ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

Тема:14. Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

- **1. Поняття про лінійні диференціальні рівняння n –го порядку.**
- **2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.**
- **3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з правою частиною спеціального вигляду.**

Список джерел

- 1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. –647с.
- 2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Яковенко В.М. Вища математика, ч.2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.: НАУ, 2003, -297с.
- 3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М. Вища математика. Збірник задач. – К.: НАУ, 2003, -218с.
- 4. Шостак С.В. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» за модулем «Елементи математичного аналізу». –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2016, 115 с.
- 5. Ю.Б. Гнучій, І.І.Ковтун, Т.А.Скороход, С.В. Шостак. Вища математика. Частина четверта. Диференціальні рівняння.Ряди. Навчальний посібник, –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2015, 249 с.

п.1. Поняття про лінійні диференціальні рівняння *n* –го порядку

- ***Означення.*** **Лінійним диференціальним рівняння** n**-го порядку** називається рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1),$$

де функції $p_1(x),\ldots,p_{n-1}(x), p_n(x), f(x)$ - задані і неперервні в проміжку (a,b).

Лінійним диференціальним рівнянням *n* –го порядку зі сталими коефіцієнтами

- ***Означення***. **Лінійним** диференціальним рівнянням *n*–го порядку **зі сталими коефіцієнтами** називаються рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), (2)$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - числа, $f(x)$ - функція, неперервна і визначена для всіх $x \in (a, b)$.

Лінійні неоднорідні та лінійні однорідні диференціальні рівняння n–го порядку

- Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння (2) називається **лінійним неоднорідним** диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Якщо $f(x) = 0$, то рівняння має вигляд

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (3)$$

і називається **лінійним однорідним** диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

Поняття про диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

- ***Означення.*** *Диференціальне рівняння*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad (4)$$

де a_1, a_2 - числа, $f(x) \neq 0$ – неперервна на проміжку функція, називається лінійним *неоднорідним* диференціальним рівнянням 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

- ***Означення***. *Диференціальне рівняння*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (5)$$

називається лінійним *однорідним* диференціальним рівнянням 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

п.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

- Лінійне однорідне рівняння (5) має два лінійно незалежні розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$, тобто такі розв'язки, що задовольняють умову $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const.$
- **Загальний розв'язок** лінійного однорідного рівняння (5) має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (6)$$

де y_1, y_2 – лінійно незалежні розв'язки рівняння (5), C_1, C_2 – довільні сталі.

Характеристичне рівняння

- Для того, щоб знайти ці розв'язки y_1, y_2 складають характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \;, \quad (7)$$

яке дістаємо із рівняння (5) заміною

y'' на λ^2, y' на λ, y на одиницю.

Це - алгебраїчне рівняння, яке має два корені, які визначаються знаком дискримінанта $D = a_1^2 - 4a_2$.

Випадок 1 для коренів характеристичного рівняння

$$D > 0$$

- В цьому випадку корені алгебраїчного рівняння (7) дійсні і різні $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді функції $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ є лінійно незалежними розв’язками диференціального рівняння (5).
- **Загальний розв’язок** диференціального рівняння (5) згідно з формулою (6) має вигляд $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. (8)

Випадок 2 для коренів характеристичного рівняння

$$D = 0$$

- В цьому випадку корені рівняння (7) однакові $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння (5) є функції $y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = xe^{\lambda x}$.
- **Загальний розв'язок** диференціального рівняння (5) згідно з формулою (6) має вигляд

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{\lambda x}. \text{(9)}$$

Випадок 3 для коренів характеристичного рівняння

$D < 0$

- В цьому випадку корені характеристичного рівняння (7) комплексно спряжені $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i$,

 де $\alpha = -\frac{a_1}{2}, \ \beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2}, \ i = \sqrt{-1}$.

Функції $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ є лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння (5).

- **Загальний розв'язок** диференціального рівняння (5) згідно з формулою (6) має вигляд

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \ . \quad (10)$$

Приклад 1

- Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння $y'' - 2y' + 5y = 0$ при умові, що $y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

Складаємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0,\ D = 4 - 20 = -16 < 0$

- Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд (10), де

$$\alpha = -\frac{a_1}{2} = -\frac{-2}{2} = 1,\ \beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2} = \frac{\sqrt{|-16|}}{2} = 2 \quad ,$$

тобто $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Приклад 1(продовження)

- Для знаходження сталих C_1, C_2 потрібно використати початкові умови. Спочатку знаходимо похідну:

$$y' = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x)$$

Тоді, враховуючи початкові умови , маємо

$$1 = e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0),\ \ C_1 = 1,$$

$$1 = e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - 2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0), 1 = 1 + 2C_2, \quad C_2 = 0.$$

Дістаємо розв’язок задачі Коші для заданого рівняння при заданих початкових умовах:

$$y = e^x \cos 2x.$$

П.3.Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду

- Лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ (4)
- **Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (3)**
- **і частинного розв'язку неоднорідного рівняння**, тобто має вигляд $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + Y,$ (11)
- де y_1, y_2 - лінійно незалежні розв'язки відповідного однорідного рівняння (3), Y - частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння. Частинний розв'язок у загальному випадку знаходиться за методом варіації довільних сталих - методом Лагранжа.

Диференціальні рівняння з правою частиною спеціального вигляду

- У деяких випадках частинний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння (4) можна знайти іншим методом.
- Розв’язок Y шукають у вигляді, **аналогічному вигляду правої частини** $f(x)$ диференціального

рівняння (4) з невідомими коефіцієнтами.

Нехай λ_1 та λ_2 - корені відповідного характеристичного рівняння (7).

Частинні випадки вигляду правої частини $f(x)$(випадок 1)

I. $f(x) = P_n(x)$, (12)

де $P_n(x)$ –многочлен степеня n.

а) Нехай $\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0$. Тоді частинний розв'язок шукають у вигляді многочлена степеня n, що містить усі степені x, починаючи із n

$$Y = A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n \quad . (13)$$

Невідомі коефіцієнти $A_k, \quad k = 1,..n$, потрібно визначити.

б) Один із коренів характеристичного рівняння (7) є нуль: $\lambda_1 = 0$ або $\lambda_2 = 0$. Тоді частинний розв'язок шукають у вигляді

$$Y = \left(A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n\right) x \quad . (14)$$

Частинні випадки вигляду правої частини $f(x)$(випадок 2)

$$\text{II. } f(x) = e^{kx} P_n(x). \quad (15)$$

а) Якщо $k \neq \lambda_1, \quad k \neq \lambda_2,$

$$Y = \left(A_1 x^n + A_2 x_{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n\right) e^{kx} \quad (16)$$

б) Якщо $k = \lambda_1, \quad k \neq \lambda_2$

$$Y = \left(A_1 x^n + A_2 x_{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n\right) x e^{kx} \quad (17)$$

в) Якщо $k = \lambda_1 = \lambda_2$

$$Y = \left(A_1 x^n + A_2 x_{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n\right) x^2 e^{kx} \quad (18)$$

Частинні випадки вигляду правої частини $f(x)$ (випадок 3)

$$\text{III} \quad f(x) = e^{\alpha^* x}\left(P_n(x)\cos\beta^* x + Q_m(x)\sin\beta^* x\right) \qquad (19)$$

Знаходимо число $l = \max\{n, m\}$. Складаємо так зване характеристичне число правої частини $k^* = \alpha^* + \beta^* i$

і порівнюємо із коренями характеристичного рівняння (7).

а) $\alpha^* + \beta^* i \neq \lambda_1 = \alpha + \beta i$

$$Y = e^{\alpha^* x}((A_1 x^l + \ldots + A_{l-1}x + A_l)\cos\beta^* x + + (B_l x^l + \ldots + B_{l-1}x + B_l)\sin\beta^* x). \qquad (20)$$

б) $\alpha^* + \beta^* i = \lambda_1 = \alpha + \beta i$

$$Y = e^{\alpha^* x}((A_1 x^l + \ldots + A_{l-1}x + A_l)\cos\beta^* x + + (B_l x^l + \ldots + B_{l-1}x + B_l)\sin\beta^* x)x. \qquad (21)$$

Приклад 2

Знайти розв’язок задачі Коші диференціального рівняння

$y'' - y = xe^x$ при умові, що $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

1. Записуємо відповідне однорідне рівняння

$$y'' - y = 0.$$

2. Замінюємо $y'' \Rightarrow \lambda^2, \quad y \Rightarrow 1$. Маємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 1 = 0.$

3. Знаходимо корені цього рівняння: $\lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = 1.$

Корені - різні, дійсні. Отже, розв’язок однорідного рівняння має вигляд (8), тобто

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$$

Приклад 2 (продовження)

4. Записуємо праву частину заданого неоднорідного рівняння:

$f(x) = xe^x$, тобто, маємо праву частину спеціального вигляду II, де $P_n(x) = x, \quad n = 1$. Число $k = 1$.

5. Число $k = \lambda_2 = 1$ співпадає з одним із коренів характеристичного рівняння. Тому розв'язок шукаємо у вигляді (17): $Y = (A_1 x + A_2)xe^x$.

6. Знаходимо Y''. Маємо

$$Y' = (2A_1 x + A_2 + A_1 x^2 + A_2 x)e^x,$$

$$Y'' = (2A_1 + 2A_1 x + A_2 + 2A_1 x + A_2 + 2A_1 x^2 + A_2 x)e^x.$$

Приклад 2 (продовження)

Підставляємо Y, Y'' в задане рівняння:

$$(2A_1x^2 + 4A_1x + A_2x + 2A_1 + 2A_2)e^x - (A_1x^2 + A_2x)e^x = xe^x.$$

Скоротивши на $e^x \neq 0,$ маємо $4A_1x + 2A_1 + 2A_2 = x.$

Зрівнюємо коефіцієнти при x у першому степені та при x^0. Дістаємо

$$4A_1 = 1, \quad 2A_1 + 2A_2 = 0, \quad A_1 = \frac{1}{4}, \quad A_2 = -\frac{1}{4}.$$

7. Знайдені числа підставляємо у вираз для Y : $Y = \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x.$

8. Шуканий загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння дорівнює

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x.$$

Приклад 2 (продовження)

9. Визначимо сталі C_1, C_2 із початкових умов. Знаходимо спочатку

$$y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + \frac{1}{4}\left(2x - 1 + x^2 - x\right)e^{x}$$

Тоді

$$0 = C_1 + C_2, \quad 1 = -C_1 + C_2 - \frac{1}{4}, \quad C_2 = \frac{5}{8}, \qquad C_1 = -\frac{5}{8}.$$

10. Отже, розв’язком задачі Коші для заданого рівняння є функція

$$y = \frac{5}{8}e^{-x} + \frac{1}{8}\left(2x^2 - 2x - 5\right)e^{x}.$$

Контрольні запитання

1. Розв’язування однорідного лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.
2. Метод варіації довільних сталих.
3. Розв’язування неоднорідного диференціального рівняння зі спеціальною правою частиною.
4. Означення диференціального рівняння *n*-го порядку.
5. Як визначити порядок диференціального рівняння?
6. Назвіть основні типи ДР, що допускають пониження порядку.
7. У чому суть методу пониження порядку ДР?
8. Означення визначника Вронського.
9. Теорема про структуру загального розв’язку лінійного однорідного ДР 2-го порядку.
10. Теорема про структуру загального розв’язку лінійного неоднорідного ДР 2-го порядку.