Лекція 1. Основні поняття теорії множин

ПЛАН

1.1. Поняття про множину і способи її задання.

2.2. Підмножини, відношення між множинами.

2.3. Операції над множинами.

1.1. Поняття про множину і способи її задання.

Поняття *"множина"* належить до первинних не означуваних понять (як “число”, “нескінченність” в алгебрі, “точка”, “пряма” в геометрії тощо). Це поняття не може бути означено через інші простіші терміни або об’єкти, воно є настільки широким та загальним, що не входить як частина в жодне інше, ще загальніше поняття. Його пояснюють на прикладах, апелюючи до нашої уяви чи інтуїції.

За звичай приймається формулювання інтуїтивного поняття множини основоположника цієї теорії Г. Кантора: „Довільне зібрання певних предметів нашої інтуїції чи інтелекту, які можна відрізнити один від одного і які уявляються як єдине ціле, називається *множиною*. Предмети, які входять до складу множини, називають її *елементами*”. Істотним тут є те, що множину розуміють як єдине ціле і елементи множини можна відрізнити один від одного; на природу об’єктів, що складають множину, ніяких обмежень не накладається.

Елементами множини можуть бути найрізноманітніші об’єкти: числа, літери, люди, автомобілі на стоянці, певні множини тощо.

Множини, як правило, позначують великими латинськими літерами: $A, B, C, \ldots$, а елементи множин – малими: $a, b, c, \ldots$. Записують:

$A=\{a, b, c, \ldots, x, y, \ldots\}$ (перелічивши всі елементи у фігурних дужках, якщо множина складається з невеликої кількості елементів), або $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\}$ (використовуючи змінні з індексами).

При цьому слід розрізняти загальний елемент множини x, довільний – a_i чи конкретний – $a, b, c, \ldots$.

Для деяких найважливіших множин у математиці вживаються загальноприйняті позначення:

- $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел;
- $\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел;
- $\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел;
- $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел;
- C – множина комплексних чисел;
- $[a;\ b]$ – числовий проміжок (відрізок);
- $(a;\ b)$ – числовий інтервал тощо.

Якщо A – деяка числова множина, то через A_+ позначують множину її додатних елементів, а через A_- – від'ємних.

Те, що об'єкт a є елементом множини M записуються так: $a \in M$ (читають: "a належить множині M", "a є елементом множини M", "множина M містить елемент a", "a входить до множини M"). Символ "$\in$" – з*нак належності* елемента множині. Для того, щоб підкреслити, що деякий елемент a не належить множині M, вживають позначення $a \notin M$ або $a \,\bar{\in}\, M$.

Запис $a,b,c,... \in M$ використовують для скорочення запису $a \in M$, $b \in M$, $c \in M$,....

Множину вважають заданою, якщо про кожен її об'єкт можна сказати є він елементом даної множини чи ні. Це дає змогу сформулювати *інтуїтивний принцип абстракції (аксіома згортання)*: елементами множини A є лише ті і тільки ті об'єкти a, які мають певну характеристичну властивість P.

Іноді може не існувати об'єктів, які мають характеристичну властивість для складання множини. Тоді кажуть, що ця властивість визначає порожню множину; її позначують символом "$\varnothing$".

Множину називають *скінченною*, якщо кількість її елементів скінчена, тобто існує натуральне число k, що є кількістю елементів цієї множини. У протилежному разі множина є *нескінченною*.

Для *задання множини*, утвореної з будь-яких елементів, будемо використовувати такі способи. В основі всіх способів лежить позначення множини за допомогою фігурних дужок.

1.(*Списком*). Якщо a_1, a_2, ..., a_n – деякі об'єкти, то множину A цих об'єктів можна позначити через $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, де у фігурних дужках перелічують всі елементи відповідної множини. Таким способом переважно задають скінченні множини, які мають невелику кількість елементів. Порядок запису елементів множини при цьому позначенні є неістотним і однакові елементи у фігурних дужках не повторюються (записуються лише один раз).

Наприклад, множина десяткових цифр записуєть $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, множина основних арифметичних операцій –

$B=\{+,-,*,/\}$, множина розв'язків нерівності $x^2+1\leq 1$ – $\varnothing=\{0\}$.

2. (*Описом характеристичної властивості*). Цей спосіб задання множин ґрунтується на описі загальної характеристичної властивості (умови) $P(x)$ для всіх об'єктів, що утворюють множину; в цьому випадку задання множина M має вигляд: $M = \{a \mid P(a)\}$.

Цей вираз читається так: "множина M – це множина всіх таких елементів a, для яких виконується властивість P", де через $P(a)$ позначено властивість, яку мають елементи множини M і тільки вони. Іноді замість вертикальної риски

записують двокрапку.

Наприклад,

$S = \{ n \mid n$ – непарне, $n\in N \}$

$X = \{ x \mid x = \pi k, k\in\mathbb{Z} \}$,

$A=\{x \mid x^3-4x=0\}$.

Порожню множину можна визначити за допомогою будь-якої суперечливої властивості, наприклад: $\varnothing=\{x \mid x\neq x\}$ тощо. Твердження "множина M – не порожня" можна замінювати рівносильним йому твердженням "існують елементи, які належать множині M".

3.(*Породжуючою процедурою*). Елементи множини можна задати за допомогою елементів вже відомих множин із застосуванням для них деякого правила чи операцій над вже відомими множинами. При цьому задання множини повинно обов'язково містити опис допоміжних (вже відомих) множин.

Наприклад, множину всіх цілих чисел, які є степенем двійки $M_{2^n},\ n\in N$ можна представити породжуючою процедурою, заданою двома правилами, які називають *рекурсивними* або *індуктивними:*

а) $1\in M_{2^n}$; б) якщо $m\in M_{2^n}$, то $2m\in M_{2^n}$.

4. (*Графічно*). Множини, як скінченні, так і нескінченні, можна задати геометрично за допомогою кругів Ейлера (діаграм Венна).

Елементами множини можуть бути ще й інші множини. Наприклад, нехай множина $S=\{s_1,\ s_2,\ ...,\ s_n\}$ – множина студентів деякої групи, які складали іспит. Цю множину можна означити й по-іншому: $S=\{S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_5\}$, де S_2 – множина студентів, які склали іспит на оцінку "2", відповідно $S_3,\ S_4,\ S_5$ – на "3", "4" і "5". У цьому випадку множини S_2, $S_3,\ S_4,\ S_5$ називають *підмножинами* множини S.

Необхідно розрізняти такі два різні об'єкти, як елемент a і множина $\{a\}$, яка складається з єдиного елемента a.

Приклад 1. Записати множину $A=\left\{x \mid (x^2-4)(x^2+3x-10)=0\right\}$ списком її елементів.

Розв'язання. Елементами даної множини є лише ті значення x, які задовольняють рівняння $(x^2-4)(x^2+3x-10)=0$. Знаходимо його корені:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-4=0, \\ x^2+3x-10=0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-2,\ x_2=2, \\ x_3=-5,\ x_4=2. \end{array}\right.$$

Отже, маємо множину $A=\{-5,-2,2\}$.

2.2. Підмножини, відношення між множинами.

Означення 1. Множини A і B називають *рівними*, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A є елементом множини B і навпаки; записують: $A=B$.

$$A=B \Leftrightarrow (x\in A \Rightarrow x\in B \ i \ x\in B \Rightarrow x\in A) \ \textit{або} \ A=B \Leftrightarrow (x\notin A \Rightarrow x\notin B \ i \ x\notin B \Rightarrow x\notin A)$$

Означення. Множину *A* називають *підмножиною* множини *B* тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини *A* належить і множині *B*.

Позначують $A\subseteq B$ або $B\supseteq A$. Читають: “множина *A* міститься у множині *B*”, “множина *B* містить множину *A*”. Знаки $\subseteq$ і $\supseteq$ називаються *знаками включення* або *нестрогого включення.*.

Якщо $A\subseteq B$, однак $A\neq B$, то пишуть $A\subset B$ і називають множину *A* *власною* (або *строгою*) *підмножиною* множини *B*. Символ $\subset$ (або $\supset$), на відміну від знака $\subseteq$ (або $\supseteq$), називається знаком *строгого включення*.

Очевидно, що для будь-якої множини *A* виконується $A\subseteq A$. Крім того, прийнято вважати, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини *A*, тобто $\varnothing\subseteq A$ (зокрема, $\varnothing\subseteq\varnothing$). Множини *A* і $\varnothing$ називають *невласними підмножинами* множини *A*, всі інші – *власні*.

Слід чітко розуміти різницю між знаками $\in$ і $\subseteq$ та не плутати ситуації їхнього вживання. Для будь-якого об’єкта *x* виконується $x\notin\varnothing$.

Наприклад,

$\{a,b\}\subseteq\{\{a,b\},\{b,c\}\}$, $a\in\{a,b\}$, $\{c\}\not\subseteq\{a,c\}$, $\{a\}\subseteq\{a,b\}$.

Означення 2. Множини A і B називають *рівними*, якщо виконуються включення $A\subseteq B$ і $B\subseteq A$, тобто

$$A=B \Leftrightarrow (A\subseteq B \ i \ B\subseteq A) .$$

Разом з множиною *A* іноді доводиться мати справу з множиною всіх її підмножин, яку називають *булеаном* множини A і позначають ß (A).

Отже, за означенням:

$\beta(A)=\{B|B\subset A\}$.

Наприклад, якщо $A=\{a,b,c\}$, то

$\beta(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$.

Зауважимо, що якщо множина A має n елементів, то булеан $\beta(A)$ міститиме 2^n елементів, через що його називають *множиною-степенем* множини A.

У конкретній математичній теорії буває зручно вважати, що всі розглядувані множини є підмножинами деякої фіксованої множини, яку називають *універсальною множиною* або *універсумом* і позначають через U (або E). Наприклад, в елементарній алгебрі такою універсальною множиною можна вважати множину дійсних чисел R, у вищій алгебрі – множину комплексних чисел C.

У процесі вивчення множин зручно застосовувати так звані діаграми Ейлера-Венна. На них універсальну множину схематично зображують у вигляді прямокутника, а різні її підмножини – у виглядів кругів чи інших фігур всередині цього прямокутника. Наприклад, на даному рисунку (рис.1) зображено універсальну множину U та її підмножини A, B і C, причому $C\subset B$.

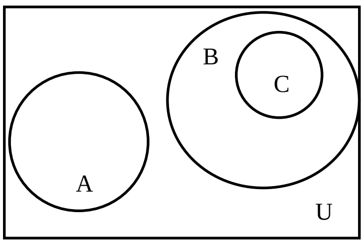


Рис. 1

2.3. Операції над множинами.

Для множин можна ввести ряд операцій (теоретико-множинних операцій), результатом виконання яких будуть також множини. За допомогою цих операцій можна конструювати із заданих множин нові множини.

Нехай A і B – деякі множини.

Означення. *Об'єднанням* множин A і B (позначають $A \cup B$) називають множину тих елементів, які належать хоча б одній з множин A чи B. Символічно операція об'єднання множин записується так

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\} \text{ або } x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A, \\ x \in B \end{array}\right. .$$

Наприклад, $\{a,b,c\} \cup \{a,c,d,e\} = \{a,b,c,d,e\}$.

Властивості об′єднання множин:

1) *комутативність*: $A \cup B = B \cup A$;
2) *асоціативність*: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
3) *ідемпотентність* $A \cup A = A$;
4) $A \cup \varnothing = A$;
5) $A \cup E = E$.

Означення. *Перетином (перерізом)* множин A і B (позначають $A \cap B$) називають множину, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать множинам A і B одночасно. Тобто

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\} \text{ або } x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \in B \end{cases} .$$

Наприклад, $\{a,b,c\} \cap \{a,c,d,e\} = \{a,c\}$,

$\{a,b,c\} \cap \{d,e\} = \varnothing$.

Кажуть, що множини A і B *не перетинаються*, якщо $A \cap B = \varnothing$.

Операції об'єднання та перетину множин можуть бути поширені на випадок довільної сукупності множин $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Так об'єднання множин A_i (записується $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$) складається з тих елементів, які належать хоча б одній з множин A_i даної сукупності. А перетин множин A (записується

$\bigcap_{i\in I} A_i$) містить тільки ті елементи, які одночасно належать кожній з множин A_i.

Властивості перерізу множин:

1) *комутативність*: $A\cap B = B\cap A$;

2) *асоціативність*: $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$;

3) *дистрибутивність* операції $\cap$ відносно операції $\cup$: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

4) *дистрибутивність* операції $\cup$ відносно операції $\cap$: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

5) *ідемподентність*: $A\cap A = A$;

6) $A\cap\varnothing = \varnothing$;

7) $A\cap E = A$;

8) *закони поглинання*

а) $A\cap(A\cup B) = A$,

б) $A\cup(A\cap B) = A$.

Означення. *Різницею* множин A і B (записується $A\backslash B$) називають множину тих елементів, які належать множині A і не належать множині B. Отже,

$A \setminus B = \{ x \mid x\in A$ і $x\notin B\}$ або $x\in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \notin B \end{cases}.$

Наприклад, $\{a,b,c\} \setminus \{a,d,c\} = \{b\}$,

$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+=\mathbb{Z}_-$,

$\{a,b\} \setminus \{a,b,c,d\} = \varnothing$.

Властивості різниці множин:

1) $A \setminus A=\varnothing$;

2) $A \setminus \varnothing=A$;

3) $A \setminus E=\varnothing$;

4) $A \setminus B \neq B \setminus A$ – різниця не комутативна;

5) $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$ – різниця не асоціативна;

6) $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$ – правий закон дистрибутивності операції \ відносно операції $\cup$;

7) $(B \cap C) \setminus A = (B \setminus A) \cap (C \setminus A)$ – правий закон дистрибутивності операції \ відносно операції $\cap$.

Означення. *Симетричною різницею* множин A і B (записують $A\Delta B$, $A\oplus B$ або $A\div B$) називають множину, що складається з усіх елементів множини A, які не містяться в B, а також усіх елементів множини B, які не містяться в A. Тобто

$A\oplus B = \{ x \mid (x\in A$ і $x\notin B)$ або $(x\in B$ і $x\notin A)\}$

або $x\in A\oplus B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A, \\ x \notin B \end{cases} \\ \begin{cases} x \notin A, \\ x \in B \end{cases} \end{array} \right.$.

Наприклад, $\{a,b,c\}\oplus\{a,c,d,e\} = \{b,d,e\}$,

$\{a,b\}\oplus \{a,b\} = \varnothing$.

Властивості симетричної різниці:

1) *комутативність*: $A\oplus B = B\oplus A$;

2) *асоціативність*: $(A\oplus B)\oplus C = A\oplus(B\oplus C)$;

3) *дистрибутивність* операції $\cap$ відносно операції $\oplus$: $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$;

4) $A\oplus A = \varnothing$;

5) $A\oplus\varnothing = A$;

6) $A\oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Введені теоретико-множинні операції можна проілюструвати діаграмою (рис.2).

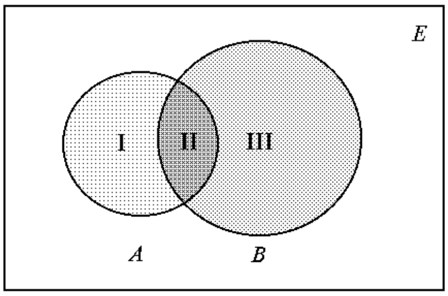


Рис. 2

Тут множини A і B – це множини точок двох кругів.

Тоді $A \cup B$ – складається з точок областей I, II, III,

$A \cap B$ – це область II,

$A \setminus B$ – область I,

$B \setminus A$ – область III,

$A \oplus B$ – області I і III.

Означення. Якщо зафіксована універсальна множина E, то *доповненням* множини A (яке є підмножиною універсальної множини E) називають множину всіх елементів універсальної множини, які не належать множині A; позначають $\overline{A}$.

Тобто

$\overline{A} = \{ x \mid x \in E \text{ і } x \notin A \}$ або $x \in \overline{A} \iff x \notin A$.

Неважко помітити, що $\overline{A} = E \setminus A$.

Наприклад, якщо за універсальну множину прийняти множину N всіх натуральних чисел, то доповненням $\overline{N}_2$ множини N_2 всіх парних натуральних чисел буде множина всіх непарних натуральних чисел.

Властивості доповнення:

1) $A \cup \overline{A} = E$

2) $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

3) $\overline{E} = \varnothing$;

4) $\overline{\varnothing} = E$;

5) *інволютивність:* $\overline{\overline{A}} = A$;

6) $\overline{A}\setminus B = A\cap B$;

7) *якщо A=B, то* $\overline{A}=\overline{B}$;

8) *якщо* $A\subset B$, *то* $\overline{B}\subset\overline{A}$;

9) *правила (закони) де Моргана*

а) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$; б) $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$.

Зазначимо, що правила де Моргана припускають узагальнення для сукупності множин:

$$\overline{\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i} = \bigcap_{i\in\mathbf{N}} \overline{A_i}; \qquad \overline{\bigcap_{i\in\mathbf{N}} A_i} = \bigcup_{i\in\mathbf{N}} \overline{A_i}.$$

Приклад 2. Покажемо істинність однієї з наведених тотожностей – правила де Моргана.

$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$.

Доведемо спочатку, що $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.

Нехай елемент $x\in\overline{A\cup B}$, тоді $x\in E\setminus(A\cup B)$, тобто $x\notin A$ і $x\notin B$, звідси $x\in\overline{A}$ і $x\in\overline{B}$, отже, $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$. Отже, за означенням підмножин: $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.

Доведемо обернене включення: $\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$.

Припустимо $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$, це означає, що $x\in\overline{A}$ і $x\in\overline{B}$, тобто $x\notin A$ і $x\notin B$, тому $x\notin A\cup B$, отже $x\in\overline{A\cup B}$. Зі справедливості обох включень $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$ і $\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$ за законом антисиметричності для підмножин випливає істинність рівності $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$.

Твердження доведено.

Аналогічно можуть бути доведені всі інші наведені теоретико-множинні тотожності. Ці тотожності дають змогу спрощувати різні складні вирази над множинами.

Приклад 3. $(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap D) = (A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup((\overline{A}\cup\overline{B}\cup D)\cap C) = ((A\cap B\cap\overline{D})\cup(\overline{A\cap B\cap\overline{D}}))\cap C = E\cap C = C$.

Приклад 4. Дано множини $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6,8,9\}$, $C=\{2,3,4,6,7,8\}$, $D=\{5,6,7,8,10\}$. Записати універсальну множину і знайти елементи множини $(A\cap B)\cup(\overline{C}\div D)$.

Розв'язання. Універсальною буде множина, яка містить всі елементи заданих множин: $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Виконуємо операції над даними числовими множинами:

$A\cap B=\{1,2,3,4\}\cap\{3,4,5,6,8,9\}=\{3,4\}$, $\overline{C}=\{1,5,9,10\}$,

$\overline{C}\div D=\{1,5,9,10\}\div\{5,6,7,8,10\}=\{1,9\}\cup\{6,7,8\}=\{1,6,7,8,9\}$.

Отже, маємо $(A\cap B)\cup(\overline{C}\div D)=\{3,4\}\cup\{1,6,7,8,9\}=\{1,3,4,6,7,8,9\}$.

Приклад 5. Довести тотожність $\overline{A\cap\overline{B}}\cup B=\overline{A}\cup B$:

а) використовуючи відношення належності елемента множині;

б) за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

Розв'язання. а) Введемо позначення $S=\overline{A\cap\overline{B}}\cup B$ і $T=\overline{A}\cup B$.

Рівність $S=T$ еквівалентна двом співвідношенням $S\subset T$ і $S\supset T$.

1. Покажемо, що $S\subset T$. Нехай $x\in S$, тоді $x\in\overline{A\cap\overline{B}}$ або $x\in B$.

(а) Якщо $x\in B$, тоді $x\in\overline{A}\cup B$.

(б) Якщо $x\notin B$, тоді $x\in\overline{A\cap\overline{B}}$.

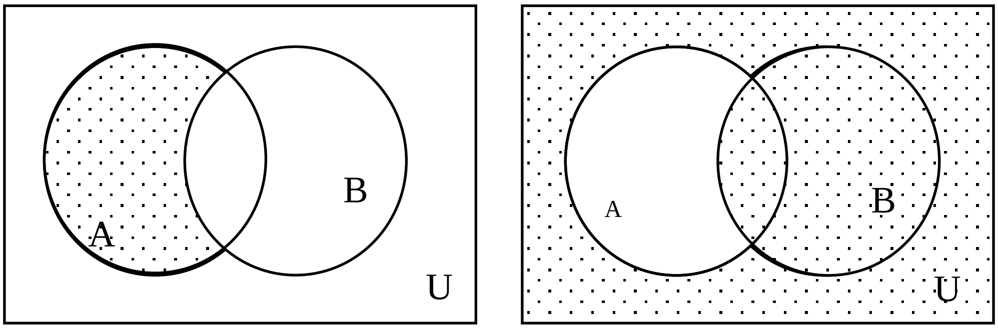
З цих співвідношень випливає, що $x\in\overline{B}$ і $x\notin A\cap\overline{B}$ і тому $x\notin A$, отже $x\in\overline{A}$. Звідси отримуємо, що $x\in\overline{A}\cup B$. Ми показали, що $S\subset T$.

2. Тепер показуємо, що $S\supset T$. Нехай $x\in T$, тоді $x\in\overline{A}$ або $x\in B$.

Якщо $x\in B$, то очевидно, що $x\in S$, якщо $x\notin B$ і $x\in\overline{A}$, тоді $x\notin\overline{B}$ і $x\notin A$ і тому $x\notin A\cap\overline{B}$. Звідси отримуємо, що $x\in\overline{A\cap\overline{B}}=S$. Таким чином показано, що $S\supset T$.

Отже, рівність доведена.

б) Проілюструємо на діаграмі Ейлера-Венна ліву частину $\overline{A\cap\overline{B}}\cup B$ тотожності, виконавши спочатку перетин множини A з $\overline{B}$, а потім об’єднання множин $\overline{A \cap \overline{B}}$ та B (рис.3, *а*-*б*).



а) $A \cap \overline{B}$ б) $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B$

Рис. 3

Тепер побудуємо діаграму (рис. 3) для правої частини $\overline{A} \cup B$ тотожності.

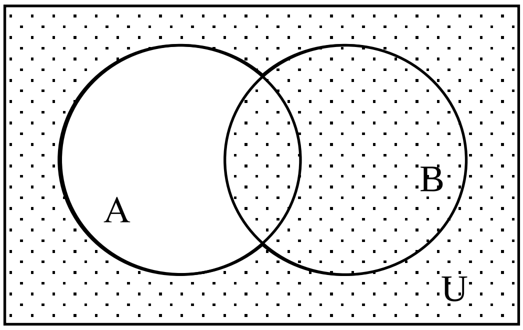


Рис. 4. $A \cup \overline{B}$

Видно, що діаграми співпадають, тобто тотожність справедлива.