ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

Тема12: Диференціальні рівняння, що розв’язуються в квадратурах

1. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними
2. Однорідні по та диференціальні рівняння.
3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.
4. Властивості лінійного диференціального рівняння.
5. Метод Бернуллі.
6. Диференціальні рівняння Бернуллі.
7. Диференціальні рівняння у повних диференціалах.

Список джерел

- 1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. –647с.
- 2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Яковенко В.М. Вища математика, ч.2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.: НАУ, 2003, -297с.
- 3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М. Вища математика. Збірник задач. – К.: НАУ, 2003, -218с.
- 4. Шостак С.В. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» за модулем «Елементи математичного аналізу». –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2016, 115 с.
- 5. Ю.Б. Гнучій, І.І.Ковтун, Т.А.Скороход, С.В. Шостак. Вища математика. Частина четверта. Диференціальні рівняння.Ряди. Навчальний посібник, –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2015, 249 с.

Інтегрування диференціального рівняння

- Розв’язати диференціальне рівняння означає проінтегрувати його. Інтеграл можна знайти тільки тоді, коли під інтегралом функція і диференціал залежать від однієї тієї самої змінної. У диференціальному рівняння є дві змінні x та y . Тому найбільш простим є *відокремити ці змінні.*

Рівняння з відокремлюваними змінними

- $P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$ (1)
- $y' = f_1(x)f_2(y)$ (2)

Відокремлення змінних у рівнянні (1)

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$$

$$Q_1(x)Q_2(y)dy = -P_1(x)P_2(y)dx.$$

$$\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = -\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx$$

$$\int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = -\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx$$

Приклад 1

$$y(1+x^2)dy + x(1-y^2)dx = 0.$$

$$\frac{x(1-y^2)dx}{(1-y^2)(1+x^2)} = -\frac{y(1+x^2)dy}{(1+x^2)(1-y^2)}, \quad \frac{xdx}{1+x^2} = -\frac{ydy}{1-y^2}$$

$$\int\frac{xdx}{1+x^2} = -\int\frac{ydy}{1-y^2}, \quad \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int\frac{d(1-y^2)}{1-y^2},$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| = \frac{1}{2}\ln\left|1-y^2\right| - C_1,\ \ln\left|1+x^2\right| = \ln\left|1-y^2\right| + \ln C,\ 1-y^2 = C(1+x^2)$$

$$y^2 = 1 - C(1+x^2).$$

Схема розв'язання диференціального рівняння виду (2)

$$y' = f(x, y)$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$$

$$dy = f_1(x) f_2(y) dx$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx$$

Приклад 2

$$(1+y^2)+xyy'=0$$

$$y'=-\frac{1+y^2}{xy}, \quad x\neq 0, y\neq 0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1+y^2}{y}$$

$$\frac{dx}{x}=-\frac{ydy}{1+y^2}$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{ydy}{1+y^2}, \quad \ln|x|=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+y^2)}{1+y^2}, \quad \ln|x|=-\frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right|+\ln|C|.$$

$$x=\frac{C}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$x^2(1+y^2)=C.$$

Однорідна функція

- ***Означення.*** **Функція** $f(x,y)$ називається **однорідною** функцією по x та y порядку k , якщо виконується умова

$$f(tx,ty)=t^k f(x,y) .$$

Однорідне диференціальне рівняння

1. **Диференціальне рівняння** вигляду $P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$ (2) називається **однорідним**, якщо функції $P(x, y), \quad Q(x, y)$ є однорідними функціями одного порядку.

2. Якщо **диференціальне рівняння** має вигляд $y' = f_1(x)f_2(y)$ (3), то воно називається **однорідним по** x **та** y, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового порядку.

Розв'язування однорідного диференціального

- **Зводиться до розв'язування рівняння з відокремленими змінними за допомогою заміни**

$$\frac{y}{x} = z, \quad y' = z'x + z \; .$$

$$y' = f(x, y) \;\Rightarrow\; z'x + z = \varphi(z) \;\Rightarrow\; z' = \frac{\varphi(z) - z}{x}, \quad x \neq 0,$$

Знайшовши z , маємо розв'язок однорідного рівняння $y = zx$

Приклад 3

- Задачі Коші: $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y(3) = 4.$

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \quad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y}{x}}, \quad x \neq 0$$, заміна : $\frac{y}{x} = z, \quad y' = z'x + z$

$$z'x + z = z + \sqrt{1 + z^2}, \quad z'x = \sqrt{1 + z^2}.$$

$$\frac{dz}{dx}x = \sqrt{1 + z^2}, \qquad \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln\left|z + \sqrt{1 + z^2}\right| = \ln|x| + \ln|C|, \quad z + \sqrt{1 + z^2} = Cx.$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx, \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2. \to \quad 4 + \sqrt{3^2 + 4^2} = 3^2 C, \quad C = 1$$

$$\downarrow$$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2$$

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (4)$$

$$x'_y + p(y)x = q(y) \quad (5)$$

Властивості лінійного диференціального рівняння

- **1.** Лінійне диференціальне рівняння залишається лінійним при будь-якій заміні незалежної змінної $x = \varphi(t)$

- **2**. Лінійне диференціальне рівняння зберігає свій вигляд при заміні

$$y = \alpha(x)z + \beta(x)$$

Види лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$y' + p(x)y = q(x)$$

- **якщо** $q(x) \neq 0$ $\Rightarrow$ **неоднорідне,**
- **якщо** $q(x) = 0$ $\Rightarrow$ **однорідне.**

Розв’язування лінійного однорідного рівняння

$$y' + p(x)y = 0$$

Лінійне однорідне рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$y' = -p(x)y$$

Розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y' + p(x)y = q(x)$$

- Метод Бернуллі, заміна:

$$y(x) = u(x)v(x), \;\; y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x), \quad u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$$

$$v' + p(x)v = 0 \qquad u'v = q(x)$$

$$y = u(x)v(x).$$

Приклад 3

- Задачі Коші: $y' + y\cos x = \sin x \cos x, \; y(0) = -1.$
- Заміна: $y = uv, \quad y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + \cos x \cdot uv = \sin x \cos x, \quad u'v + u(v' + \cos x \cdot v) = \sin x \cos x.$$

$$v' + v\cos x = 0 \qquad\qquad u'v = \sin x \cos x$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$v = e^{-\sin x} \qquad u = e^{\sin x}(\sin x - 1) + C.$$

$$y = \left(e^{\sin x}(\sin x - 1) + C\right)e^{-\sin x}, \quad y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}.$$

$$-1 = \sin 0 - 1 + Ce^{\sin 0}, \quad C = 0.$$

$$y = \sin x - 1.$$

Диференціальні рівняння Бернуллі

$$y' + p(x)y = y^k q(x),\ k \neq 0, k \neq 1.$$

- Розя’зок методом Бернуллі, заміна:

$$y(x) = u(x)v(x),\ y' = u'v + uv'$$

Диференціальні рівняння у повних диференціалах

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

- Загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах має вигляд:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C$$

або

$$\int_{0}^{x} P(x,0)dx + \int_{0}^{y} Q(x,y)dy = C.$$

Контрольні запитання

- Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
- Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.
- Диференціальні рівняння в повних диференціалах.
- Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.
- Рівняння Бернуллі.