



ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

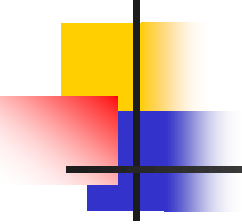
спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

Тема 13: Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку



- 1. Диференціальні рівняння другого порядку.
- 2. Диференціальні рівняння, права частина яких не залежить від функції та її похідної.
- 3. Диференціальні рівняння, що не містять явно функцію.
- 4. Диференціальні рівняння, що не містять явно незалежної змінної.

Список джерел

- 1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. –647с.
- 2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Яковенко В.М. Вища математика, ч.2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.: НАУ, 2003, -297с.
- 3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М. Вища математика. Збірник задач. – К.: НАУ, 2003, -218с.
- 4. Шостак С.В. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» за модулем «Елементи математичного аналізу». –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2016, 115 с.
- 5. Ю.Б. Гнучій, І.І.Ковтун, Т.А.Скороход, С.В. Шостак. Вища математика. Частина четверта. Диференціальні рівняння.Ряди. Навчальний посібник, –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2015, 249 с.

П.1. Диференціальні рівняння другого порядку

- Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1)$$

- Розв'язком цього рівняння є функція $y = \varphi(x)$, графіком якої є інтегральна крива.

- Початкові умови для такого рівняння мають вигляд

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (2)$$

Задача Коші

- **Задача Коші** для диференціального рівняння другого порядку полягає в тому, що серед усіх інтегральних кривих потрібно знайти криву, що проходить через задану точку (x_0, y_0) і має заданий напрям дотичної в цій точці y'_0 .
- Розглянемо типи диференціальних рівнянь, які зводяться до диференціальних рівнянь меншого порядку. Це - так звані **диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку**.

П.2. Диференціальні рівняння, права частина яких не залежить від функції та її похідної

- Рівняння такого типу мають вигляд $y^{(n)} = f(x)$ (3)
- Як відомо, $y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}$. Тоді рівняння (3) набуває вигляду

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x), \quad dy^{(n-1)} = f(x)dx$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння: $\int dy^{(n-1)} = \int f(x)dx$.

Дістанемо $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$.

Порядок рівняння знизився на одиницю. Продовжуючи диференціювання, дістанемо загальний розв'язок рівняння (3):

$$y = \int \dots \int f(x)dx \dots dx + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1} x + C_n.$$

Приклад 1

- Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння $y''' = 24x$ при умові, що $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$.

$$y'' = 24 \int x dx = 12x^2 + C_1$$

$$y'' = 12x^2 + C_1 \Rightarrow (y''(0) = 2) \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow y'' = 12x^2 + 2$$

$$\text{Звідки } y' = 12 \int x^2 dx + 2 \int dx = 4x^3 + 2x + C_2$$

$$\text{Тоді } y' = 4x^3 + 2x + C_2 \Rightarrow (y'(0) = 1) \Rightarrow C_2 = 1 \Rightarrow$$

$$y' = 4x^3 + 2x + 1$$

$$\text{Звідки } y = 4 \int x^3 dx + 2 \int x dx + \int dx = x^4 + x^2 + x + C_3 \Rightarrow (y(0) = 0)$$

$$\Rightarrow C_3 = 0 \Rightarrow y = x^4 + x^2 + x.$$

П.3. Диференціальні рівняння, що не містять явно функцію $y(x)$

- Рівняння такого типу мають вигляд:

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (4)$$

- Зокрема, диференціальне рівняння **другого порядку**, що не містить явно функцію $y(x)$, має вигляд:

$$F(x, y', y'') = 0 \quad (5)$$

Знизити порядок такого рівняння можна, застосовуючи заміну: $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$ (6)

Тоді рівняння (5) зводиться до диференціального рівняння першого порядку $F(x, p, p') = 0$ або $F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$.

П.3. Диференціальні рівняння, що не містять явно функцію (продовження) $y(x)$

- Далі знаходимо розв'язок цього рівняння:

$$p = p(x, C_1)$$

враховуємо, що $p = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = p(x, C_1)$.

Звідки $dy = p(x, C)dx$ і розв'язок диференціального рівняння (5) набуває вигляду $y = \int p(x, C_1)dx + C_2$.

Приклад 2

$$y'' x \ln x = y', \quad y(e) = 2, \quad y'(e) = 3.$$

Зробимо заміну: $y' = p(x)$, $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$

Рівняння набуває вигляду:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x \ln x}, \quad x \neq 0, x \neq 1$$

Розв'язуємо його:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x \ln x}, \quad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x \ln x}, \quad \ln|p| = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + \ln C_1, \quad p = C_1 \ln x$$

Беручи до уваги, що $p = \frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow (y'(e) = 3) \Rightarrow$

$$3 = C_1 \ln e, \quad C_1 = 3$$

Приклад 2(продовження)

- Підставляємо знайдену сталу в попереднє рівняння та інтегруючи частинами, дістаємо:

$$\frac{dy}{dx} = 3 \ln x, \quad dy = 3 \ln x dx, \quad y = 3 \int \ln x dx = 3 \left(x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx \right)$$

- Звідки маємо: $y = 3x(\ln x - 1) + C_2$.
- Для знаходження сталої C_2 використаємо умову $y(e) = 2 \Rightarrow 2 = 3e(\ln e - 1) + C_2, \quad C_2 = 2$
- Отже, розв'язком задачі Коші є функція:
$$y = 3x(\ln x - 1) + 2.$$

П.4. Диференціальні рівняння, що не містять явно незалежної змінної x

- Диференціальне рівняння **другого порядку**, що не містить явно незалежної змінної x має вигляд:
$$F(y, y', y'') = 0 \quad (7)$$

і зводиться до диференціального рівняння першого порядку за допомогою заміни:

$$y' = p(y), \quad y'' = \frac{dp}{dy} p \quad (8)$$

тобто набуває вигляду


$$F\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0 \quad (9)$$

П.4. Диференціальні рівняння, що не містять явно незалежної змінної x (продовження)

- Розв'язуючи рівняння (9), знаходимо

$$p = p(y, C_1).$$

Враховуємо, що $p = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = p(y, C_1)$



$$x = \int \frac{dy}{p(y, C_1)} + C_2.$$

Приклад 3

$$2yy'' - (y')^2 - 1 = 0. \text{ Зробимо заміну: } y' = p(y), \quad y'' = p \frac{dp}{dy}.$$

$$2yp \frac{dp}{dy} = p^2 + 1, \quad 2yp dp = (p^2 + 1) dy$$



$$\frac{2p dp}{p^2 + 1} = \frac{dy}{y}, \quad \int \frac{2p dp}{p^2 + 1} = \int \frac{dy}{y}, \quad \ln|p^2 + 1| = \ln|y| + \ln|C_1|, \quad p^2 + 1 = C_1 y. \quad p = \pm \sqrt{C_1 y - 1}$$

Але $p = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{C_1 y - 1}, \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm dx, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm \int dx$

$$\frac{2}{C_1} \sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2, \quad \sqrt{C_1 y - 1} = \frac{C_1}{2} (C_2 \pm x)$$



$$y = \frac{C_1}{4} (C_2 \pm x)^2 + \frac{1}{C_1}.$$



Контрольні запитання

- 1. Наведіть приклади множин, елементами яких є множини,
- 2. Назвіть відомі вам способи задання множин. В якому випадку не можна застосувати той або інший спосіб?
- 3. В яких випадках множина задана некоректно?
- 4. Наведіть приклади скінченних і нескінченних множин.
- 5. Яку множину називають упорядкованою?
- 6. Назвіть відомі вам способи задання множин. В якому випадку не можна застосувати той або інший спосіб?
- 7. Які множини вважаються рівними?
- 8. Чи можуть два елементи однієї множини бути однаковими?
- 9. Назвіть основні операції над множинами.
- 10. Як геометрично ілюструють операції над множинами?