

ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

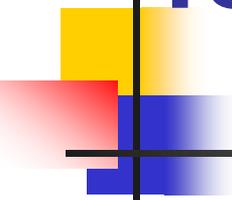
галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

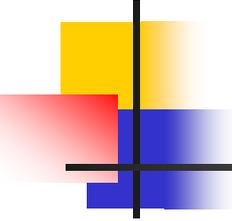
Шостак Сергій Володимирович



Тема1: Похідна функції однієї змінної

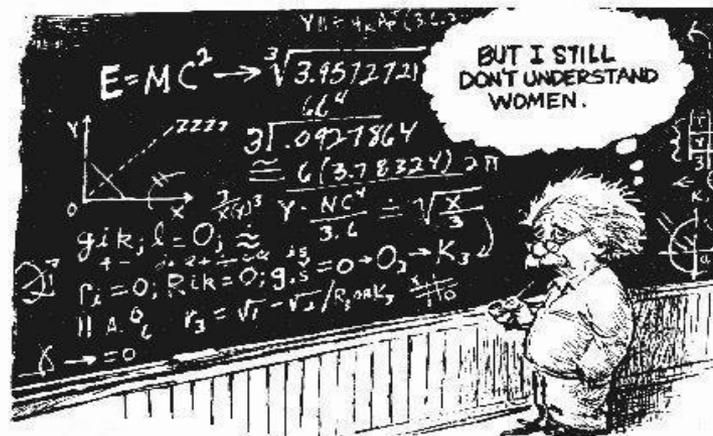
- ***1. Означення похідної***
- ***2. Геометричний зміст похідної***
- ***3. Механічний зміст похідної***
- ***4. Залежність між неперервністю і диференційовністю функції***
- ***5. Основні правила диференціювання***
- ***6. Похідні від основних елементарних функцій***

Список джерел

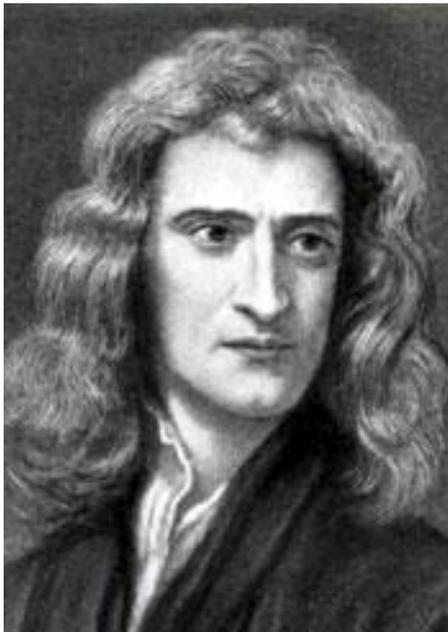
- 
- 1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. –647с.
 - 2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Яковенко В.М. Вища математика, ч.2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.: НАУ, 2003, -297с.
 - 3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М. Вища математика. Збірник задач. – К.: НАУ, 2003, -218с.
 - 4. Шостак С.В. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» за модулем «Елементи математичного аналізу». –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2016, 115 с.
 - 5. Батечко Н.Г., Шостак С.В. ВИЩА МАТЕМАТИКА. Похідна та її застосування, –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2015, 109 с.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Поняття похідної є одним з основних понять математичного аналізу. Розділ математики, в якому вивчається поняття похідної та її застосування до дослідження функцій, називають **диференціальним численням**.



ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ



І. НЬЮТОН



Г. Лейбніц

ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВЕЛИ ДО ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ

ЗАДАЧІ

```
graph TD; A[ЗАДАЧІ] --- B[про миттєву швидкість]; A --- C[про дотичну до кривої]
```

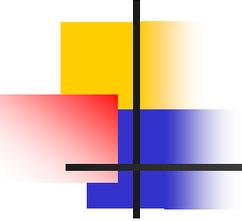
про миттєву
швидкість

про дотичну
до кривої

Означення похідної

Означення. *Похідною функції за аргументом x* називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

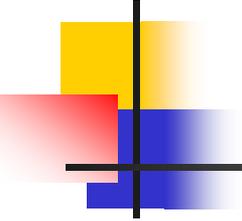




Означення похідної (аналітичний вигляд)

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ПОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ



$$\underbrace{y', y'_x, f'(x),}$$

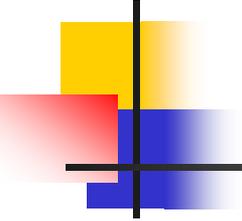
позначення

Лагранжа

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, \frac{d}{dx} f(x)}$$

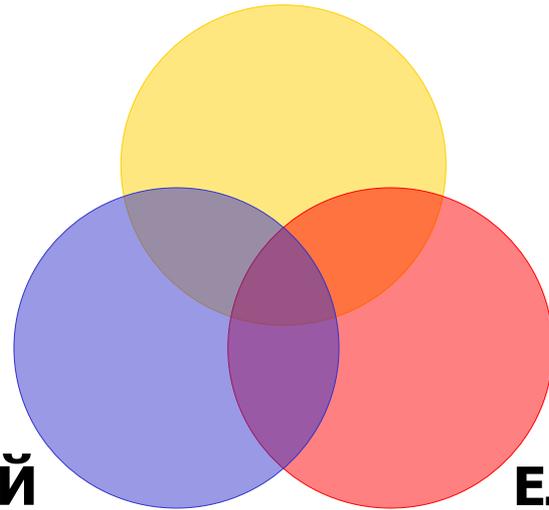
позначення

Лейбніца



ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

ГЕОМЕТРИЧНИЙ

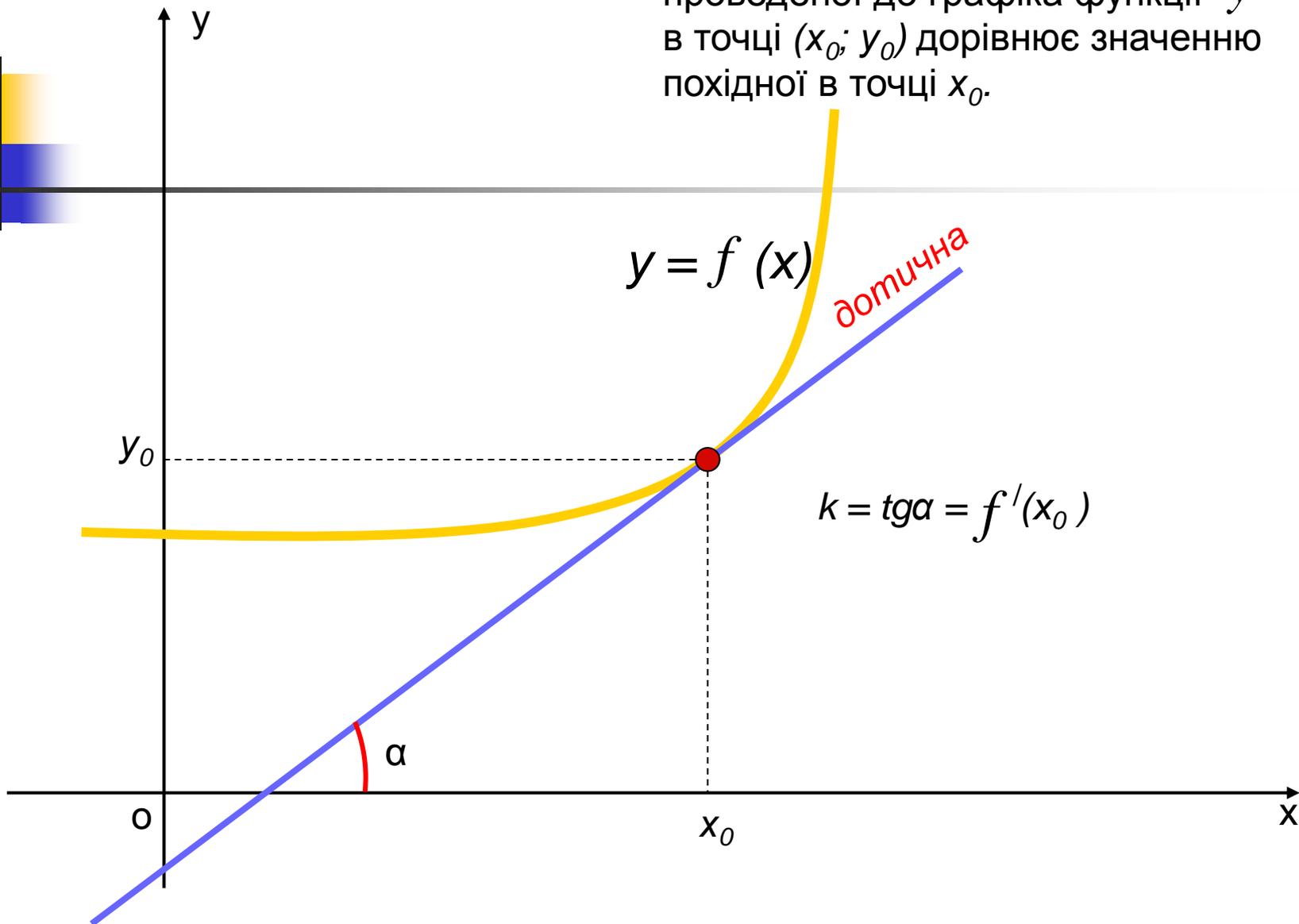


МЕХАНІЧНИЙ

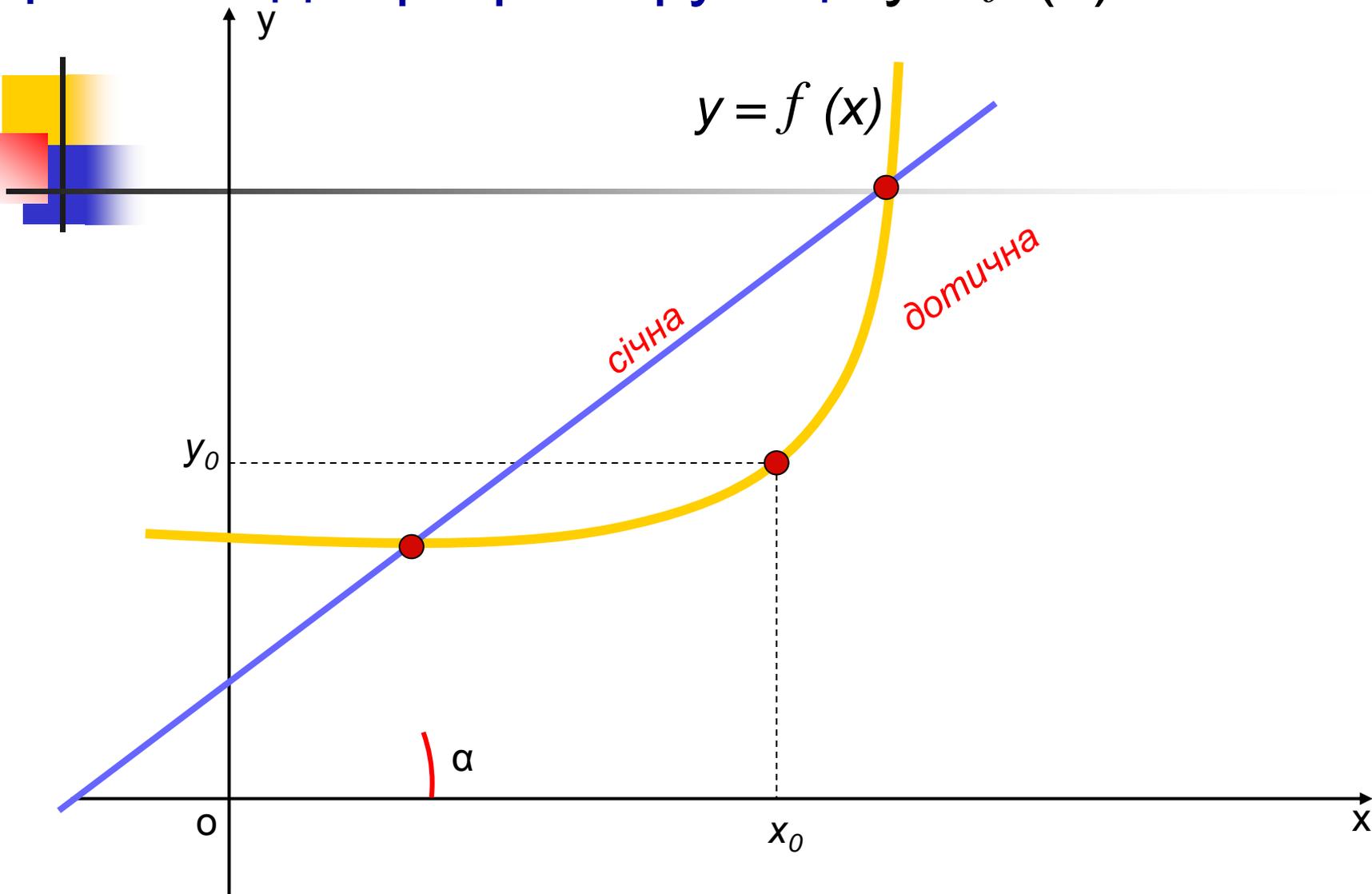
ЕЛЕКТРИЧНИЙ

Геометричний зміст похідної:

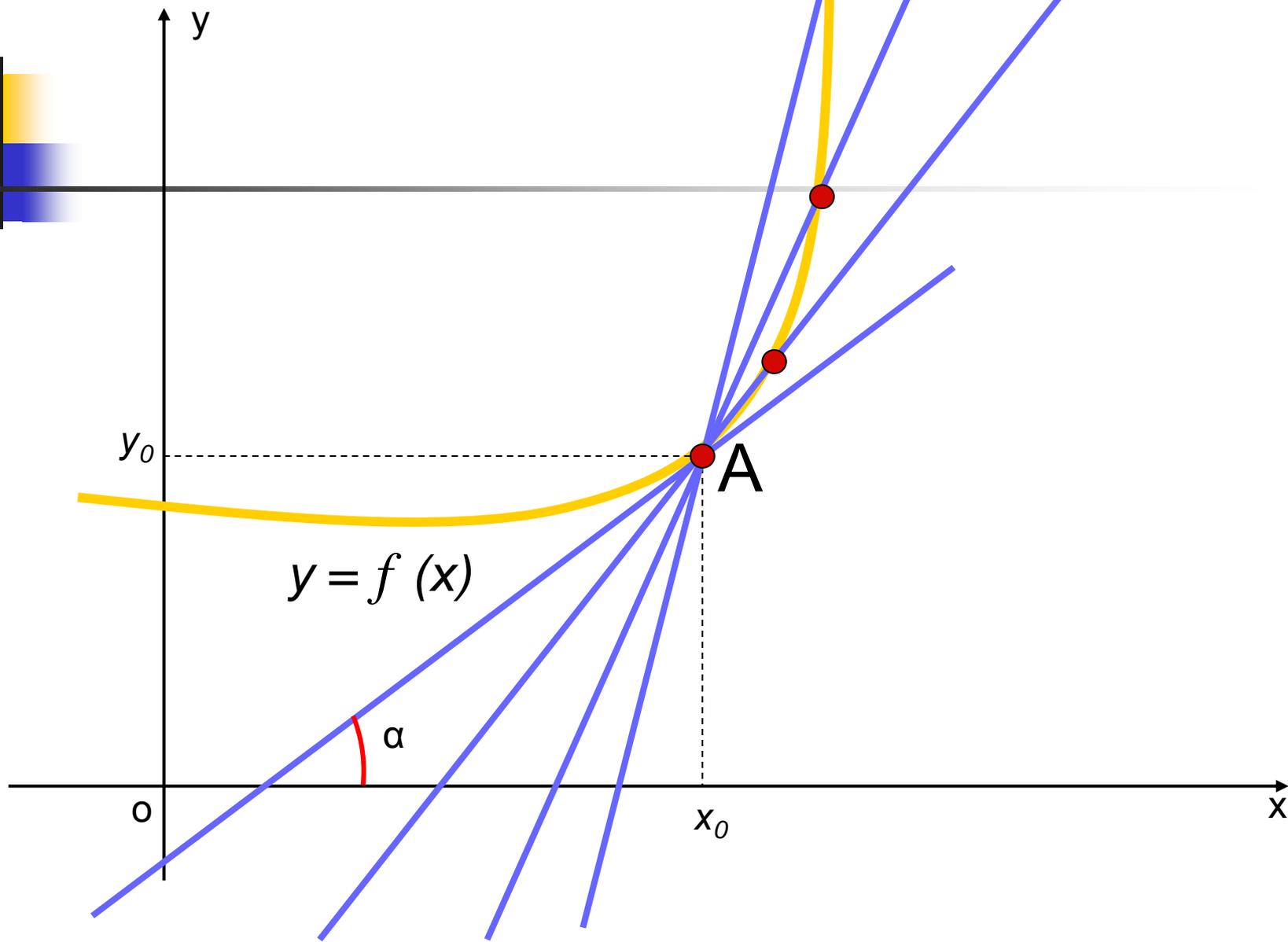
Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_0; y_0)$ дорівнює значенню похідної в точці x_0 .



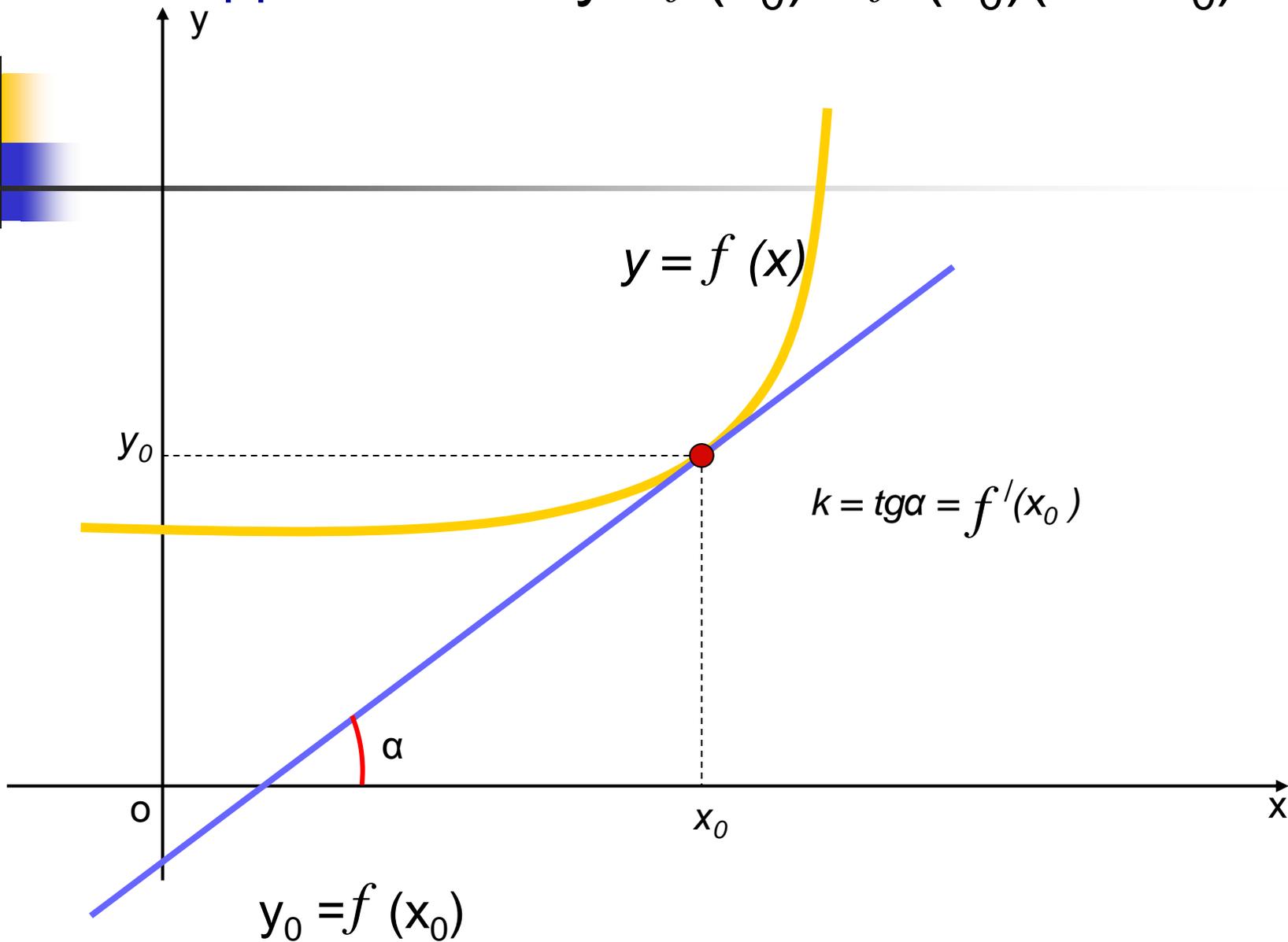
Дотична до графіка функції $y = f(x)$



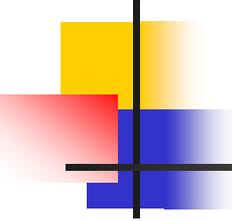
Дотична до графіка функції $y = f(x)$



Рівняння дотичної: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.



Механічний зміст похідної:

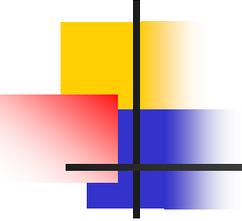


$$v(t_0) = x'(t_0) \quad a(t_0) = v'(t_0)$$

x_0 – координата точки

$v(t_0)$ – швидкість точки в момент часу t_0

$a(t_0)$ – прискорення точки в момент часу t_0



ЕЛЕКТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

- Нехай $Q = Q(t)$ - кількість електрики, яка пройшла через поперечний переріз провідника за час t . Сила струму $i(t)$ в момент часу t є похідна від кількості електрики $Q(t)$ по часу t , тобто

$$i(t) = Q'(t)$$

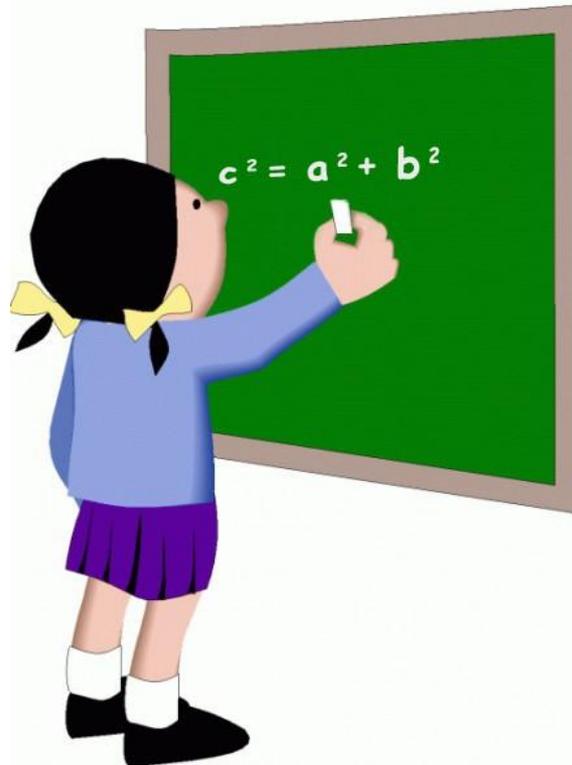
Похідна функцій $y = C$, $y = x$, $y = \sqrt{x}$

$$y = C(\text{const})$$

$$y' = 0$$

$$y = x$$

$$y' = 1$$



$$y = \sqrt{x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Похідна степеневої функції



$$y = x^n$$

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

Похідна показникової функції



$$y = a^x$$

$$y' = a^x \ln a$$

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

Похідна логарифмічних функцій

$$y = \log_a x$$

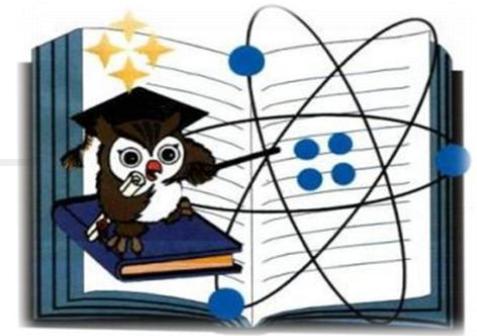
$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$



Похідна тригонометричних функцій



$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y = \cos x$$

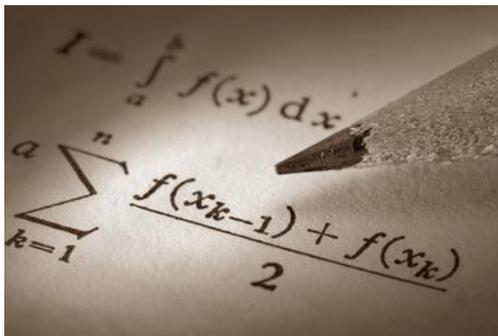
$$y' = -\sin x$$

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \operatorname{ctg} x$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$



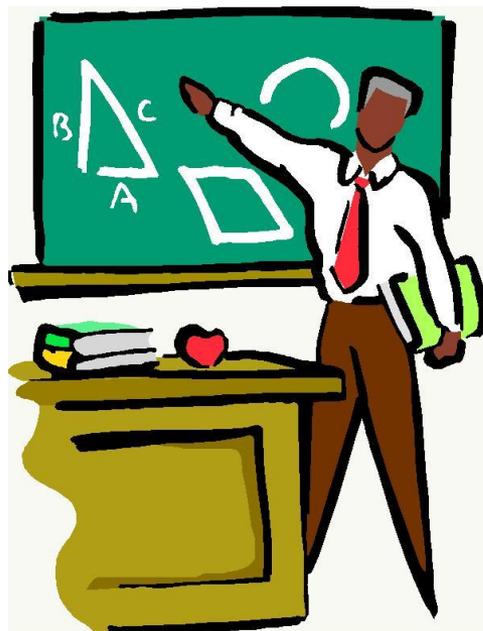
Похідні від обернених тригонометричних функцій

$$y = \arcsin x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arccos x$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



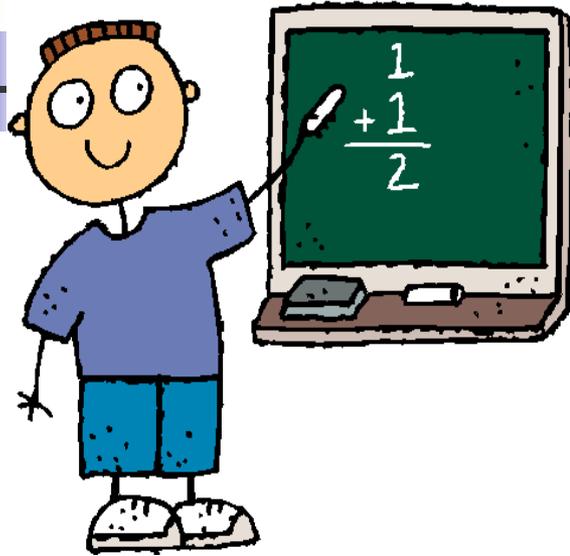
$$y = \operatorname{arctg} x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \operatorname{arcctg} x$$

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Похідна складеної функції



$$y = f(\varphi(x))$$

$$y' = f'_{\varphi} \cdot \varphi'_x$$

Приклад:

$$y = \sin \sqrt{\ln 8^x}$$

$$y' = \cos \sqrt{\ln 8^x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln 8^x}} \cdot \frac{1}{8^x} \cdot 8^x \ln 8$$

Формула похідної суми

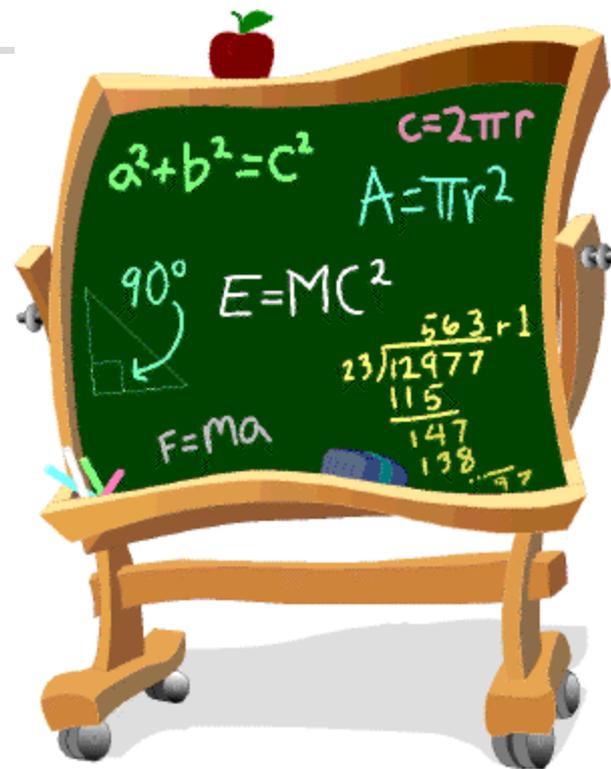
$$y = u + v$$

$$y' = u' + v'$$

Приклад:

$$y = 4x^6 + x^7 + 3x$$

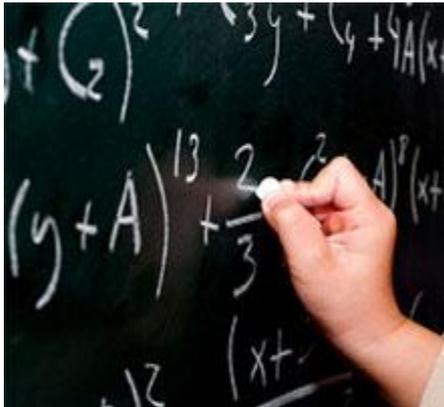
$$y' = 24x^5 + 7x^6 + 3$$



Формула похідної добутку

$$y = u \cdot v$$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$



Приклад:

$$y = \cos x \cdot \log_9 x$$

$$y' = -\sin x \cdot \log_9 x + \cos x \cdot \frac{1}{x \ln 9}$$

Формула похідної частки

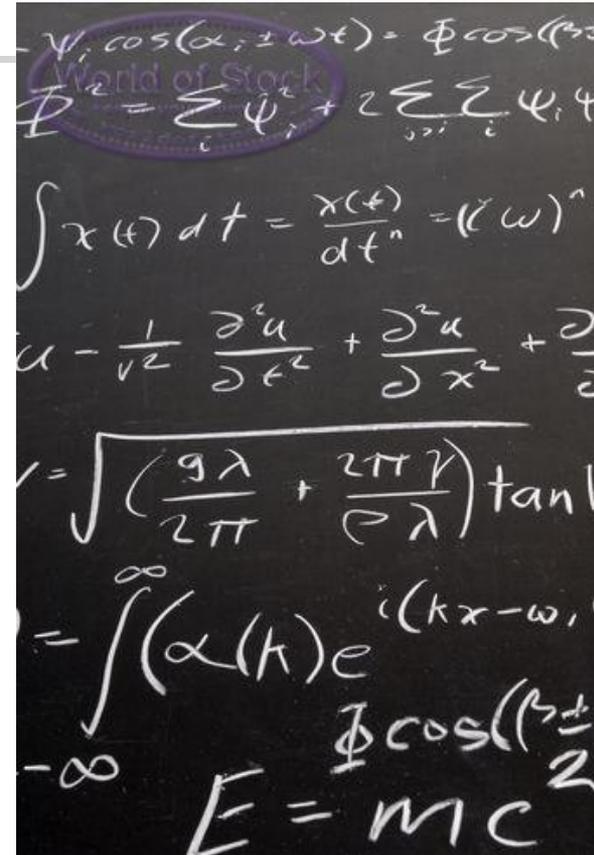
$$y = \frac{u}{v}$$

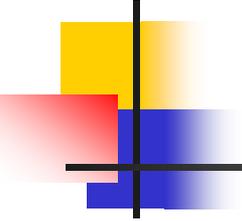
$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Приклад:

$$y = \frac{\arcsin x}{\ln x}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln x - \arcsin x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$





Контрольні запитання

1. **Означення похідної.**
2. **Алгоритм знаходження похідної за означенням.**
3. **Фізичний зміст похідної.**
4. **Геометричний зміст похідної.**
5. **Електричний зміст похідної.**
6. **Похідна суми.**
7. **Похідна добутку.**
8. **Похідна частки.**
9. **Похідна складеної функції.**
10. **Похідна функції $y = e^x$.**
11. **Похідна функції $y = a^x$.**
12. **Похідна логарифмічної функції.**
13. **Похідна степеневі функції.**
14. **Похідні тригонометричних функцій.**
15. **Похідні обернених тригонометричних функцій.**