***Лекція 3.* Спеціальні бінарні відношення**.

ПЛАН

1. *Властивості бінарних відношень.*
2. *Відношення еквівалентності*
3. *Розбиття множин.*
4. *Відношення порядку.*

3.1. Властивості бінарних відношень.

Бінарні відношення, які зустрічаються на практиці, характеризуються певними властивостями. Будемо розглядати відношення $R \subseteq A \times A$ на множині A.

Означення. Відношення R на множині A називається *рефлексивним,* якщо для будь-якого $a \in A$ має місце $aRa,$ тобто кожний елемент $a \in A$ перебуває у відношенні R сам з собою.

Властивість рефлексивності при заданні відношень матрицею характеризується тим, що всі діагональні елементи матриці дорівнюють 1; при заданні відношення графом кожний елемент має петлю – дугу (a, a).

Означення. Відношення R на множині A називається *антирефлексивним,* якщо aRa не виконується ні при якому $a \in A$.

Наявність цієї властивості характеризується тим, що при заданні відношення матрицею всі діагональні елементи є нульовими.

Відношення “≤” на множині дійсних чисел рефлексивне, відношення “<” на множині дійсних чисел — антирефлексивне. Відношення R - «мати спільний дільник» на множині цілих чисел рефлексивне, відношення R - «бути сином» на множині людей — антирефлексивне. Відношення R - «бути симетричним відносно осі *Ox* на множині точок координатної площини» не є ані рефлексивним, ані антирефлексивним: точка площини симетрична сама собі, якщо вона лежить на осі *Ox,* і несиметрична сама собі в протилежному випадку.

Означення. Відношення R на множині A називається *симетричним,* якщо для пари $(a,b) \in A^2$ з того, що aRb виходить bRa (тобто, для будь-якої пари відношення виконується або в обидва боки, або не виконується взагалі).

Матриця симетричного відношення є симетричною відносно головної діагоналі, а в графі, що задає відношення, для кожної дуги з a в b, існує протилежно спрямована дуга з b у a.

Означення. Відношення *R* називається *асиметричним*, якщо для пари $(a,b) \in A^2$ із aRb виходить, що не виконується bRa (тобто, для будь-якої пари *R* або виконується в один бік, або не виконується взагалі).

Означення. Відношення *R* називається *антисиметричним*, якщо з того, що aRb і bRa, виходить $a = b$.

В матриці антисиметричного відношення відсутні одиниці, симетричні відносно головної діагоналі.

Приклад 3.1. Відношення «бути симетричним відносно вісі X на множині точок координатної площини» є симетричним: якщо перша точка симетрична другій, то і друга симетрична першій. Приклад антисиметричного відношення — відношення "$\leq$" на множині дійсних чисел: якщо $a \leq b$ і $b \leq a$, то $a = b$. Відношення "$<$" на дійсній числовій осі є асиметричним, оскільки якщо $a < b$, то $b < a$ не виконується.

Означення. Відношення *R* називається *транзитивним*, якщо з того що виконуються aRb і bRc, виходить aRc.

Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що якщо елементи $c_{ki} = 1$ і $c_{ij} = 1$, то $c_{kj} = 1$.

У графі, що задає транзитивне відношення *R*, для будь-якої пари дуг, таких, що кінець першої співпадає з початком другої, існує третя дуга, що має спільний початок з першою і спільний кінець з другою.

Приклад 3.2. Відношення "$\leq$" і "$<$" на множині дійсних чисел транзитивні: якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

Означення. Відношення *R* називається *антитранзитивним*, якщо з того, що aRb і bRc виходить, що не виконується aRc.

Приклад 3.3. Відношення «=», R - «бути дільником», що задані на множині цілих чисел, і відношення R - «жити в одному місті», що задане на множині людей, — транзитивні; відношення R - «бути сином» — антитранзитивне.

Означення. Відношення R^* називають *транзитивним замиканням* відношення R на множині A, якщо:

1) R^* - транзитивне;

2) $R \subseteq R^*$;

3) якщо відношення $S \subseteq A \times A$ транзитивне і $S \supseteq R$, то $S \supseteq R^*$.

Інакше кажучи, транзитивним замиканням відношення R є найменше за включенням "$\subseteq$" транзитивне відношення R^*, що містить відношення R як підмножину.

Теорема 3.1. Нехай R – бінарне відношення на скінченній множині A і $|A| = n$. Тоді транзитивне замикання

$$R^* = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n. \tag{3.1}$$

Приклад 3.4. На множині $A = \{a, b\}$ задано бінарне відношення $R = \{(a,b),(b,a)\}$. Знайти транзитивне замикання.

Розв'язання. Множина A має два елементи, тобто, потужність $|A| = 2$.

Знаходимо композицію $R^2 = \{(a,a),(b,b)\}$. Отже, за формулою (3.1) маємо $R^* = R \cup R^2 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$.

Кожне бінарне відношення на множині A може мати одну або кілька з наведених вище властивостей. Ці властивості визначають вид матриці і графа відношення.

3.2. Відношення еквівалентності

Означення. Відношення R на множині A називається відношенням *еквівалентності* (або *еквівалентністю*), якщо воно є водночас рефлексивним, симетричним і транзитивним.

Наприклад, на множині A студентів факультету інформаційних технологій розглянемо бінарне відношення R – “навчатись на одному факультеті”: $R=\{(a,b): a \text{ навчається на одному факультеті з } b\}$.

Дане відношення є рефлексивним, оскільки справедливе aRa для всіх $a\in A$. Відношення R симетричне, оскільки для будь-яких $a,b\in A$ із aRb випливає bRa. Це відношення є транзитивним, оскільки для всіх $a,b,c\in A$ із того, що виконуються aRb і bRc, випливає aRc. Отже, R – відношенням еквівалентності.

Приклад 3.5. Нехай на множині $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ задано бінарне відношення

$$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(1,4),(2,1),(2,4),(3,5),(4,1),(4,2),(5,3)\}.$$

Переконатись, що R є відношенням еквівалентності.

Розв’язання. Представимо відношення R у вигляді матриці $C_{6\times 6}$:

$$C=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\1&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Видно, що головна діагональ матриці утворена лише одиницями (відношення R є рефлексивним); матриця симетрична відносно головної діагоналі (це відношення є симетричним); для елементів матриці виконунується: якщо $c_{ki}=1$ і $c_{ij}=1$, то $c_{kj}=1$ (R – транзитивне).

Отже, R є відношенням еквівалентності на множині A.

Приклад 3.6. Нехай Z – множина цілих чисел. Розглянемо відношення $R\subseteq Z\times Z$: $R=\{(a,b): a-b=5k \text{ для деякого цілого числа } k\}$. Наприклад, $(8,3)\in R$, оскільки $8-3=5=5\cdot 1$, і $(-6,4)\in R$, так як $-6-4=-10=5\cdot(-2)$.

Переконатись, що відношення R є еквівалентністю.

Розв'язання. Відношення R рефлексивне: якщо $a \in Z$ - ціле число, то $a - a = 0 = 5 \cdot 0 = 5k$ для $k = 0$, тобто $(a, a) \in R$.

Нехай $(a, b) \in R$. Тоді існує таке ціле число m, що виконується $a - b = 5 \cdot m$ і $b - a = -(a - b) = -(5 \cdot m) = 5 \cdot (-m)$ для цілого числа (-m), тобто, $(b, a) \in R$. Це означає, що відношення R симетричне.

Вважаємо, що $a, b, c \in Z$, $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$. За означенням, якщо $(a, b) \in R$, то $a - b = 5 \cdot k$ для деякого цілого числа k,і якщо $(b, c) \in R$, то $b - c = 5 \cdot m$ для деякого цілого числа m.

Додавання лівих і правих частин останніх двох рівностей дає:

$$(a - b) + (b - c) = 5k + 5m$$

або

$$a - c = 5 \cdot (k + m)$$

для цілого числа (k+m). Це означає, що $(a, c) \in R$, тому відношення R транзитивне.

Оскільки відношення R рефлексивне, симетричне і транзитивне, то воно є еквівалентністю.

3.3. Розбиття множин.

Нехай на множині A здано відношення еквівалентності R, яке розбиває множину A на сукупність підмножин $\{C_i, i \in I\}$, (I – довільна множина індексів), що:

1) $C_i \cap C_j = \varnothing,\ i \neq j\ (i, j \in I)$;

2) $\bigcup_{i \in I} C_i = A$;

3) будь-які два елементи із однієї підмножини перебувають у відношенні R;

4) між елементами різних підмножин відношення R відсутнє.

В цьому випадку кажуть, що відношення R задає розбиття множини A на систему *класів еквівалентності* відносно R. Число класів еквівалентності відношення R, тобто, потужність системи класів, називається *індексом* розбиття або *індексом множини* A. В той же час будь-яке розбиття множини A на класи визначає деяке відношення еквівалентності “належати до одного і того ж класу даного розбиття”.

Таке розбиття можна уявити наступним чином. Нехай множина A – це набір різнокольорових кульок, а відношення $R \subseteq A \times A$: $R = \{(a,b) : a \text{ одного кольору з } b\}$. Оскільки R – відношення еквівалентності, то кожен клас еквівалентності складатиметься із кульок однакового кольору.

Приклад 3.7. Виписати всі класи еквівалентності відношення R – “мати ту ж саму остачу при діленні на три”, заданого на множині $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Розв’язання. Розбиття даної множини A відносно відношення R складається із таких класів еквівалентності:

$C_0 = \{3,6,9\}$ - діляться на три без остачі;

$C_1 = \{1,4,7\}$ - при діленні на три остача становить 1;

$C_2 = \{2,5,8\}$ - при діленні на три остача дорівнює 2.

Нехай $a \in A$ і $R \subseteq A \times A$ - відношення еквівалентності.

Означення. Класом еквівалентності, породженим елементом $a \in A$, називають множину $[a]$, що складається з елементів, еквівалентних елементу a:

$$[a] = \{x : xRa\}. \tag{3.2}$$

Отже, за означенням $[a] = R_a$ - переріз відношення R за елементом a. Тобто клас еквівалентності $[a]$ містить всі такі елементи множини A, які перебувають у відношенні R з елементом a.

Наприклад, якщо R – відношення паралельності на площині α, а l – деяка фіксована пряма цієї площини, то клас еквівалентності $[l]$ містить усі прямі площини α, паралельні прямій l.

Означення. *Фактор-множиною* множини A за відношенням еквівалентності R називають множину A/R всіх класів еквівалентності:

$$A/R = \{[a] : a \in A\} \ . \quad (3.3)$$

Приклад 3.8. Знайти класи еквівалентності, породженими елементами множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, та фактор-множину за відношенням еквівалентності R, наведеного в прикладі 3.5.

Розв'язання. Згідно з означенням (3.2) виписуємо класи еквівалентності, породженими кожним елементом множини A:

$[1] = \{x : xR1\} = \{1, 2, 4\}$.

Тут $1 \in [1]$, оскільки $(1,1) \in R$; $2 \in [1]$, оскільки $(2,1) \in R$; $4 \in [1]$, оскільки $(4,1) \in R$; не існує ніякого іншого $x \in A$ такого, що $(x,1) \in R$.

Аналогічно, одержимо:

$$[2] = \{x : xR2\} = \{2,1,4\};$$

$$[3] = \{x : xR3\} = \{3,5\};$$

$$[4] = \{x : xR4\} = \{4,1,2\};$$

$$[5] = \{x : xR5\} = \{5,3\};$$

$$[6] = \{x : xR6\} = \{6\}.$$

Отже, маємо тільки три різні класи еквівалентності:

$$[1] = [2] = [4] = \{1, 2, 4\},$$

$$[3] = [5] = \{3,5\},$$

$$[6] = \{6\};$$

тому факор-множина $A/R = \{[1],[3],[6]\} = \{\{1, 2, 4\}, \{3,5\}, \{6\}\}$.

3.4. Відношення порядку.

Відношення порядку дає можливість порівняти між собою різні елементи однієї множини.

Означення. Відношення R називається відношенням *нестрогого порядку*, якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне, та відношенням *строгого порядку*, якщо воно антирефлексивне, антисиметричне і транзитивне. Нестрогий порядок позначають “$\leq$” , а строгий – “$<$”.

Нехай R - відношення порядку на множині A. Кажуть, що елементи $a,b \in A$ *можна порівняти*, якщо aRb або bRa.

Якщо будь-які елементи $a,b \in A$ можна порівняти, то множину (A,R) називають *цілком впорядкованою*, в протилежному випадку - *частково впорядкованою*, а елементи $a,b \in A$ – *порівнюваними* за відношенням R. Запис $(A;\leq)$ означає, що на множині A введено відношення порядку $\leq$.

Впорядковану множину A, в якій будь-які різні два елементи є порівнюваними між собою, називають *лінійно впорядкованою* множиною або *ланцюгом*. Відповідне відношення R (як строге, так і нестроге), задане на лінійно впорядкованій множині, називають *лінійним* (*досконалим*) *порядком*.

Приклад 3.9. R = "$\leq$" на множині натуральних або дійсних чисел. Очевидно, що ці множини цілком впорядковані.

Приклад 3.10. Якщо множиною є n - вимірний простір R^n, $a = (a_1,a_2,...,a_n) \in R^n$, $b = (b_1,b_2,...,b_n) \in R^n$ а відношення задано так: $a \leq b$ якщо $a_i \leq b_i$ ($i=1,2,...,n$), то очевидно, що ця множина є частково впорядкованою.

Нехай A - цілком впорядкований алфавіт. На множині слів з цього алфавіту відношення задається так: $a_1 \prec a_2$ (слово a_1 передує слову a_2). Такий порядок називається *лексикографічним*. Наприклад, літак $\prec$ літера; літо $\prec$ літопис.