



ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОС “Бакалавр”

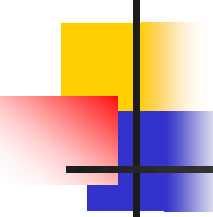
галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

спеціальність – 123 «Комп’ютерна інженерія»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики
Шостак Сергій Володимирович

Тема15: Системи диференціальних рівнянь



- 1. Нормальні системи диференціальних рівнянь .**
 - 1.1. Основні положення і означення.**
 - 1.2. Задача Коші.**
- 2. Системи диференціальних рівнянь 2-го порядку.**
 - 2.1. Нормальні системи 2-го порядку.**
 - 2.2. Задача Коші.**
 - 2.3. Початкові умови.**
- 3. Лінійні системи диференціальних рівнянь 2-го порядку.**
 - 3.1. Лінійна однорідна система 2-го порядку.**
 - 3.2. Лінійна однорідна система 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами**
 - 3.3. Лінійна неоднорідна система 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами**

Список джерел

- 1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа. 2004. –647с.
- 2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Яковенко В.М. Вища математика, ч.2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.: НАУ, 2003, -297с.
- 3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М. Вища математика. Збірник задач. – К.: НАУ, 2003, -218с.
- 4. Шостак С.В. Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» за модулем «Елементи математичного аналізу». –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2016, 115 с.
- 5. Ю.Б. Гнучій, І.І.Ковтун, Т.А.Скороход, С.В. Шостак. Вища математика. Частина четверта. Диференціальні рівняння.Ряди. Навчальний посібник, –К.: ЦП «КОМПРИНТ», – 2015, 249 с.



Порядок системи

- Порядок старшої похідної називається **порядком системи.**
- Якщо порядок системи дорівнює одиниці, то система називається **системою першого порядку.**



Нормальні системи

Нормальними системами називаються системи диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (2)$$

де y_1, y_2, \dots, y_n шукані функції змінної x , функції

$f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, визначені для значень $x \in (a, b)$.

Таку систему називають ще **системою порядку n** , згідно з кількістю рівнянь.

Розв'язок нормальної системи

Розв'язком системи (2) називається будь-яка сукупність визначених в інтервалі (a, b) неперервно диференційовних функцій

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x) ,$$

підставляючи яку в систему (2), дістаємо тотожності.



Автономна система

Система називається **автономною**, якщо праві частини рівнянь системи (2) не залежать явно від змінної x , тобто система має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n). \end{array} \right. \quad (3)$$



Приклад 1

Розглянемо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 5y_1 + 4y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 4y_1 + 5y_2. \end{cases}$$

Покажемо, що розв'язками цієї системи є функції

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = -e^x.$$

Дійсно, підставляємо ці функції у рівняння заданої системи:

$$\begin{cases} e^x = 5e^x + 4(-e^x), \\ -e^x = 4e^x + 5(-e^x) \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} e^x \equiv e^x, \\ -e^x \equiv -e^x. \end{cases}$$

Системи другого порядку

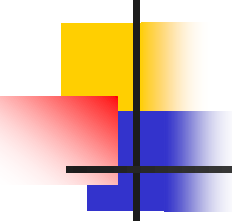
Розглянемо нормальну систему другого порядку у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y) \end{cases} \quad (4)$$

Функції $f_1(t, x, y)$, $f_2(t, x, y)$ визначені в деякій області D площини Oxy . Ці функції залежать від координат x , y та часу t . Розв'язку $x = x(t)$, $y = y(t)$ (5)

системи (4) відповідає деяка крива на площині, задана параметрично. Ця крива називається **інтегральною кривою**.

Задача Коші



Задачею Коші називають наступну задачу. Серед усіх розв'язків системи $x = x(t)$, $y = y(t)$ знайти такий розв'язок, у якому знайдені функції набувають задані числові значення при заданому значенні $t = t_0$:

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0 \quad (6)$$

Геометрично це означає, що серед усіх інтегральних кривих треба знайти ту, що проходить через задану точку $(x_0; y_0)$.

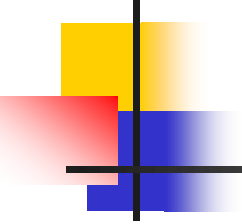


Початкові умови

Умови (6) називаються **початковими умовами**.

Початкові умови записують ще так:

$$x|_{t=t_0} = x_0, y|_{t=t_0} = y_0.$$



Лінійна однорідна система другого порядку

Лінійна **однорідна система** другого порядку має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y, \\ \frac{dy}{dt} = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y. \end{cases} \quad (7)$$

Коефіцієнти системи $p_{jk}(x)$, $j, k = 1, 2$ є неперервними функціями на проміжку (a, b) . **Розв'язком** системи (7) є дві функції $x(t)$ та $y(t)$.

Перший розв'язок це x_1, y_1 , другий розв'язок x_2, y_2 . Розв'язком системи (7) є лінійна комбінація

$$x = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t), \quad (8)$$

$$y = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t).$$



Систему другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо **систему другого порядку** зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y, \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y. \end{cases} \quad (9)$$

Розв'язок такої системи можна звести до розв'язку диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Зведення системи до ДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами

1. Знайдемо похідну від обох частин першого рівняння системи (9):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a_1 \frac{dx}{dt} + b_1 \frac{dy}{dt} . \quad (10)$$

2. Використовуємо друге рівняння системи:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a_1 \frac{dx}{dt} + b_1 (a_2 x + b_2 y) . \quad (11)$$

3. Із першого рівняння системи маємо

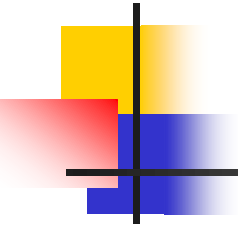
$$y = \frac{1}{b_1} \left(\frac{dx}{dt} - a_1 x \right) . \quad (12)$$

4. Рівняння (11) набуває вигляду

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a_1 \frac{dx}{dt} + b_1 a_2 x + b_2 \left(\frac{dx}{dt} - a_1 x \right) .$$

Або
$$\frac{d^2 x}{dt^2} - (a_1 + b_2) \frac{dx}{dt} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) x = 0 .$$

Приклад 2



Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Знаходимо похідну від обох частин першого рівняння системи і використовуємо друге рівняння системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 3x + 4y$$

Із першого рівняння маємо $y = \frac{dx}{dt} - 2x$

Тоді попереднє рівняння набуває вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 3x + 4\frac{dx}{dt} - 8x. \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$



Характеристичне рівняння

Розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

Воно має дійсні і різні корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

Тоді розв'язок має вигляд $x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$.

Знаходимо

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t} - 2C_1 e^t - 2C_2 e^{5t} = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$

Отже, загальним розв'язком заданої системи є

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \quad y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$



Лінійна неоднорідна система другого порядку

Лінійна неоднорідна система другого порядку має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + f_1(t), \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + f_2(t). \end{cases} \quad (13)$$

Розв'язок цієї системи зводиться до розв'язку неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Контрольні запитання



- Означення диференціального рівняння n -го порядку.
- Як визначити порядок диференціального рівняння?
- Назвіть основні типи ДР, що допускають пониження порядку.
- У чому суть методу пониження порядку ДР?
- Означення визначника Вронського.
- Теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного ДР 2-го порядку.
- Теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного ДР 2-го порядку.
- Що називається системою нормальних ДР?
- Що називається характеристичним рівнянням нормальної системи ДР?