Лекція 4. **Відповідності та функції.**

ПЛАН

1. Відповідності і їх властивості.

2. Функції та відображення

3. Операції та їх властивості

4. Потужність множини

Відповідність як і відношення – спосіб задання взаємозв'язків, взаємодій між елементами множини. Частинними випадками відповідностей є *функції, відображення, перетворення, операції*.

4.1. Відповідності і їх властивості.

Означення. Відповідністю між множинами A та B називається підмножина G прямого добутку цих множин: $G \subseteq A \times B$.

Якщо $(a,b) \in G$, то кажуть, що елементу a при відношенні G ставиться у відповідність елемент $в$.

Областю визначення відповідності G називається множина

$D(G) = \{a : (a,b) \in G\}$. *Областю значень* відповідності G називається множина $E(G) = \{b : (a,b) \in G\}$. (рис 4.1).

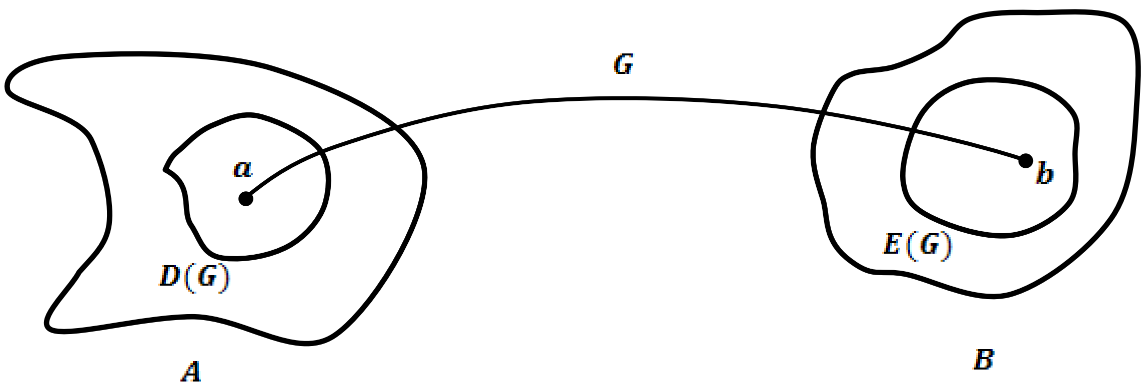

Рис. 4.1. Відповідність між множинами.

Властивості відповідностей $G \subseteq A \times B$.

1. *Скрізь (повністю) визначена* відповідність – якщо $D(G) = A$ і частково визначена відповідність – у протилежному випадку.

2. *Сюр'єктивна відповідність* – якщо $E(G) = B$.

Означення. *Образом елемента a* в множині *B* при відповідності *G* називається множина всіх $b \in B$, які відповідають елементу $a \in A$.

Прообразом елемента b в множину *A* при відповідності *G* називається множина всіх $a \in A$, яким відповідає $b \in B$.

Відповідність *G* називається *функціональною* або *однозначною*, якщо образом будь-якого елемента $a \in D(G)$ є єдиний елемент $b \in E(G)$. Відповідність *G* називається *взаємно однозначною*, якщо вона:

а) скрізь визначена; б) сюр'єктивна; в) функціональна;

г) прообразом будь – якого елемента $b \in E(G)$ є єдиний елемент $a \in D(G)$.

Приклад 4.1. Нехай *G* – множина всіх пар дійсних чисел (*x,y*): $(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1$.

Графічно така відповідність *G* визначає коло радіуса 1 з центром в точці (3;2). Визначити, що є образом і прообразами:

а) чисел 2, 3, 4;

б) відрізків [2, 3], [2, 4].

Які властивості відповідності *G*?

Розв'язання. Коло *G* задає відповідність між множинами дійсних чисел R і R (рис. 4.2).

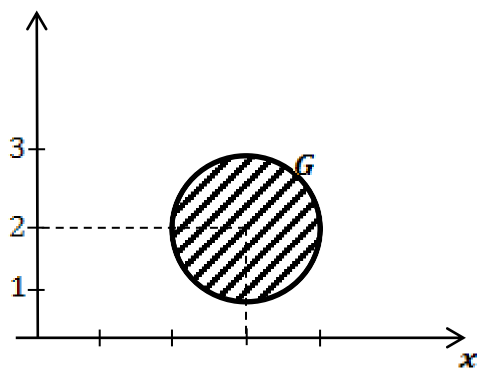

Рис. 4.2

а) Образом числа $2 \in D(G)$ при відповідності *G* є єдине число $2 \in E(G)$.

Образ числа 3 при відповідності G є множина – відрізок [1,3], а образ числа 4 – число 2.

Прообразом числа $2 \in E(G)$ (на осі ординат) при відповідності G буде множина всіх дійсних чисел $[2,4] \in D(G)$ (на осі абсцис), прообразом числа 3 – число 3, а прообраз числа 4 при відповідності G не існує.

б) Образом множини чисел $[2,3] \in D(G)$ буде відрізок $[1,3] \in E(G)$. Аналогічно, образом відрізка [2,4] буде відрізок [1,3] при відповідності G.

Прообраз відрізка [2,3] при відповідності G – це відрізок [2,4], а прообраз відрізка [2,4] – також [2,4].

Якщо вважати, що відповідність G встановлена на множині дійсних чисел: $G \subseteq R \times R$, то вона є:

1) частково визначеною, оскільки $D(G) \neq R$;

2) не сюр'єктивною, оскільки $E(G) \neq R$;

3) не функціональною, оскільки для чисел із відрізка $[2,4] = D(G)$ (крім чисел 2, 4) відсутній єдиний образ;

4) не взаємно однозначна.

4.2. Функції та відображення.

Функції використовуються в трактуванні багатьох понять математики. Зокрема, рекурсивні функції широко застосовуються в комп'ютерних науках. Функції також застосовуються для визначення часу роботи алгоритмів при розв'язуванні задач із вхідними даними певного розміру.

Означення. Відношення між елементами множин *A* та *B* називається *функціональним відношенням* або *функцією* із множини *A* у множину *B*, якщо кожному елементу множини *A* ставиться у відповідність не більше як один елемент множини *B*; позначається $f : A \rightarrow B$.

Оскільки функція *f* є окремим видом відношення між елементами двох множин, то для неї зберігаються ті ж характеристики, що й для відношень.

Довільний елемент $a \in D(f)$ називають аргументом функції, а $b \in E(f)$ – залежною змінною, причому позначають $b=f(a)$ або $f(a)= b$.

Функція називається *всюди визначеною*, якщо її область визначення збігається з областю відправлення.

Відображенням множини A в множину B називається всюди визначена функція $f : A \to B$.

Відображення, у якого область визначення дорівнює області прибуття, називається *відображенням множини в себе* або *перестановкою* на A, тобто $f: A \to A$.

Відображення $f : A \to B$ називається:

1) *сюр'єктивним*, якщо $E(f) = B$;

2) *ін'єктивним*, якщо різні елементи області визначення мають різні образи;

3) *бієктивним*, якщо воно сюр'єктивне і ін'єктивне.

Сюр'єктивне відображення називають ще й відображення A в B, а бієктивне – взаємно однозначним відображенням множини A на B.

Функції f і g рівні, якщо:

- їхні області визначення – одна й та ж множина A;
- для кожного елемента $a \in A$ виконується $f(a)=g(a)$.

Функція виду $f : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to B$ називається n – місною (n – арною), тобто, має n аргументів:

$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$, де $a_i \in A_i$, $(i = \overline{1, n})$, $b \in B$.

Відповідність $H \subseteq B \times A$ називається *оберненою* до $G \subseteq A \times B$, якщо Н така, що $(b, a) \in H$ тоді і тільки тоді, коли $(a, b) \in G$; обернену відповідність позначають G^{-1}.

Для функції $f : A \to B$ обернена функція існує тоді і тільки тоді, коли f є взаємно однозначною відповідністю між своїми областями визначення і значень, тобто, коли f – бієкція.

Нехай задані функції $f : A \to B$ і $g : B \to C$. Функція $\varphi : A \to C$ називається *композицією функцій* f *і* g, якщо має місце рівність $\varphi(x) = g\left(f(x)\right)$, де $x \in A$; позначається $f * g$.

Функція, одержана із функцій $f_1, f_2, \dots, f_n$ деякою підстановкою їх однієї в іншу і перейменуванням аргументів, називається *суперпозицією* цих функцій. Вираз, що описує таку суперпозицію і який містить функціональні знаки та символи аргументів, називається *формулою.*

Функція, як окремий вид відношення, може задаватись такими способами:

- множиною пар (графіком);
- таблицею;
- формулою, що виражає функцію як суперпозицію інших функцій;
- рекурсивною обчислювальною процедурою. Наприклад, функція $f(x) = x!$ описується рекурсивною обчислювальною процедурою за такими правилами:

1) $f(0) = 1$;

2) $f(x+1) = f(x) \cdot (x+1)$.

Приклад 4.2. Таблиця виграшів лотереї встановлює відповідність G між парами чисел $N \times N = N^2$ (серія, номер виграшного білета) і множиною виграшів M, тобто $G \subseteq N^2 \times M$. Чи є така відповідність функцією, якщо – да, то якою?

Розв'язання. Відповідність $G \subseteq N^2 \times M$, задана таблицею виграшів, є функціональною, оскільки для кожної пари із N^2 (серія, номер білета) визначений конкретний (єдиний) виграш із множини M. Отже, задана відповідність є двомісною функція $f : N \times N \to M$. Функція такого типу не всюди визначена, тому не є відображенням. Більше того, як правило, число виграшних білетів (потужність області визначення $D(f)$) більша за перелік найменувань виграшів (потужності області значень $E(f)$), тому даній функції не властива єдиність прообразу. В силу сказаного, f – не є взаємно однозначною відповідністю.

Отже, таблиця виграшів лотереї визначає функцію $f : N \times N \to M$, яка не є відображенням і тим більше – взаємно однозначною відповідністю.

Приклад 4.3. Чи є функція $f(x) = 2x$, що має тип $N \to N$, відображенням, і якщо – да, то яким? Чи має функція f обернену функцію f^{-1}; якщо да, то чи буде f^{-1} відображенням?

Розв'язання. Функція $f(x) = 2x$; $f : N \to N$ - всюди визначена на множині натуральних чисел N, проте не сюр'єктивна, оскільки область значень містить не всі натуральні числа, а тільки парні: $E(f) = M_{2n} \neq N$. Тому f є відображенням із N в N – перестановка на N.

Між $D(f) = N$ і $E(f) = M_{2n}$ має місце взаємно однозначна відповідність: $\forall n \in N$ відповідає єдиний елемент $2n \in M_{2n}$, і навпаки. Тому функція $f(x) = 2x$, $f : N \to N$ має обернену f^{-1}. Але обернена функція $f^{-1} : N \to N$ не всюди визначена; її область визначення є множиною парних чисел $M_{2n} \neq N$. Тому обернена функція f^{-1} на відміну від вихідної функції f не є відображенням.

Приклад 4.4. Записати композиції функції $f(x) = 2x$ і $g(x) = 1 + x$.

Розв'язання. Нехай функції $f(x) = 2x$ і $g(x) = 1 + x$ мають тип $R \to R$. Тоді їхні композиції можливі в довільному порядку.

Композиція $f * g = g(f(x)) = 1 + f(x) = 1 + 2x$ є підстановкою функції f в g.

Композиція $g * f = f(g(x)) = 2g(x) = 2(1 + x) = 2 + 2x$ одержана підстановкою функції g в f.

4.3. Операції та їх властивості

Нехай A - непорожня множина.

Означення. *Операцією* на множині A називається функція f, яка є відображенням виду $f : A^n \to A,\ n \in N$, де A^n – декартів добуток.

У цьому визначенні є два важливих моменти. По-перше, оскільки операція є функцією, то результат застосування операції визначено однозначно. Тому даний упорядкований набір з n елементів множини A функція f переводить тільки в один елемент із A. По-друге, операція є *замкненою* на A у тому розумінні, що область визначення та область значень операції лежать в A^n і A відповідно.

Кажуть, що операція $A^n \to A$ має порядок n або є *n-арною* операцією. Елементи упорядкованого набору з n елементів в області визначення A називають *операндами*. Операції позначають символами, які називають *операторами*. Частіше зустрічається ситуація, коли порядок операції дорівнює 1 або 2. Якщо $n=1$, то операцію f називають *унарною,* якщо $n=2$ – *бінарною*.

У випадку унарних операцій зазвичай символ оператора ставлять перед або над операндом.

Приклад 4.5. Прикладами унарних операцій є операція зміни знаку (-) на множині дійсних чисел, операція піднесення до степеня (наприклад, до квадрату) на множині R. В алгебрі множин прикладом унарної операції є операція доповнення множин. Бінарними операціями на множині дійсних чисел є арифметичні операції додавання, віднімання, множення, ділення (+, -, x, /). В алгебрі множин бінарними є операції — об'єднання, переріз, різниця.

Операції записують одним з трьох способів. У першому випадку оператор ставиться між операндами (*інфіксна форма*), у другому — перед операндами (*префіксна форма*) і у третьому — після операндів (*постфіксна форма*).

Для бінарної операції f із операндами x, y відповідна форма запису матиме вигляд: xfy – інфіксна, fxy – префіксна, xyf – постфіксна.

Наприклад, бінарну операцію додавання чисел a та b можна записати трьома способами: $a+b$, або $+ab$, або $ab+$.

В більшості випадків математичних текстів використовується інфіксна форма. Префіксна і постфіксна форми запису мають ту перевагу, що не потребують дужок при визначенні порядку обчислень складних виразів, і це робить їх особливо зручними для автоматичної обробки. Вони часто використовуються для представлення виразів у пам'яті комп'ютера.

Наприклад, алгоритм обчислення значення виразу, що записаний у постфіксній формі, виглядає так:

1) при перегляді запису зліва направо виконується перша знайдена операція, якій безпосередньо передує достатня для неї кількість операндів;

2) на місці виконаної операції і використаних для цього операндів у рядок записується результат виконання операції;

3) повертаємося до кроку 1.

Приклад 4.6. Нехай є вираз, який у звичній для нас інфіксній формі виглядає так:

1 + 2 x 3 + (4 + 5 (6 + 7)).

Результат переведення його до постфіксної форми буде

таким:

123 x + 4567 + x + +.

Обчислимо тепер значення виразу, використовуючи наведений алгоритм:

$1\ \underline{2\ 3\ x}\ +\ 4\ 5\ 6\ 7\ +\ x\ +\ + = \underline{1\ 6\ +}\ 4\ 5\ 6\ 7\ +\ x\ +\ + =$

$= 7\ 4\ 5\ \underline{6\ 7\ +}\ x\ +\ + = 7\ 4\ \underline{5\ 13\ x}\ +\ + = 7\ \underline{4\ 65\ +}\ + = \underline{7\ 69\ +} = 76.$

Властивості бінарних операцій на множині A:

1) f – *комутативна*, якщо для будь-яких $a, b \in A$

$$afb = bfa$$

2) f – *асоціативна,* якщо для будь-яких $a, b \in A$

$$(afb)\,fc = af\,(bfc)$$

Для асоціативної операції f замість $(afb)\,fc$ або $af\,(bfc)$ часто пишуть

$afbfc$ оскільки порядок виконання асоціативної операції не має значення.

3) f – *дистрибутивна зліва* відносно операції φ, якщо

$$af(b\varphi c) = (afb)\varphi(afc)$$

і *дистрибутивна справа* відносно операції φ, якщо

$$(a\varphi b)fc = (afc)\varphi(bfc)$$

для будь-яких $a, b, c \in A$.

Приклад 4.7. Звичайна бінарна операція додавання (+) на множині дійсних чисел є комутативною і асоціативною, а операція віднімання (-) — некомутативна і неасоціативна, тобто

$a+b=b+a$, але $a-b \neq b-a$;

$(a+b)+c=a+(b+c)$, але $(a-b)-c \neq a-(b-c)$.

Упорядковану пару (A, f), де f – бінарна операція на множині A, називають *алгеброю* з бінарною операцією.

4.4. Потужність множини

Якщо між елементами множин *A* та *B* існує взаємно однозначна відповідність, то $|A|=|B|$, тобто множини *A* та *B* називаються рівнопотужними.

Очевидно, що відношення рівнопотужності є відношенням еквівалентності, і тому рівнопотужні множини часто називають еквівалентними.

Множини, рівнопотужні множині натуральних чисел *N*, називаються *зліченними*, а рівнопотужні множині дійсних чисел *R* – *континуальними*.

Теорема 4.1. Об'єднання скінченної або зліченної множини зліченних множин знову є множинною зліченною.

Доведення.

1. Розглянемо випадок скінченного числа зліченних множин $A_1, A_2, \cdots, A_k$ і $a_{is} \in A_i$ – їх елементи:

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots\},$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots\},$$

....

$$A_k = \{a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}, \ldots\}.$$

Візьмемо послідовність $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{k1}, a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{k2}, \ldots, a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{kn}, \ldots$. Таку послідовність завжди можна перерахувати, тому множина

$A^* = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ зліченна.

2. Нехай маємо зліченну множину зліченних множин $A_1, A_2, \cdots, A_n, \ldots$, де $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots\}$.

Існує лише скінченне число елементів a_{ik}, для яких $i+k=2$; перенумеруємо їх (наприклад, за зростанням значення i), потім (за допомогою інших чисел) перенумеруємо елементи, для яких $i+k=3$ і т.д. При цьому кожний елемент a_{ik} одержить деякий номер, і різні елементи матимуть різні номери. Теорема доведена.

Зауваження. Існують множини, елементи яких перерахувати неможливо. Такі множини називаються *незліченними*, а їх потужність – *континуум*.

Теорема 4.2.(*Кантора*). Множина всіх дійсних чисел з інтервалу (0,1) незліченна.

Доведення. Скористаємось діагональним методом Кантора. Відомо, що кожному дійсному числу з інтервалу (0,1) можна однозначно проставити у відповідність правильний нескінченний десятковий дріб $0, a_1 a_2 \ldots a_n, \ldots$.

Припустимо, що теорема хибна і множина зліченна, тобто її елементи можуть бути пераховані:

$$x_1 = 0, a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \ldots$$

$$x_2 = 0, a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \ldots$$

………………………………

$x_n = 0, a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn}, \dots$

……………………………….

де $a_{ij} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Розглянемо довільний десятковий дріб $\beta = 0, b_{11} b_{22} b_{33} \dots$, в якого $b_{11} \neq a_{11}, b_{22} \neq a_{22}, b_{33} \neq a_{33}$ і т.д.. Це число належить інтервалу (0,1), але не входить до розглянутого переліку, оскільки відрізняється від будь – якого елемента x_i числом b_{ii}, яке лежить на діагоналі ($b_{ii} \neq a_{ii}$). Отже, переліку для всіх чисел з інтервалу (0,1) не існує і припущення про зліченність цієї множини хибне. Теорема доведена.

Множина, еквівалентна множині дійсних чисел з інтервалу (0,1), називається *множиною потужності континууму*.

Приклад 4.8. Множина раціональних чисел злічення.

Дійсно, взаємно однозначну відповідність з натуральним рядом можна встановити наступною послідовністю: