



ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

Тема 12: Диференціальні рівняння, що розв'язуються в квадратурах

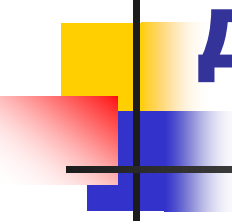


- 1. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними**
- 2. Однорідні по y та диференціальні рівняння.**
- 3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.**
- 4. Властивості лінійного диференціального рівняння.**
- 5. Метод Бернуллі.**
- 6. Диференціальні рівняння Бернуллі.**
- 7. Диференціальні рівняння у повних диференціалах.**

Список джерел

- 1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. –647с.
- 2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Яковенко В.М. Вища математика, ч.2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.: НАУ, 2003, -297с.
- 3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М. Вища математика. Збірник задач. – К.: НАУ, 2003, -218с.
- 4. Шостак С.В. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» за модулем «Елементи математичного аналізу». –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2016, 115 с.
- 5. Ю.Б. Гнучій, І.І.Ковтун, Т.А.Скороход, С.В. Шостак. Вища математика. Частина четверта. Диференціальні рівняння.Ряди. Навчальний посібник, –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2015, 249 с.

Інтегрування диференціального рівняння



- Розв'язати диференціальне рівняння означає проінтегрувати його. Інтеграл можна знайти тільки тоді, коли під інтегралом функція і диференціал залежать від однієї тієї самої змінної. У диференціальному рівнянні є дві змінні x та y . Тому найбільш простим є *відокремити ці змінні*.

Рівняння з відокремлюваними змінними

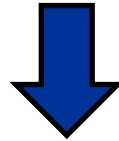


$$\blacksquare P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0 \quad (1)$$

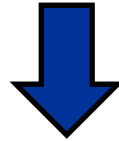
$$\blacksquare y' = f_1(x)f_2(y) \quad (2)$$

Відокремлення змінних у рівнянні (1)

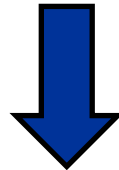
$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$$



$$Q_1(x)Q_2(y)dy = -P_1(x)P_2(y)dx.$$



$$\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = -\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx$$



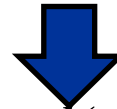
$$\int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = -\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx$$

Приклад 1

$$y(1+x^2)dy + x(1-y^2)dx = 0.$$



$$\frac{x(1-y^2)dx}{(1-y^2)(1+x^2)} = -\frac{y(1+x^2)dy}{(1+x^2)(1-y^2)}, \quad \frac{xdx}{1+x^2} = -\frac{ydy}{1-y^2}$$



$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = -\int \frac{ydy}{1-y^2}, \quad \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1-y^2)}{1-y^2},$$



$$\frac{1}{2} \ln|1+x^2| = \frac{1}{2} \ln|1-y^2| - C_1, \quad \ln|1+x^2| = \ln|1-y^2| + \ln C, \quad 1-y^2 = C(1+x^2)$$



$$y^2 = 1 - C(1+x^2).$$

Схема розв'язання диференціального рівняння виду (2)

$$\begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ \swarrow \quad \searrow \\ y' = \frac{dy}{dx} \quad f(x, y) = f_1(x)f_2(y) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \\ \downarrow \\ dy = f_1(x)f_2(y)dx \\ \downarrow \\ \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx \end{array}$$

Приклад 2

$$(1 + y^2) + xy y' = 0$$


$$y' = -\frac{1 + y^2}{xy}, \quad x \neq 0, y \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1 + y^2}{y}$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{y dy}{1 + y^2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{y dy}{1 + y^2}, \quad \ln|x| = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1 + y^2)}{1 + y^2}, \quad \ln|x| = -\frac{1}{2} \ln|1 + y^2| + \ln|C|.$$

$$x = \frac{C}{\sqrt{1 + y^2}}$$



$$x^2(1 + y^2) = C.$$

Однорідна функція



- **Означення.** Функція $f(x, y)$ називається **однорідною** функцією по x та y порядку k , якщо виконується умова

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) .$$

Однорідне

дифференціальне рівняння

1. Дифференціальне рівняння вигляду

$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$ (2) називається

однорідним, якщо функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ є однорідними функціями одного порядку.

2. Якщо дифференціальне рівняння має

вигляд $y' = f_1(x)f_2(y)$ (3), то воно

називається **однорідним по x та y** ,

якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового порядку.

Розв'язування однорідного диференціального

- Зводиться до розв'язування рівняння з відокремленими змінними за допомогою заміни

$$\frac{y}{x} = z, \quad y' = z'x + z .$$

$$y' = f(x, y) \quad \Rightarrow \quad z'x + z = \varphi(z) \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{\varphi(z) - z}{x}, \quad x \neq 0,$$

Знайшовши z , маємо розв'язок однорідного рівняння $y = zx$

Приклад 3

- **Задачі Коші:** $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$, $y(3) = 4$.

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \quad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y}{x}}, \quad x \neq 0, \quad \text{заміна : } \frac{y}{x} = z, \quad y' = z'x + z$$

$$z'x + z = z + \sqrt{1 + z^2}, \quad z'x = \sqrt{1 + z^2}.$$

$$\frac{dz}{dx}x = \sqrt{1 + z^2}, \quad \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|z + \sqrt{1 + z^2}| = \ln|x| + \ln|C|, \quad z + \sqrt{1 + z^2} = Cx.$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx, \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2. \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} 4 + \sqrt{3^2 + 4^2} = 3^2 C, \quad C = 1 \\ \downarrow \\ y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 \end{array}$$



Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

$$y' + p(x)y = q(x), (4)$$

$$x'_y + p(y)x = q(y) (5)$$

Властивості лінійного диференціального рівняння





- **1.** Лінійне диференціальне рівняння залишається лінійним при будь-якій заміні незалежної змінної $x = \varphi(t)$
- **2.** Лінійне диференціальне рівняння зберігає свій вигляд при заміні

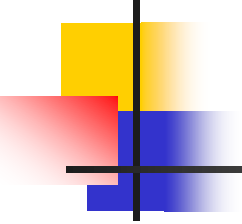
$$y = \alpha(x)z + \beta(x)$$

Види лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку



$$y' + p(x)y = q(x)$$

- **якщо** $q(x) \neq 0$  **неоднорідне,**
- **якщо** $q(x) = 0$  **однорідне.**



Розв'язування лінійного однорідного рівняння

$$y' + p(x)y = 0$$

Лінійне однорідне рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$y' = -p(x)y$$

Розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y' + p(x)y = q(x)$$

- Метод Бернуллі, заміна:

$$y(x) = u(x)v(x), \quad y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x), \quad u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$$

$$v' + p(x)v = 0$$

$$u'v = q(x)$$



$$y = u(x)v(x).$$

Приклад 3

- Задачі Коші: $y' + y \cos x = \sin x \cos x$, $y(0) = -1$.
- Заміна: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + \cos x \cdot uv = \sin x \cos x, \quad u'v + u(v' + \cos x \cdot v) = \sin x \cos x.$$

$$v' + v \cos x = 0 \qquad u'v = \sin x \cos x$$



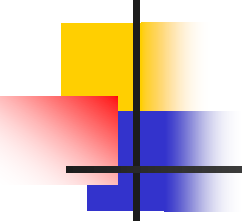
$$v = e^{-\sin x} \qquad u = e^{\sin x} (\sin x - 1) + C.$$

$$y = \left(e^{\sin x} (\sin x - 1) + C \right) e^{-\sin x}, \quad y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}.$$

$$-1 = \sin 0 - 1 + Ce^{\sin 0}, \quad C = 0.$$

$$y = \sin x - 1.$$

Диференціальні рівняння Бернуллі



$$y' + p(x)y = y^k q(x), \quad k \neq 0, k \neq 1.$$

- Розв'язок методом Бернуллі, заміна:

$$y(x) = u(x)v(x), \quad y' = u'v + uv'$$

Диференціальні рівняння у повних диференціалах

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

- Загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах має вигляд:

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy = C$$

або

$$\int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy = C.$$

Контрольні запитання



- Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
- Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.
- Диференціальні рівняння в повних диференціалах.
- Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.
- Рівняння Бернуллі.