ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР "Бакалавр"

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

спеціальність – 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

Тема 8: Інтегрування тригонометричних та ірраціональних функцій

1. Інтегрування тригонометричних функцій.
2. Інтегрування ірраціональних функцій.

Список джерел

- 1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. –647с.
- 2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Яковенко В.М. Вища математика, ч.2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.: НАУ, 2003, -297с.
- 3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М. Вища математика. Збірник задач. – К.: НАУ, 2003, -218с.
- 4. Шостак С.В. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» за модулем «Елементи математичного аналізу». –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2016, 115 с.
- 5. Батечко Н.Г., Шостак С.В. ВИЩА МАТЕМАТИКА. Похідна та її застосування, –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2015, 109 с.

Раціоналізація інтегралів від тригонометричних функцій

- Інтеграли від тригонометричних та ірраціональних та функцій не завжди обчислюються в елементарних функціях. Наведемо основні типи таких інтегралів, які за допомогою певних підстановок зводяться до інтегралів від раціональних функцій (раціоналізуються).

Інтегрування тригонометричних функцій

- Розглянемо підстановки, які використовують для обчислення інтегралів вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R – деяка раціональна функція від функцій $\sin x$ і $\cos x$.

Універсальна тригонометрична підстановка

$$t = tg\frac{x}{2}$$

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2arctgt \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Приклад 1

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t,\ \ x=2\operatorname{arctg}t,\\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2},\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{(1+t^2)2dt}{2t(1+t^2)}=$$

$$=\int\frac{dt}{t}=\ln|\,t\,|+C=\ln\left|\,\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$$

Зауваження

Універсальна тригонометрична підстановка завжди раціоналізує функцію $R(\sin x, \cos x)$, але на практиці її використовують, якщо під інтегралом функції і мають невисокий степінь, інакше розрахунки будуть дуже громіздкими.

У багатьох випадках доцільно застосовувати інші підстановки.

Підстановка $t = \cos x$

- Якщо підінтегральна функція непарна відносно $R(\sin x, \cos x)$, то роблять підстановку $t = \cos x$.

Приклад

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^3 x \cdot \sin x}{\cos^2 x \cdot \sin x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx =$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^2}(-dt) =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$$

Підстановка $t = \sin x$

- Якщо підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$, використовують підстановку $t = \sin x$.

Приклад

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^3 x \sin^2 x \frac{\cos x}{\cos x} dx =$$

$$= \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right) \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \left(1 - t^2\right) t^2 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

Підстановка $t = tgx$

- Якщо підінтегральна функція — парна відносно $\sin x$ і $\cos x$, тобто,

  $$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

  то в цьому випадку застосовують підстановку $t = tgx$.

  Для обчислення інтеграла $\int R(tgx)dx$ теж роблять підстановку $t = tgx$.

Приклад

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2}; \\ \sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{t^2}{1+t^2}; \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\left(1+t^2\right)^2 \left(1+t^2\right) dt}{t^4 \left(1+t^2\right)} = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1 \right) dt =$$

$$= \frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} - 2\operatorname{ctg} x + C$$

Інтеграли виду $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} x dx$

Доцільно скористатись формулами пониження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

Приклад

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x \right) + C$$

Інтеграли виду

$$\int \sin ax \cdot \cos bx dx \quad \int \cos ax \cdot \cos bx dx \quad \int \sin ax \cdot \sin bx dx$$

- Потрібно скористатися тригонометричними формулами:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x)$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x)$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x)$$

Приклад

$$\int \cos 2x \cdot \sin 5x \cdot dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin 7x + \sin 3x\right) dx = -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$$

Інтеграли виду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

- за допомогою підстановки

$$x+\frac{b}{2a}=t$$

можна звести до табличних інтегралів (виділивши повний квадрат в підкореневому виразі).

Приклад

$$\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{-(x^2-2x+1-6)}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{(8t-3)}{\sqrt{6-t^2}} dt = 4\int \frac{2tdt}{\sqrt{6-t^2}} - 3\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 - t^2}} =$$

$$= -4\int \frac{d\left(6-t^2\right)}{\sqrt{6-t^2}} - 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C = -8\sqrt{6-t^2} - 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C =$$

$$= -8\sqrt{5+2x-x^2} - 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + C.$$

Інтеграл виду $\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right)dx$

- Підстановка:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$

Інтеграли виду

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$$

- Обчислюють за допомогою підстановки: $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^s$

де S – найменше спільне кратне чисел $n_1, n_2 \ldots, n_k$.

Інтеграл від диференціального бінома

$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$$

1. якщо $p = 1$, то роблять підстановку $x = t^s$, де s — найменше спільне кратне знаменників дробів m та n

2. якщо $\frac{m+1}{n}$ — ціле число, то використовують підстановку $a + bx^n = t^s$, де S — знаменник дробу p .

3. якщо $\frac{m+1}{n} + p$ — ціле число, то застосовують підстановку $ax^{-n} + b = t^s$, де S — знаменник дробу p .

Контрольні запитання

- Многочлен.
- Корінь многочлена.
- Правильний раціональний дріб.
- Найпростіші раціональні дроби та їх інтегрування.
- Теорема про розклад раціонального дробу на суму найпростіших.
- Схема інтегрування раціональних функцій.

Інтегрування тригонометричних функцій.

Інтегрування ірраціональних функцій.