

ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

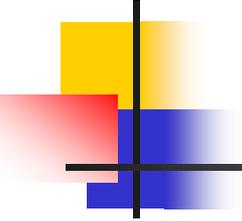
спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

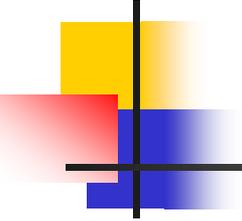
Шостак Сергій Володимирович

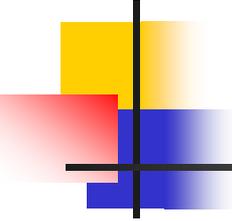
Тема 8: Інтегрування тригонометричних та ірраціональних функцій



1. Інтегрування тригонометричних функцій.
2. Інтегрування ірраціональних функцій.

Список джерел

- 
- 1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. –647с.
 - 2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Яковенко В.М. Вища математика, ч.2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.: НАУ, 2003, -297с.
 - 3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М. Вища математика. Збірник задач. – К.: НАУ, 2003, -218с.
 - 4. Шостак С.В. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» за модулем «Елементи математичного аналізу». –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2016, 115 с.
 - 5. Батечко Н.Г., Шостак С.В. ВИЩА МАТЕМАТИКА. Похідна та її застосування, –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2015, 109 с.



Раціоналізація інтегралів від тригонометричних функцій

- Інтеграли від тригонометричних та ірраціональних та функцій не завжди обчислюються в елементарних функціях. Наведемо основні типи таких інтегралів, які за допомогою певних підстановок зводяться до інтегралів від раціональних функцій (раціоналізуються).

Інтегрування

тригонометричних функцій

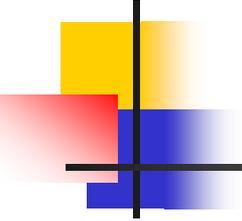
- Розглянемо підстановки, які використовують для обчислення інтегралів вигляду $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де R – деяка раціональна функція від функцій $\sin x$ і $\cos x$.

Універсальна тригонометрична підстановка

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

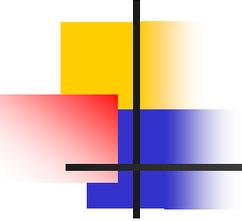
$$x = 2 \operatorname{arctg} t \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$



Приклад 1

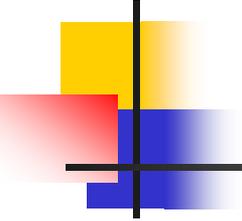
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{(1+t^2)2dt}{2t(1+t^2)} =$$
$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

Зауваження



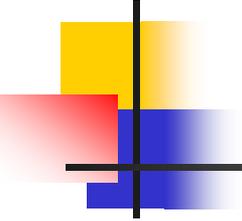
Універсальна тригонометрична підстановка завжди раціоналізує функцію $R(\sin x, \cos x)$, але на практиці її використовують, якщо під інтегралом функції і мають невисокий степінь, інакше розрахунки будуть дуже громіздкими.

У багатьох випадках доцільно застосовувати інші підстановки.



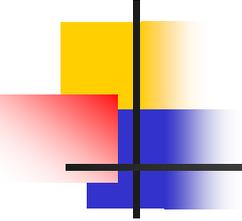
Підстановка $t = \cos x$

- Якщо підінтегральна функція непарна відносно $R(\sin x, \cos x)$, то роблять підстановку $t = \cos x$.



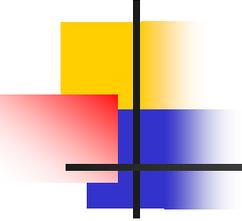
Приклад

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^3 x \cdot \sin x}{\cos^2 x \cdot \sin x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = \\ &= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{1 - t^2}{t^2} (-dt) = \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C\end{aligned}$$



Підстановка $t = \sin x$

- Якщо підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$, використовують підстановку $t = \sin x$.

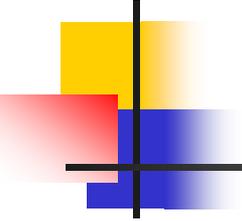


Приклад

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^3 x \sin^2 x \frac{\cos x}{\cos x} dx =$$

$$= \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| =$$

$$= \int (1 - t^2) t^2 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$



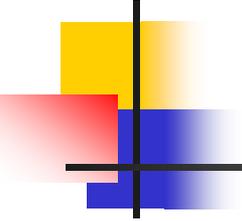
Підстановка $t = \operatorname{tg}x$

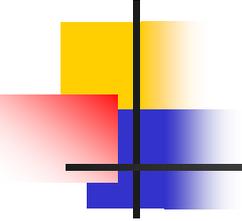
- Якщо підінтегральна функція — парна відносно $\sin x$ і $\cos x$, тобто,
$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

то в цьому випадку застосовують підстановку $t = \operatorname{tg}x$.

Для обчислення інтеграла $\int R(\operatorname{tg}x)dx$ теж роблять підстановку $t = \operatorname{tg}x$.

Приклад

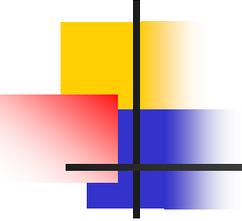

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}; \\ \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}; \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{(1+t^2)^2 (1+t^2) dt}{t^4 (1+t^2)} = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1 \right) dt =$$
$$= \frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} - 2\operatorname{ctg} x + C$$



Інтеграли виду $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} x dx$

Доцільно скористатись формулами
пониження степеня:

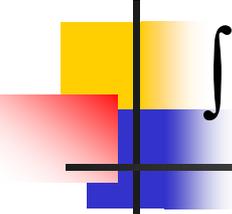
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$



Приклад

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx =$$
$$= \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C$$

Інтеграли виду

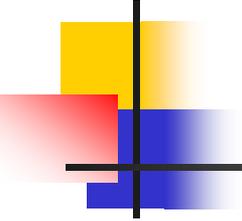

$$\int \sin ax \cdot \cos bxdx \quad \int \cos ax \cdot \cos bxdx \quad \int \sin ax \cdot \sin bxdx$$

- Потрібно скористатися тригонометричними формулами:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} (\sin(a+b)x + \sin(a-b)x)$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} (\cos(a+b)x + \cos(a-b)x)$$

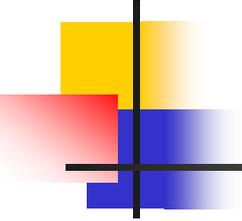
$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2} (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x)$$



Приклад

$$\int \cos 2x \cdot \sin 5x \cdot dx = \frac{1}{2} \int (\sin 7x + \sin 3x) dx = -\frac{1}{14} \cos 7x - \frac{1}{6} \cos 3x + C$$

Інтеграли виду


$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

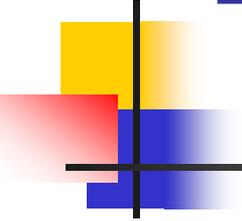
- за допомогою підстановки

$$x + \frac{b}{2a} = t$$

можна звести до табличних інтегралів (виділивши повний квадрат в підкореневому виразі).

Приклад

$$\begin{aligned} \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} &= \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{-(x^2-2x+1-6)}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}} = \\ &= \left. \begin{array}{l} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{(8t-3)}{\sqrt{6-t^2}} dt = 4 \int \frac{2tdt}{\sqrt{6-t^2}} - 3 \int \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{6})^2-t^2}} = \\ &= -4 \int \frac{d(6-t^2)}{\sqrt{6-t^2}} - 3 \arcsin \frac{t}{\sqrt{6}} + C = -8\sqrt{6-t^2} - 3 \arcsin \frac{t}{\sqrt{6}} + C = \\ &= -8\sqrt{5+2x-x^2} - 3 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + C. \end{aligned}$$



Інтеграл виду

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right) dx$$

- Підстановка:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$

Інтеграли виду

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx$$

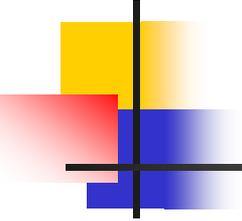
- Обчислюють за допомогою підстановки: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$

де S – найменше спільне кратне чисел n_1, n_2, \dots, n_k .

Інтеграл від диференціального бінома

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

1. якщо $p = 1$, то роблять підстановку $x = t^S$, де S — найменше спільне кратне знаменників дробів m та n
2. якщо $\frac{m+1}{n}$ — ціле число, то використовують підстановку $a + bx^n = t^S$, де S — знаменник дробу p .
3. якщо $\frac{m+1}{n} + p$ — ціле число, то застосовують підстановку $ax^{-n} + b = t^S$, де S — знаменник дробу p .



Контрольні запитання

- Многочлен.
 - Корінь многочлена.
 - Правильний раціональний дріб.
 - Найпростіші раціональні дроби та їх інтегрування.
 - Теорема про розклад раціонального дроби на суму найпростіших.
 - Схема інтегрування раціональних функцій.
- Інтегрування тригонометричних функцій.
- Інтегрування ірраціональних функцій.