Тема 5.

Визначений інтеграл та його властивості

План лекції:

1. Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла.
2. Поняття визначеного інтеграла.
3. Властивості визначеного інтеграла.
4. Формула Ньютона-Лейбніца.
5. Методи інтегрування у визначеному інтегралі.

1. Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла

Задача 1.

Обчислення площі плоскої фігури

Задача 2.

Обчислення роботи змінної сили

Обчислення площі плоскої фігури

Розглянемо криволінійну трапецію – плоску фігуру, обмежену лініями

$$y = f(x) \geq 0, \quad y = 0, \quad x = a, \quad x = b,$$

і визначимо її площу.

Обчислення площі плоскої фігури

Розіб'ємо проміжок $[a;\ b]$ на n частин точками $x_i,\ i = \left(\overline{0,\ n}\right)$ так що $a = x_0,\ b = x_n$. Виберемо точки ξ_i так: $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$. Побудуємо прямокутники з основою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і висотою $f\left(\xi_i\right)$ (рис. 1).

Побудова прямокутника

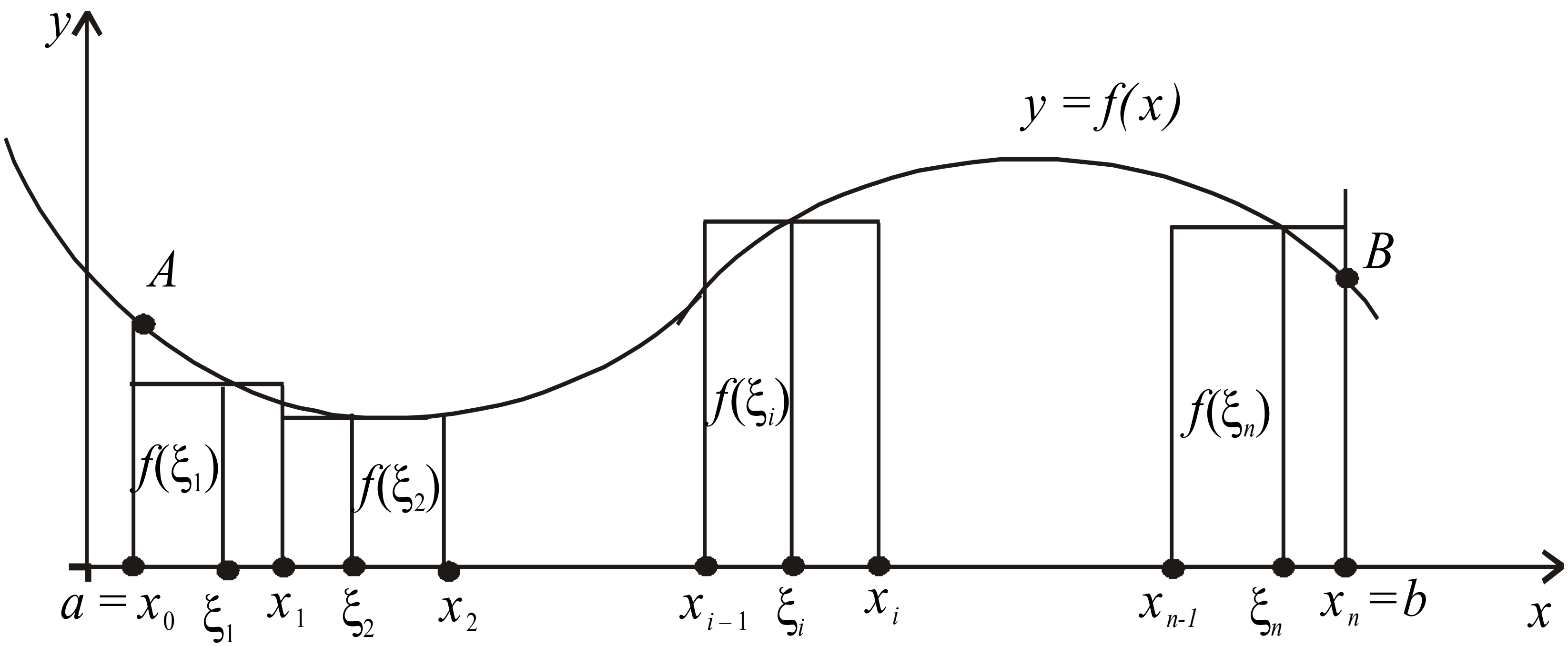


Рис. 1

Обчислення площі плоскої фігури

Площа елементарного прямокутника $\Delta S_i = f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i$.

Площа ступінчастої фігури $\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i = S_n$

буде тим менше відрізнятись від площі криволінійної трапеції, чим менша довжина $\max\Delta x_i$, тобто

$$S_{aBAb} = \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\xi_i\cdot\Delta x_i .$$

Задача 2. Обчислення роботи змінної сили

Визначимо роботу змінної сили $\vec{F}$ по переміщенню матеріальної точки із точки a в точку b на відрізку $[a; b]$ (рис. 2).

Переміщення матеріальної точки на відрізку

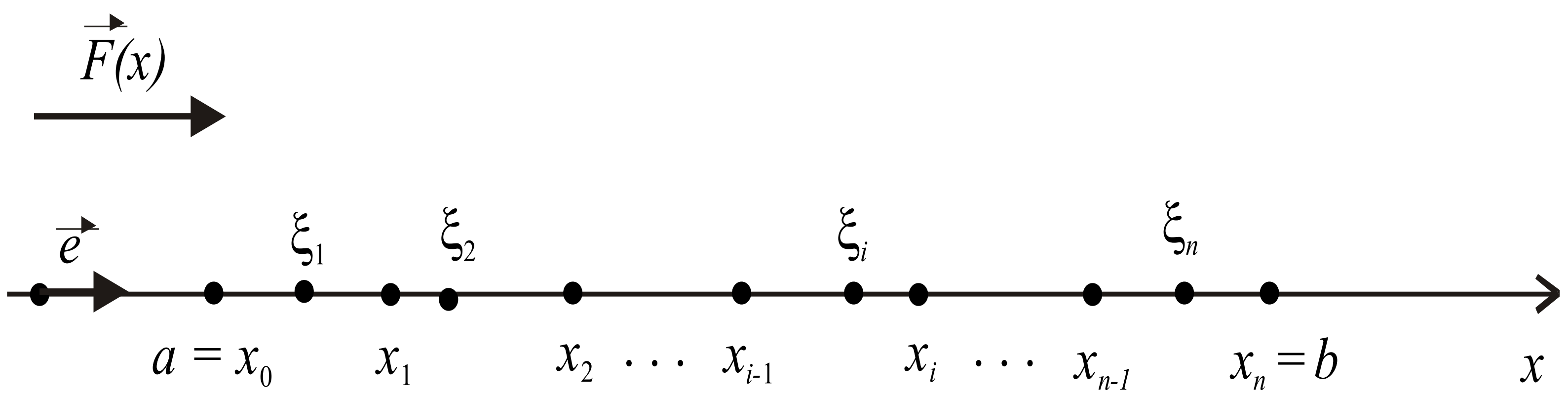


Рис. 2

Обчислення роботи змінної сили

Розіб’ємо проміжок $[a;\, b]$ на n частин точками $x_i, i = \left(\overline{0, n}\right)$. На кожному з відрізків $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ вважатимемо, що сила стала і дорівнює $f\left(\xi_i\right)$, де $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$.

Елементарна робота сили на відрізку

Елементарна робота сили на відрізку Δx_i Дорівнює $\Delta A_i = f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i$. Тоді робота A сили $\vec{F}$ на відрізку $[a;\ b]$ визначаєьтся так:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i .$$

Інтегральна сума

Сума вигляду $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$ називається *інтегральною сумою*. В загальному випадку інтегральна сума може залежати від способу розбиття $[a;\ b]$ на частини Δx_i , а також від вибору на них точок ξ_i.

2. Поняття визначеного інтеграла

Нехай $y = f(x)$ — деяка функція, задана на проміжку $[a;\ b]$. Розіб'ємо $[a;\ b]$ на n частин точками x_i, так що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Поняття визначеного інтеграла

Обчислимо $f(\xi_i)$, де $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$,

$i = \left(\overline{1, n}\right)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

і складемо інтегральну суму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

Позначимо $\lambda = \max \Delta x_i$

Означення

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n , при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття $[a;\ b]$ на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i , то ця границя називається *визначеним інтегралом від функції* $f(x)$ *на проміжку* $[a;\ b]$ і позначається:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Означення

З означення випливає, що визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ залежить від функції $f(x)$ та проміжку $[a;\ b]$ і не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Означення

Функція, для якої на проміжку $[a;\ b]$ існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$

називається *інтегрованою на цьому проміжку*.

Далі буде показано, що всі неперервні функції є інтегрованими.

Геометричний зміст визначеного інтеграла

Якщо

$$f(x) \geq 0, \quad x \in [a; b]$$

то $$\int_a^b f(x)dx$$

дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції (рис. 1).

3. Властивості визначеного інтеграла

I. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = kc \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Властивості визначеного інтеграла

II. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровані на $[a;\ b]$, то

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

Властивості визначеного інтеграла

III. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить свій знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Властивості визначеного інтеграла

IV. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Властивості визначеного інтеграла

V. Якщо $f(x)$ – інтегрована на проміжках: $[a;\ b], [a;\ c], [c;\ b]$, то:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Властивості визначеного інтеграла

VI. Якщо $f(x) = c = \mathrm{const}$,

то $$\int_a^b c\,dx = c \cdot (b - a).$$

Властивості визначеного інтеграла

VII. Якщо $f(x)$ функція інтегрована на і

$f(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Властивості визначеного інтеграла

VIII. Якщо $f(x)$, $g(x)$ — інтегровані на $[a,b]$, причому $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$

Властивості визначеного інтеграла

IX. Якщо $f(x)$ — інтегрована на $[a, b]$, причому $m \le f(x) \le M$ для $x \in [a, b]$,

то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$.

Властивості визначеного інтеграла

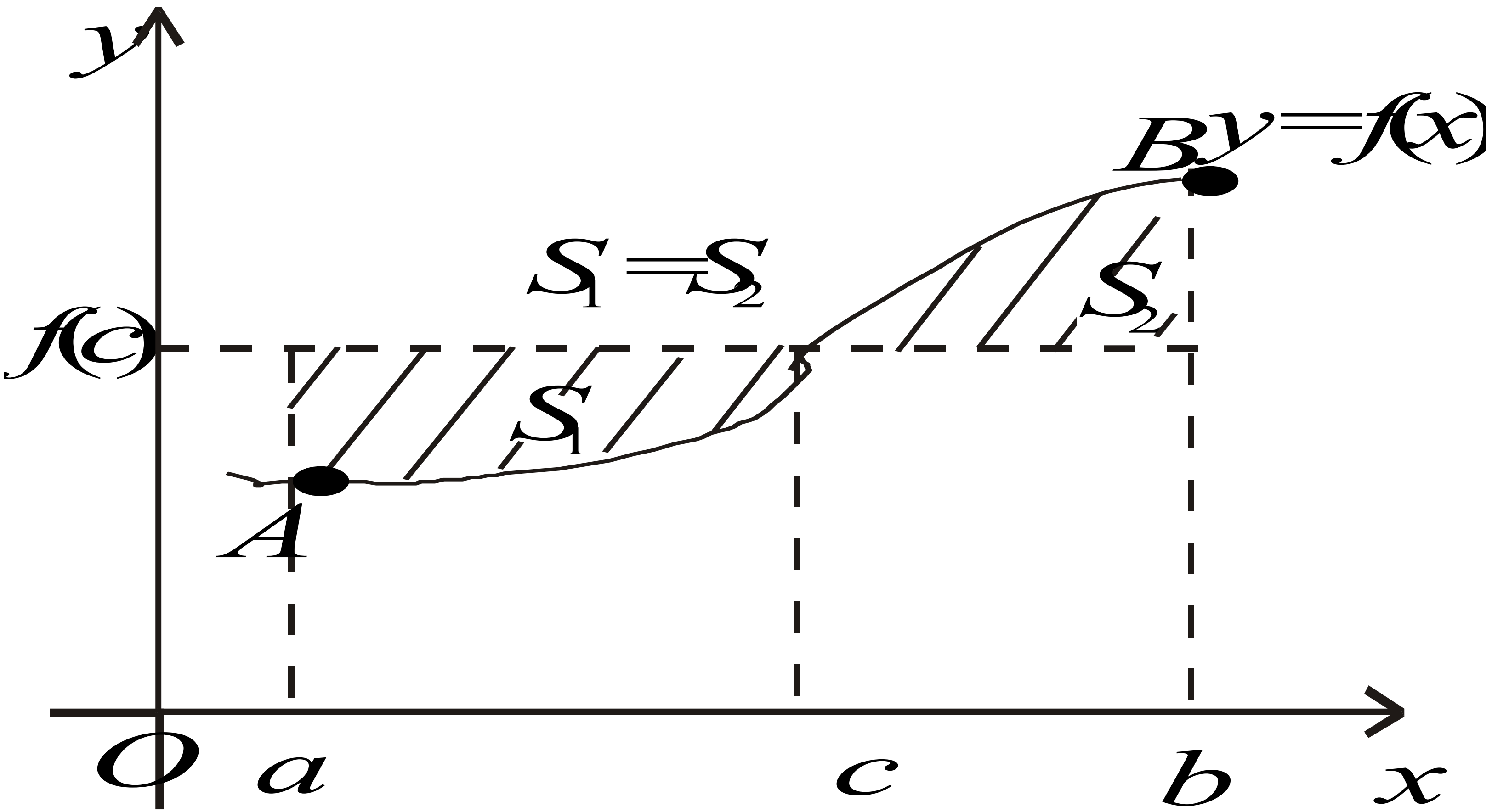
X. *Теорема про середнє.* Якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x \in [a, b]$, то знайдеться така точка $c \in [a, b]$, що:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Геометричний зміст теореми про середнє:

Існує прямокутник зі сторонами $f(c), c \in [a, b]$ та $b - a$, рівновеликий криволінійній трапеції aABв за умови, що Функція $f(x) \geq 0$ і неперервна на проміжку $[a;\ b]$ (рис. 3).

Прямокутник



4. Формула Ньютона-Лейбніца

Розглянемо інтеграл $\Phi(x)=\int_a^x f(x)dt$ який є функцією від верхньої межі інтегрування.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна для будь-якого $x\in[a;\, b]$, то похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування дорівнює підінтегральній функції, тобто

Наслідки

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x).$$

Наслідок 1. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею від функції $f(x)$ є первісною для цієї функції.

Наслідок 2. Будь-яка неперервна функція на проміжку $[a;\, b]$ має на цьому проміжку первісну, зокрема, функцію $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$

Формула Ньютона-Лейбніца

Позначивши $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ розглянемо

формулу Ньютона-Лейбніца, яка встановлює зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

5. Методи інтегрування у визначеному інтегралі

Якщо $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a;\, b]$ а функція $x = \varphi(t)$ неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на $[\alpha;\, \beta]$ причому $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ то

Метод заміни змінної

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{array}{c} x=\varphi(t), \\ dx=\varphi'(t)dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \end{array} = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt.$$

Метод інтегрування частинами

Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають неперервні похідні для $x \in [a;\ b]$, то

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$