ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

Тема 10: Невласні інтеграли. Застосування визначених інтегралів

1. Невласні інтеграли I роду.
2. Невласні інтеграли II роду.
3. Застосування визначеного інтеграла.

Список джерел

- 1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. –647с.
- 2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Яковенко В.М. Вища математика, ч.2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.: НАУ, 2003, -297с.
- 3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М. Вища математика. Збірник задач. – К.: НАУ, 2003, -218с.
- 4. Шостак С.В. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» за модулем «Елементи математичного аналізу». –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2016, 115 с.
- 5. Батечко Н.Г., Шостак С.В. ВИЩА МАТЕМАТИКА. Похідна та її застосування, –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2015, 109 с.

Невласні інтеграли першого роду

- *Означення. Невласним інтегралом I роду*

(з нескінченною верхньою межею) від функції *f(x)* називається границя від інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ і позначається так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \quad . \ (1)$$

Поняття збіжності інтегралу

- Якщо границя (1) існує та скінченна, то невласний інтеграл називається ***збіжним***, а якщо не існує (зокрема нескінченна), то — ***розбіжним***.

Обчислення невласних інтегралів I роду

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\left(F(b)-F(a)\right),$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\left(F(b)-F(a)\right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx\,,$$

Приклад 1(випадок I)

- Дослідити на збіжність інтеграл Діріхле $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$

Нехай $p = 1$.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln|x|\right)\Big|_{1}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln b - \ln 1\right) = +\infty,$$

інтеграл розбіжний.

Приклад 1(випадок II)

- Нехай $p < 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right) \Bigg|_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to+\infty} \left(b^{1-p} - 1 \right) = +\infty$$

інтеграл розбіжний.

Приклад 1(випадок III)

- *Якщо p* > 1.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\left.\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\right|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(b^{\frac{1}{p-1}}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{1-p}(0-1)=\frac{1}{p-1}$$

інтеграл збіжний.

- Отже, інтеграл Діріхле збіжний при $p>1$ та розбіжний при $p\le 1$.

Поняття невласного інтегралу II роду

- *Означення*. *Невласним інтегралом* II роду (від необмеженої функції). Називається $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ і позначається

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad (2)$$

Якщо ця границя існує, то інтеграл називається ***збіжним***, а якщо не існує, то — ***розбіжним***.

Обчислення невласних інтегралів II роду(випадок 1)

- Якщо $x = a$ – точка розриву другого роду функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(F(b) - F(a+\varepsilon)\right).$$

Обчислення невласних інтегралів II роду(випадок 2)

- Якщо $x = b$ – точка розриву другого роду функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(F(b-\varepsilon) - F(a)\right).$$

Обчислення невласних інтегралів II роду(випадок 3)

- Якщо $x = c \in (a;\ b)$ – точка розриву другого роду функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Зауваження

- До невласних інтегралів, які мають точку розриву, що є внутрішньою для $[a;\ b]$, не можна застосувати формулу Ньютона—Лейбніца.

Приклад 2

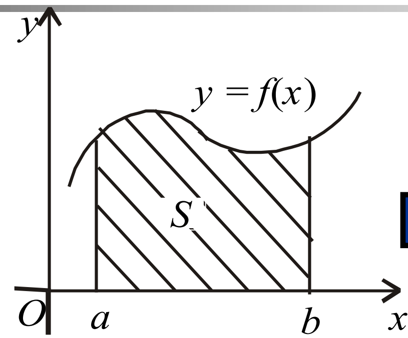
$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{0+\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon_1}+$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\varepsilon_2}^{1}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-1\right)+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=+\infty+\infty=+\infty$$

Отже, даний інтеграл розбіжний.

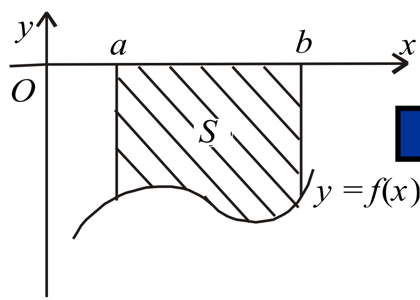
Обчислення площі плоскої фігури (частина I)

$f(x) \geq 0$



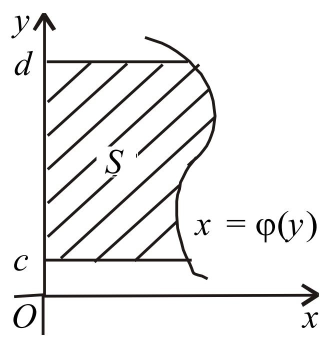
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x) \leq 0$



$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

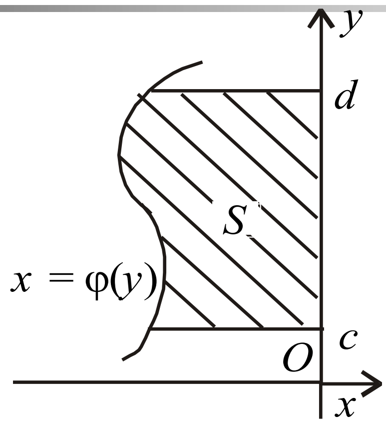
$\varphi(y) \geq 0$



$$S = \int_c^d \varphi(y)dy$$

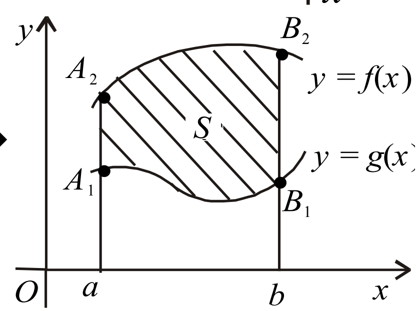
Обчислення площі плоскої фігури (частина II)

$$\varphi(y) \le 0$$



$$S = \left| \int_c^d \varphi(y)\, dy \right|$$

$$f(x) \ge g(x)$$



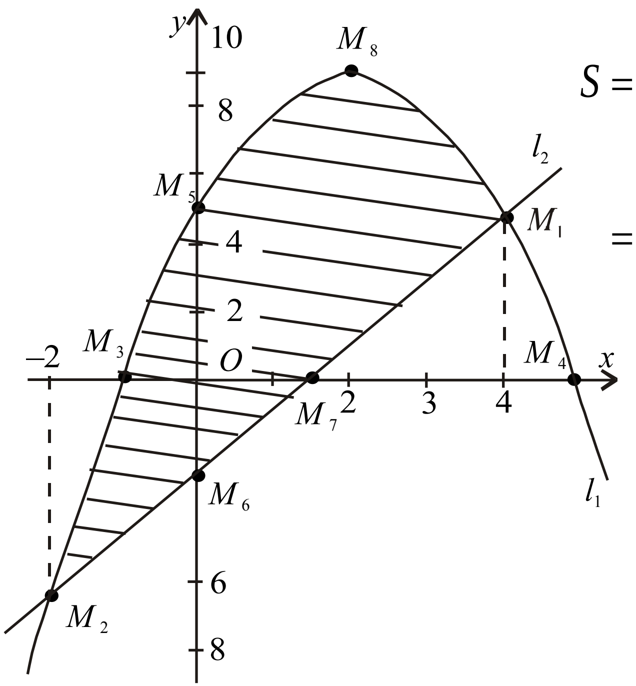
$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta, \end{cases}$$

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)\, x'(t)\, dt$$

Приклад 3

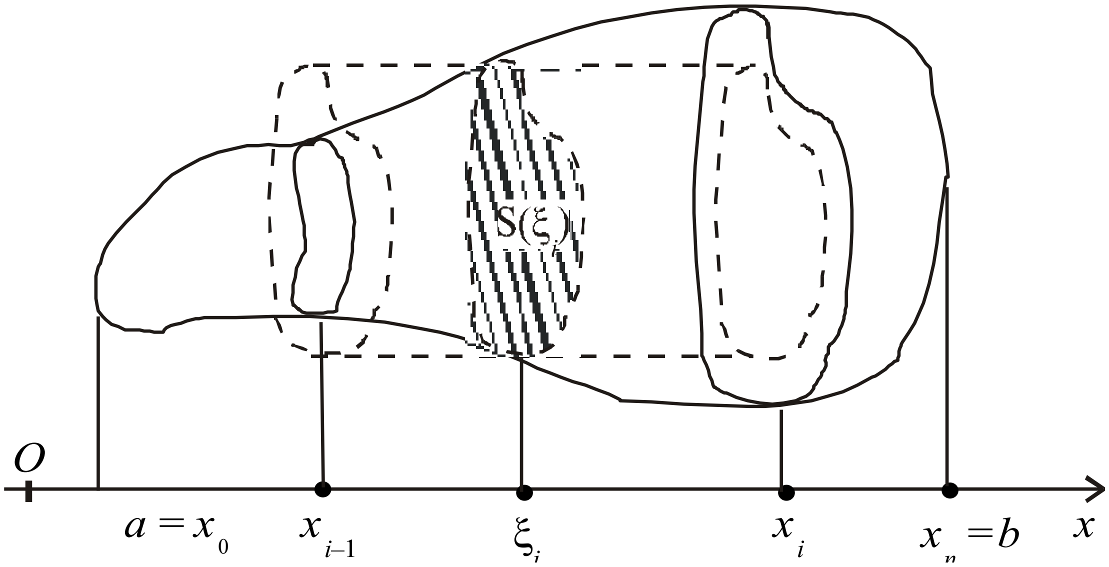
- Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=-x^2+4x+5$ та $y=2x-3.$



$$S=\int_{-2}^{4}\left(-x^2+4x+5-(2x-3)\right)dx=\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right)\Bigg|_{-2}^{4}=$$

$$=-\frac{64}{3}+16+32-\left(\frac{8}{3}+4-16\right)=36.$$

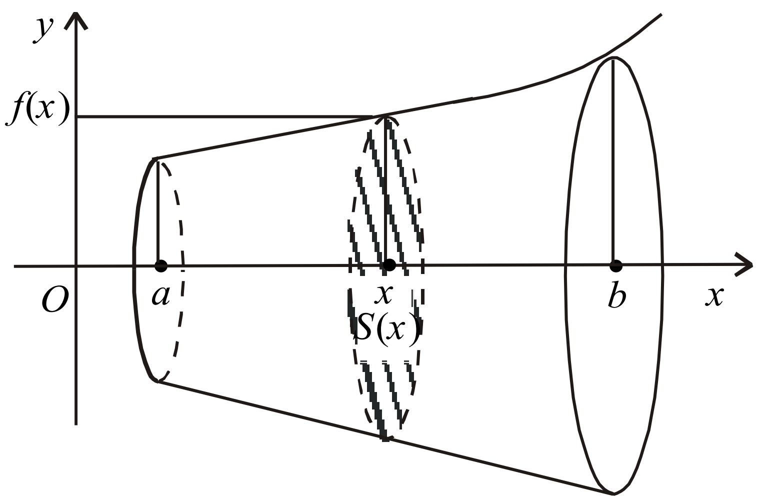
Обчислення об’єму тіла



$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Об'єм тіла утвореного обертанням навколо осі OX

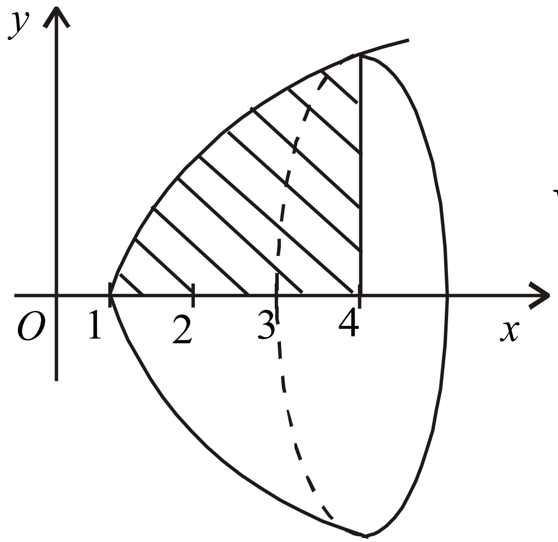
$$y = f(x) \geq 0,\ y = 0,\ x = a,\ x = b$$



$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Приклад 4

- Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = 3x - 3$, $x = 1$, $x = 4$.



$$V = \pi \int_1^4 y^2 dx = \pi \int_1^4 (3x-3)dx = \frac{3\pi}{2}(x-1)^2 \Big|_1^4 = \frac{27}{2}\pi$$

Об'єм тіла утвореного обертанням навколо осі *Oy*

- об'єм тіла V_y, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $x = 0$, $x = \varphi(y) \geq 0$,

$y = c$, $y = d$, знаходять так:

$$V_y = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 \, dy$$

Обчислення довжини дуги кривої

$$f(x) \Rightarrow l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$x = x(t),\ y = y(t),\ \ \alpha \le t \le \beta \Rightarrow l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \ \alpha \le t \le \beta$$

$$\Downarrow$$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox*

$$y = f(x), \;\; a \le x \le b \quad \Rightarrow \quad Q = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

$$x = x(t),\; y = y(t), \;\; \alpha \le t \le \beta$$

$$\Downarrow$$

$$Q = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

Контрольні запитання

- Площа криволінійної трапеції.
- Довжина дуги плоскої кривої.
- Об’єм тіла обертання.
- Площа поверхні тіла обертання.
- Невласні інтеграли.
- Обчислення невласних інтегралів.