



ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

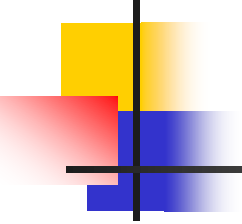
галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович



Лекція №1. Диференціальні рівняння першого порядку. Основні означення і положення.

- 1. Поняття диференціального рівняння.
- 2. Основні означення і положення щодо диференціальних рівнянь першого порядку
- 3. Геометричний зміст розв'язку диференціального рівняння першого порядку
- 4. Задача Коші
- 5. Теорема існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння першого порядку
- 6. Особливі точки

Список джерел

- 1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. –647с.
- 2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Яковенко В.М. Вища математика, ч.2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.: НАУ, 2003, -297с.
- 3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М. Вища математика. Збірник задач. – К.: НАУ, 2003, -218с.
- 4. Шостак С.В. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» за модулем «Елементи математичного аналізу». –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2016, 115 с.
- 5. Ю.Б. Гнучій, І.І.Ковтун, Т.А.Скороход, С.В. Шостак. Вища математика. Частина четверта. Диференціальні рівняння.Ряди. Навчальний посібник, –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2015, 249 с.



Поняття диференціального рівняння

- ***Диференціальним рівнянням*** називається рівняння, що пов'язує незалежну змінну x , функцію від цієї змінної y , похідні цієї функції і має вигляд

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$



Порядок диференціального рівняння

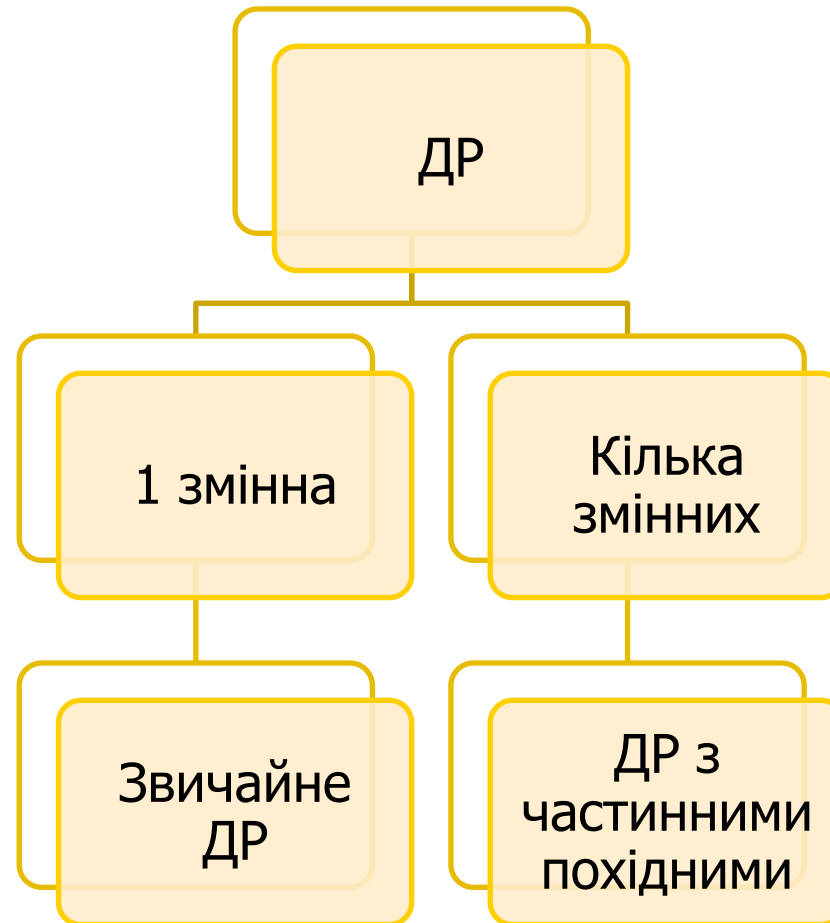
- Порядок старшої похідної називається **порядком** диференціального рівняння.

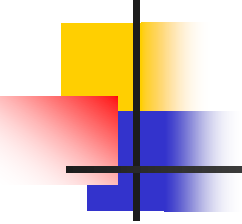
Розв'язок диференціального рівняння

- **Розв'язком** диференціального рівняння (1) називається функція $y = \varphi(x)$, підставляючи яку разом із її похідними $y' = \varphi'(x), \dots, y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x)$ у рівняння (1) дістаємо тотожність

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Види диференціальних рівнянь

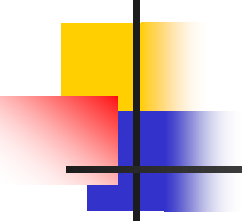




Диференціальні рівняння першого порядку

- **Диференціальним рівнянням першого порядку** називається рівняння, що пов'язує незалежну змінну x , функцію $y(x)$, її похідну $y'(x)$ і має вигляд $F(x, y, y') = 0$. (2)

ДР 1-го порядку розв'язане відносно похідної



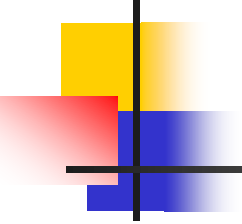
- Якщо рівняння (2) можна розв'язати відносно похідної y' , то воно матиме вигляд: $y' = f(x, y)$. (3)



Диференціальне рівняння у диференціалах dx та dy

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (4)$$

Зведення рівняння (4) до рівнянь (1-3)



Диференціальне рівняння (4) можна звести до рівняння (1-3), якщо $Q(x, y) \neq 0$, враховуючи, що

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad (5)$$



Розв'язок диференціального рівняння першого порядку

Означення. Розв'язком

диференціального рівняння першого порядку вигляду (2), (3), (4)

називається функція $y = \varphi(x)$,

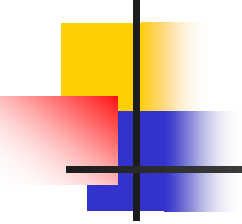
підставляючи яку разом із

похідною $y' = \varphi'(x)$ у відповідне

диференціальне рівняння дістаємо тотожність.

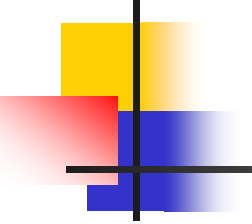
Інтеграл ДР

- Розв'язок диференціального рівняння першого порядку може бути знайдений також у вигляді неявної функції $\Phi(x, y) = 0$.
- Такий розв'язок називають **інтегралом ДР**.



Геометричний зміст розв'язку диференціального рівняння першого порядку

Розв'язку $y = \varphi(x)$ рівняння (3)
відповідає деяка крива - **інтегральна
крива.**



Загальний розв'язок диференціального рівняння

- **Означення.** Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція, що містить довільну сталу і яка задовольняє умови:
- 1) функція $\varphi(x, C)$ є розв'язком диференціального рівняння,
- 2) при заданих **початкових умовах** $y(x_0) = y_0$ стала C знаходяться однозначно.



Частинний розв'язок диференціального рівняння

Знайшовши сталу C_0 , маємо

функцію $\varphi(x, C_0)$ - **частинний розв'язок**
диференціального рівняння (3).



Загальний інтеграл диференціального рівняння першого порядку

- Загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку може бути знайдений в неявному вигляді

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad . \quad (7)$$

- Такий розв'язок називають **загальним інтегралом** диференціального рівняння першого порядку.

Задача Коші

- **Задача Коші** полягає в тому, щоб серед усіх розв'язків рівняння (3) $y' = f(x, y)$ знайти такий розв'язок $y = y(x)$, в якому функція $y = y(x)$ набуває задане значення y_0 при заданому числовому значенні x_0 незалежної змінної, тобто

$$y(x_0) = y_0 \text{ або } y|_{x=x_0} = y_0 \quad (8)$$

Початкові умови



- Число x_0 називається **початковим значенням** незалежної змінної.
- Числа x_0 , y_0 називаються **початковими даними**, а умови (8) - **початковими умовами** рівняння (3).

Теорема існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння першого порядку

- **Теорема.** Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ має єдиний розв'язок, що задовольняє початкові умови (8) в деякому околі точки $(x_0; y_0)$, якщо в цьому околі функція $f(x, y)$
 - 1) неперервна по x та y ,
 - 2) має неперервну похідну $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Особливі точки

- Розглянемо диференціальне рівняння, розв'язане відносно похідної: $y' = f(x, y)$.
- Якщо в деякій точці (x_0, y_0) області визначення D функції $f(x, y)$ порушуються умови теореми існування і єдності розв'язку, то така точка називається **особливою**.
- Розрізняють такі особливі точки: **вузол, сідло, центр**.



Контрольні запитання

1. Означення диференціального рівняння.
2. Порядок ДР.
3. Поняття розв'язку диференціального рівняння.
4. Інтегральна крива.
5. Загальний розв'язок диференціального рівняння.
6. Частинний розв'язок диференціального рівняння.
7. Теорема Коші.
8. Задача Коші.