Лекція 2. **Відношення, їх властивості.**

ПЛАН

1. *Декартовий добуток множин.*
2. *Поняття відношення. Бінарні відношення.*
3. *Способи задання відношень.*
4. *Властивості бінарних відношень.*
5. *Операції над відношеннями.*

2.1. Декартовий добуток множин

Згідно з означенням рівності множин, порядок входження елементів до множини неістотний і елементи в ній не повторюються. Але на практиці доводиться розглядати такі скінченні сукупності об'єктів, в яких істотним є порядок входження об'єктів і деякі з них можуть повторюватись. Наприклад, точка двовимірного простору (на площині) задається двома координатами: (x, y). Очевидно, матимемо різні точки, якщо їхні координати не рівні, навіть при умові, що елементи двоелементних множин однакові: (1, 3) і (3, 1). Іншим прикладом впорядкованої множини – множина операторів комп'ютерної програми тощо.

Нехай A та B – дві множини.

Декартовим добутком множин A і B називається множина $A\times B$ всіх пар вигляду (a, b) , в яких перша компонента належить множині A, а друга – множині B:

$$A\times B=\{(a,b):\ a\in A,\ b\in B\}. \qquad (2.1)$$

Приклад 2.1. Знайти $A\times B$ і $B\times A$, якщо $A=\{2,\ 3\}, B=\{\alpha,\ \beta\}$.

Розв'язання. За означенням декартового добутку двох множин маємо

$$A\times B=\{(2,\alpha),\ (2,\beta),\ (3,\alpha),\ (3,\beta)\ \};$$

$$B\times A=\{(\alpha,2),\ (\alpha,3),\ (\beta,2),\ (\beta,3)\}.$$

Поняття декартового добутку двох множин можна узагальнити на довільну скінченну сукупність множин.

Декартовим добутком множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n\geq 2)$ називається множина $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ всіх n – вимірних послідовностей $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$, де $a_i \in A_i,\ 1 \le i \le n.$

Елементи декартового добутку називають іще *кортежами*. Під кортежем (вектором) розуміють скінченну сукупність деяких об'єктів, які розміщені в цілком визначеному порядку, причому об'єкти в кортежі можуть повторюватись. Об'єкти, з яких складається кортеж, називаються його компонентами (елементами), а їх число – довжиною кортежу. Кортежі довжиною два називаються впорядкованими парами, довжиною три – трійками і т.д. Два кортежі називаються рівними, якщо вони мають однакові довжини і відповідні їхні компоненти співпадають. Зокрема

Якщо $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, то декартовий добуток $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ називають декартовим добутком n -го степеня множини A і позначають A^n. При $n = 2$ множина A^2 називається декартовим квадратом множини A,

При $n = 3$ множина A^3 – декартовим кубом; за означенням приймається: $A^0 = \varnothing$, $A^1 = A$.

Теорема. Якщо $A_1, A_2, \cdots, A_n$ – скінченні множини, то потужність

$$\left|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\right| = \left|A_1\right| \cdot \left|A_2\right| \cdot\ \cdots\ \cdot \left|A_n\right|\ . \tag{2.2}$$

Доведення. Нехай відомі потужності заданих скінченних множин: $\left|A_i\right| = m_i,\ 1 \le i \le n.$ Доведення проведемо за методом математичної індукції.

При $n = 1$ теорема справджується. Допустимо, що вона вірна при $n = k$, і доведемо її справедливість при $n = k + 1$. За припущенням виконується рівність

$$\left|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k\right| = m_1 \cdot m_2 \cdot\ \cdots\ \cdot m_k\ .$$

Візьмемо довільний кортеж $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ і припишемо справа елемент $a_{k+1} \in A_{k+1}$. Оскільки $\left|A_{k+1}\right| = m_{k+1}$, то це можна зробити m_{k+1} різними способами; при цьому одержимо m_{k+1} різних кортежів із множини $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1}$. Очевидно, маємо добуток

$$\left| A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{k+1} \right| = m_1 \cdot m_2 \cdot \ \cdots \ \cdot m_{k+1},$$

тобто, теорема справджується при $n = k+1$.

Отже, теорема вірна для будь-яких n.

Наслідок. $\left| A^n \right| = \left| A \right|^n$

Нехай A – алфавіт, тобто скінченна множина, елементами якої є символи (літери, цифри, знаки операцій, розділові знаки тощо). Словом довжиною n в алфавіті A назвемо послідовність n символів із цього алфавіту, записаних один за одним без дужок і ком. За таким означенням слово розуміємо як кортеж із множини A^n. Тоді множина всіх слів у алфавіті A – це множина $A^* = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \cdots$.

Приклад 2.2. Нехай алфавіт складається із трьох символів: $A = \{a,\ b,\ c\}$. Визначити множину всіх слів довжиною 1, 2, 3, 4 в алфавіті A.

Розв'язання. Множина всіх слів довжини 1 в алфавіті $A = \{a,\ b,\ c\}$ – це всі слова із однієї літери цього алфавіту: $A^1 = \{a,\ b,\ c\}$, $\left| A^1 \right| = 3$.

Множина всіх слів довжиною 2 в алфавіті A:

$$A^2 = A \times A = \{aa,\ ab,\ ac,\ ba,\ bb,\ bc,\ ca,\ cb,\ cc\},\ \left| A^2 \right| = 9 = 3^2.$$

Множина всіх слів довжиною 3 в даному алфавіті:

$$A^3 = A \times A \times A = \{aaa,\ aab,\ aac,\ aba,\ \ldots,\ ccc\},\ \left| A^3 \right| = 3^3 = 27.$$

Аналогічно, маємо множину всіх слів довжиною 4 в алфавіті A:

$$A^4 = \{aaaa,\ aaab,\ aaac,\ aaba,\ \ldots,\ cccc\},\ \left| A^4 \right| = 3^4 = 81.$$

2.2. Відношення. Бінарні відношення.

Відношення – один із способів задання взаємозв'язку між елементами множин.

Підмножина $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ називається n-арним відношенням , визначеним на множинах $A_1, A_2, \cdots, A_n$. Якщо $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, то відношення $R \subseteq A^n$ називається *n*-арним відношенням на множині *A*. Коли $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \in R$, то кажуть, що елементи $a_i \in A_i,\ i = \overline{1,\ n}$ перебувають між собою у відношенні *R* або відношення *R* істинне для $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$.

При $n = 1$ відношення називається унарним, при $n = 2$ – бінарним, при $n = 3$ – тернарним і т.д.

Унарні (одномісні) відношення відображають наявність деякої ознаки або властивості *R* у елементів множини *A*. Тоді всі елементи $a \in A$, яким притаманна така ознака *R*, утворюють деяку підмножину в *A*, яка називається унарним відношенням *R*, тобто $a \in A$ і $R \subseteq A$.

Приклади унарних відношень:

1) R – “бути білим” на множині *A* куль в урні;

2) $R = \{2k - 1 : k \in N\}$ - “бути непарним” на множині натуральних чисел *N*.

Підмножина $R \subseteq A \times B$ називається *бінарним* відношенням, тобто елементи $a,\ b$ перебувають у відношенні *R*, якщо $(a,\ b) \in R \subseteq A \times B$; це записують ще так: aRb. Якщо ці елементи не перебувають у відношенні *R*, то записують так: $(a,\ b) \notin R$ або $a\overline{R}b$.

Наведемо приклади бінарних відношень на різних множинах.

1. Відношення на множині *N* натуральних чисел:

1) *R*=” $\leq$ ” – менше або рівне: $(3,\ 5) \in R$, оскільки 3≤5; $(5,\ 5) \in R$, бо 5≤5; $(7,\ 5) \notin R$, оскільки нерівність 7≤5 не справджується;

2) R – “a є дільником b”: $2R4$, $6R6$, $12\overline{R}3$.

2. Відношення на множині людей:

1) R_1 - ”бути студентом однієї групи”;

2) R_2 - ”бути молодшим”;

3) R_3 - ”бути знайомим”.

2.3. Способи задання бінарних відношень

Способи задання відношень залежать від особливостей бінарного відношення. Існують наступні способи задання таких відношень.

1. Списком пар, для яких дане відношення виконується .

Наприклад, *R*={(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (5, 5)}.

2. За допомогою матриці або таблиці. Бінарному відношенню R⊂ A×B, де $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m\}$, $B=\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n\}$ відповідає матриця $C_{m\times n}=(c_{ij})$, елементи якої

$$c_{ij}=\begin{cases}1,\ \textit{якщо}\ a_i R b_j,\\ 0,\ \textit{якщо}\ a_i \overline{R} b_j.\end{cases}$$

Якщо відношення задане на одній і тій самій множині або $|A|=|B|$, то матриця буде квадратною.

3.За допомогою стрілок (графів):

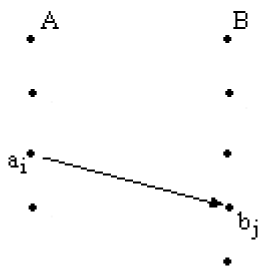

Рис.2.1

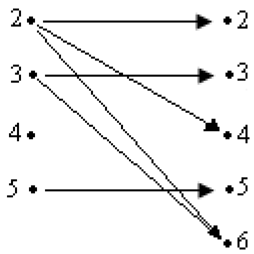

Рис.2.2

Елементи множин $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m\}$ та $B=\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n\}$ зображують у вигляді точок площини або двох прямих і з'єднують точки a_i та b_j стрілкою , спрямованою від a_i до b_j, коли $(a_i,\ b_j)\in R$ (рис.2.1). Наприклад, задане вище списком відношення *R*={(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (5, 5)} графічно зображено на рис.2.2.

Приклад 2.3. Нехай A={1,2,3,4}. Бінарне відношення *R* на множині А задане таблицею.

A	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	0	1	1	0
3	1	0	0	0
4	0	1	0	1

Тоді задання цього відношення за допомогою графа матиме вигляд, як на рис.2.3.

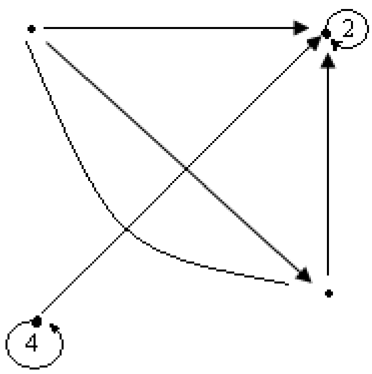

Рис.2.3.

Лівою областю R_- бінарного відношення *R* називають множину всіх перших компонент впорядкованих пар, які складають це відношення:

$$R_- = \{a \,|\, (a,\ b) \in R\}.$$

Правою областю R_+ бінарного відношення *R* називають множину всіх других компонент впорядкованих пар, які утворюють це відношення:

$$R_+ = \{b \,|\, (a,\ b) \in R\}.$$

Наприклад, якщо *R*={(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (5, 5)}, то $R_- = \{2,\ 3,\ 5\}$, $R_+ = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.

Полем $F(R)$ бінарного відношення *R* називають об'єднання лівої і правої його областей: $F(R) = R_- \cup R_+$.

2.4. Операції над відношеннями.

Оскільки відношення задаються *підмножинами*, то для них визначені операції, притаманні множинам: об'єднання, переріз, різниця і доповнення.

Якщо R – бінарне відношення, то універсальною множиною буде множина $U = F(R)\times F(R)$, де $F(R)$ – поле відношення R. Якщо розглядаються кілька бінарних відношень, наприклад R і S, то за універсальну береться множина $U = C\times C$, де C – об'єднання полів кожного із заданих відношень: $C = F(R)\cup F(S)$.

Об'єднанням відношень R і S називається відношення

$R\cup S = \{(a,\ b) \mid (a,\ b)\in R \text{ або } (a,\ b)\in S\}$.

Перерізом відношень R і S називають відношення

$R\cap S = \{(a,\ b) \mid (a,\ b)\in R \ i\ (a,\ b)\in S\}$.

Різницею відношень R і S є відношення

$R\setminus S = \{(a,\ b) \mid (a,\ b)\in R \ i\ (a,\ b)\notin S\}$.

Доповненням відношення R буде відношення $\overline{R} = U\setminus R$.

Приклад 2.4. Нехай задано відношення

R={(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3)}, S ={(1, 1), (2, 2), (3, 3)}.

Визначити результати операцій $\overline{R},\ \overline{S},\ R\setminus S,\ R\cap S$.

Розв'язання. Виписуємо поля бінарних відношень:

$F(R) = R_{-}\cup R_{+} = \{1,\ 2,\ 3\}$; $F(S) = S_{-}\cup S_{+} = \{1,\ 2,\ 3\}$. Тоді множина $C = F(R)\cup F(S) = \{1,\ 2,\ 3\}$ і універсальна множина буде такою

$U = C\times C = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3)\}$.

Тепер знаходимо: $\overline{R} = \{(1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,1),\ (3,2)\}$,

$\overline{S} = \{(1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2)\}$,

$R\setminus S = \{(1,2),(2,3)\}$, $R\cap S = \{(1,1),(3,3)\}$.

Крім зазначених теоретико-множинних операції над відношеннями виконують ще й інші операції.

Бінарне відношення R^{-1} називається *оберненим* до відношення R, якщо $(a,\ b) \in R^{-1}$ тоді і тільки тоді, коли $(b,\ a) \in R$:

$$R^{-1} = \{(a,\ b) \mid (b,\ a) \in R\}.$$

Нехай на множинах *A, B, C* задано відношення $R \subseteq A \times B$ і $S \subseteq B \times C$. *Композицією* відношень R і S називається відношення, яке складається з упорядкованих пар $(a,\ c),\ a \in A,\ c \in C$, для яких існує елемент $b \in B$ такий, що виконуються умови: $(a,\ b) \in R,\ (b,\ c) \in S$. Композиція відношень R і S позначається $S \circ R$ (перше з двох відношень пишемо справа):

$$S \circ R = \{(a,\ c) \mid \exists\, b \in B : (a,\ b) \in R \ i \ (b,\ c) \in S\}.$$

Приклад 2.5. Нехай на множинах $A = \{1,\ 2,\ 3\},\ B = \{x,\ y\},\ C = \{a,\ b,\ c\}$ задано відношення $R \subseteq A \times B$ і $S \subseteq B \times C$:

$R = \{(1,\ x),\ (1,\ y),\ (3,\ x)\}$, $S = \{(x,\ a),\ (x,\ b),\ (y,\ c)\}$. Визначити відношення $S \circ R$.

Розв'язання. Оскільки:

$(1,\ x) \in R$ і $(x,\ a) \in S$, то $(1,\ a) \in S \circ R$;

$(1,\ x) \in R$ і $(x,\ b) \in S$, то $(1,\ b) \in S \circ R$;

$(1,\ y) \in R$ і $(y,\ c) \in S$, то $(1,\ c) \in S \circ R$;

$(3,\ x) \in R$ і $(x,\ a) \in S$, то $(3,\ a) \in S \circ R$;

$(3,\ x) \in R$ і $(x,\ b) \in S$, то $(3,\ b) \in S \circ R$.

Отже, маємо відношення $S \circ R \subseteq A \times C$:

$$S \circ R = \{(1,\ a),\ (1,\ b),\ (1,\ c),\ (3,\ a),\ (3,\ b)\}.$$

Операція композиції відношень дозволяє ввести поняття степені бінарного відношення, заданого на множині.

Нехай деяке відношення R визначене на множині A: $R \subseteq A \times A$. Тоді n – й *степінь* відношення R позначається R^n і визначається так:

$R^n = R^{n-1} \circ R$, для $n = 2, 3, \ldots$.

Перерізом $R(a)$ бінарного відношення R по елементу $a \in F(R)$

називають сукупність всіх других (різних) компонент тих впорядкованих пар цього відношення, в яких першою компонентою є елемент a.

Наприклад, для бінарного відношення

$$R=\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (5, 5)\}$$

маємо перерізи:

$$R(2)=\{2,\ 4,\ 6\},\ R(3)=\{3,\ 6\},\ R(4)=\varnothing,\ R(5)=\{5\},\ R(6)=\varnothing.$$

Множина, що складається з перерізів відношення $R \subseteq A \times B$ за кожним елементом множини A, називається *фактор-множиною* множини B за відношенням R і позначається B/R, тобто

$$B/R=\{R(a): \forall a \in A\}.$$

В попередньому прикладі бінарного відношення фактор-множина буде такою: $B/R=\{\{2,\ 4,\ 6\},\ \{3,\ 6\},\ \{5\},\ \varnothing\}$