інтеграла.
3. Властивості і таблиця невизначених інтегралів.
4. Основні методи інтегрування.

1. Первісна функції

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на проміжку , якщо на цьому проміжку F`(x)=*f(x)*

Первісна $F(x)$ — диференційовна, а значить неперервна функція на проміжку

Теорема 1

Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на проміжку , то будь-яка первісна $\Phi(x)$ для $f(x)$ може бути подана у вигляді $\Phi(x) = F(x) + C$ на цьому проміжку,

де C=const – довільна стала.

Інтегрування функції:

Операція знаходження первісних для $f(x)$.

Задача інтегрування функції на проміжку Х

полягає у тому, щоб:

- знайти всі первісні функції, або
- довести, що вона не має первісних на цьому проміжку

Розв'язування задачі інтегрування функції:

достатньо знайти одну будь-яку первісну $F(x)$ на розглядуваному проміжку, тоді за теоремою 1 множина всіх первісних на цьому проміжку має вигляд:

$$F(x) + C$$

ʼ

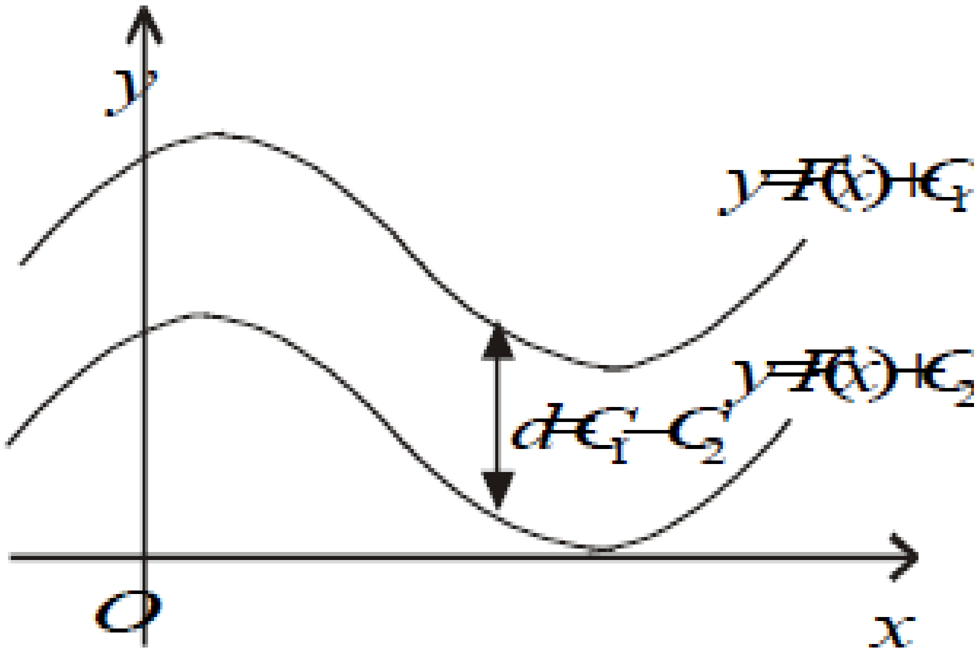
2. Поняття невизначеного інтеграла

Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку називається сукупність всіх первісних $F(x)+C$ для функції $f(x)$ на проміжку , тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

де – знак $\int$ невизначеного інтеграла, $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, dx — диференціал змінної інтегрування.

Геометричний зміст



Теорема 2

Для існування невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ на певному проміжку достатньо, щоб $f(x)$ була неперервною на цьому проміжку

3. Властивості і таблиця невизначених інтегралів

1властивість невизначених інтегралів:

Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2 властивість невизначених інтегралів:

Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

3 властивість невизначених інтегралів:

Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює цій функції з точністю до сталої:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

4 властивість невизначених інтегралів:

Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx, \quad k \neq 0$$

5 властивість невизначених інтегралів:

Невизначений інтеграл від суми двох функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій, якщо вони існують, тобто

$$\int \left(f_1(x) + f_2(x) \right) dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$$

Таблиця основних інтегралів

1) $\int 0 \cdot dx = C$

2) $\int dx = x + C$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$

Таблиця основних інтегралів

5) $\int e^x dx = e^x + C$

6) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, a \neq 1$

7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8) $\int \cos x dx = \sin x + C$

Таблиця основних інтегралів

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

11) $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$

12) $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$

Таблиця основних інтегралів

13) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

14) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$

Таблиця основних інтегралів

$$17)\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$$

$$18)\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C$$

$$19)\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$20)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$$

4. Основні методи інтегрування

- метод безпосереднього інтегрування
- метод заміни змінної
- метод інтегрування частинами

Метод безпосереднього інтегрування

базується на використанні властивостей невизначеного інтеграла 4) і 5).

Розкладаючи підінтегральну функцію на доданки, заданий інтеграл зводиться до суми табличних інтегралів.

Метод заміни змінної

базується на використанні формул:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt; \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)d$$

або

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = |\varphi(x) = t| = \int f(t)dt.$$

Метод інтегрування частинами

базується на використанні формули

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v du,$$

де функції $u=u(x)$ та $v=v(x)$ мають неперервні похідні

1-й тип інтегралів методу інтегрування частинами:

1) інтеграли виду $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)$ – многочлен, k – дійсне число, причому за u беруть множник $P(x)$, а за dv – вираз, що залишився;

2-й тип інтегралів методу інтегрування частинами:

2) інтеграли виду

$$\int P(x)\ln x dx \qquad \int P(x) arctg x dx$$

$$\int P(x)\arcsin x dx \qquad \int P(x) arcctg x dx$$

$$\int P(x)\arccos x dx$$

в яких треба брати за $dv = P(x)dx$

3-й тип інтегралів методу інтегрування частинами:

3) інтеграли виду

$$\int e^{kx}\sin\beta x dx \qquad \int e^{kx}\cos\beta x dx$$

де α , β – дійсні числа

утворюється рівняння відносно шуканого інтеграла, розв’язуючи яке, знаходимо інтеграл