

# ВИЩА МАТЕМАТИКА

---

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

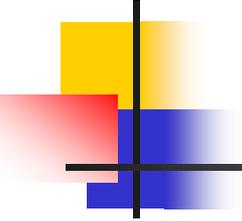
спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

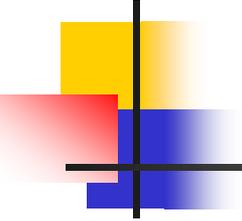
# Тема 7: Інтегрування раціональних функцій

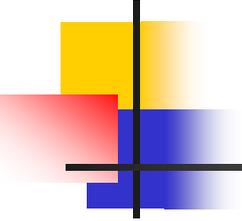


---

- 1. Основні відомості про раціональну функцію.**
- 2. Інтегрування елементарних раціональних дробів.**
- 3. Алгоритм інтегрування раціональних функцій.**

# Список джерел

- 
- 1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. –647с.
  - 2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Яковенко В.М. Вища математика, ч.2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.: НАУ, 2003, -297с.
  - 3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М. Вища математика. Збірник задач. – К.: НАУ, 2003, -218с.
  - 4. Шостак С.В. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» за модулем «Елементи математичного аналізу». –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2016, 115 с.
  - 5. Батечко Н.Г., Шостак С.В. ВИЩА МАТЕМАТИКА. Похідна та її застосування, –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2015, 109 с.



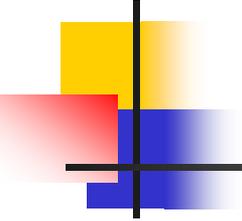
# Поняття многочлена

---

- *Многочленом* (цілою раціональною функцією) називається функція

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

- де натуральне число  $n$  – степінь многочлена;  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – його коефіцієнти (дійсні або комплексні).



# Корінь многочлена

---

- *Коренем многочлена* називається числове значення змінної  $x = x_1$  (дійсне або комплексне) , при якому маємо  $P_n(x_1) = 0$  .

# *Раціональна функція (раціональний дріб)*

---

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

*правильний, якщо  $m < n$  ;  
і неправильний при  $m \geq n$  .*

# Теорема 1

- Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = W_r(x) + \frac{R_p(x)}{Q_m(x)} \quad , \text{ де } p < m .(1)$$

# Елементарні раціональні дроби

---

$$1) \frac{A}{x - a}$$

$$2) \frac{A}{(x - a)^k}$$

$$3) \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$$

$$4) \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}$$

# Теорема 2

- Будь-який правильний раціональний дріб  $\frac{R_p(x)}{Q_m(x)}$  можна подати у вигляді скінченної суми елементарних дробів, а саме:

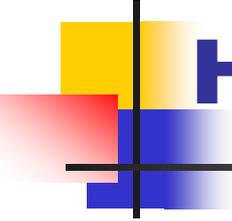
Якщо  $Q_m(x) = a_0(x-a)(x-b)^k(x^2+px+q)(x^2+px+q)^l$ ,

то

$$\frac{R_p(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x-b)^k} + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_lx + N_l}{(x^2 + px + q)^l} \quad (2)$$

# Приклад 1

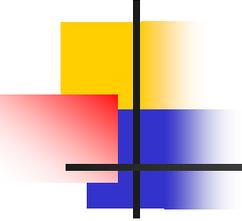
$$\frac{R_p(x)}{(x+1)(x+2)^2 x^3 (x^2-x+2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} +$$
$$+ \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2-x+2} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}$$



# Способи знаходження невизначених коефіцієнтів

---

1. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $x$ .
2. Метод окремих значень аргументу.
3. Комбінований метод.



# Інтеграл від неправильного раціонального дробу

---

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \int W_r(x) dx + \int \frac{R_p(x)}{Q_m(x)} dx$$

# Інтеграл від елементарного дробу 1-го типу

---

$$\int \frac{A}{x - a} dx = A \ln |x - a| + C$$

# Інтеграл від елементарного дробу 2-го типу

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$$

# Інтеграл від елементарного дробу 3-го типу

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx$$

обчислюється підстановкою  $x = t - \frac{p}{2}$

# Інтеграл від елементарного дробу 4-го типу

$$\int \frac{(Mx + N)dx}{(x^2 + px + q)^k}$$

підстановкою  $x = t - \frac{p}{2}$  зводиться до суми двох інтегралів, один з яких обчислюється безпосередньо, а інший – за допомогою рекурентної формули.

# Приклад 2

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx$$

$$\frac{x+2}{x^3-2x^2} = \frac{x+2}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} =$$

$$= \frac{Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2}{x^2(x-2)} \Rightarrow x+2 = x^2(A+C) + x(B-2A) - 2B,$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 = A + C \\ 1 = B - 2A \\ 2 = -2B \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} B = -1 \\ A = -1 \\ C = 1 \end{array} \quad \frac{x+2}{x^3-2x^2} = \frac{-1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-2},$$

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx = \int \left( -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-2} \right) dx = -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-2| + C.$$

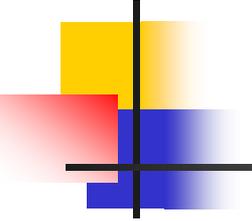
# Приклад 3

$$\int \frac{dx}{x^3 + x}$$

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + c}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + (Bx + c)x}{x(x^2 + 1)} = \frac{(A + B)x^2 + Cx + A}{x^3 + x}$$

$$A = 1 \quad B = -1 \quad C = 0$$

$$\int \frac{dx}{x^3 + x} = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$



# Алгоритм інтегрування раціональних функцій

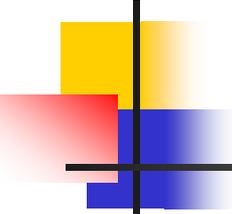
---

- 1. Якщо підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його подають у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дроби.
- 2. Знаменник правильного раціонального дроби розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб записують у вигляді суми елементарних дроби, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.
- 3. Інтегрують многочлен та елементарні дроби.

# Приклад 4

$$\int \frac{x^4 + 2x}{x^3 + 8} dx \quad \frac{x^4 + 2x}{x^3 + 8} = x - \frac{6x}{x^3 + 8}$$
$$\frac{6x}{x^3 + 8} = \frac{6x}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 4} =$$
$$= \frac{A(x^2 - 2x + 4) + (Bx + C)(x + 2)}{x^3 + 8} \Rightarrow 6x = A(x^2 - 2x + 4) + (Bx + C)(x + 2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6x = x^2(A + B) + x(-2A + 2B + C) + 4A + 2C$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \mid 0 = A + B \\ x^1 \mid 6 = -2A + 2B + C \\ x^0 \mid 0 = 4A + 2C \end{array} \right\} \Leftrightarrow A = -1, \quad B = 1, \quad C = 2.$$
$$x = -2 \Rightarrow -12 = 12A$$



# Контрольні запитання

---

- Многочлен.
- Корінь многочлена.
- Правильний раціональний дріб.
- Найпростіші раціональні дроби та їх інтегрування.
- Теорема про розклад раціонального дроби на суму найпростіших.
- Схема інтегрування раціональних функцій.