***Лекція 6.* Біном Ньютона. Метод включень і вилучень.**

ПЛАН

1. *Властивості біноміальних коефіцієнтів.*
2. *Біном Ньютона.*
3. *Метод включень і вилучень.*

6.1. Властивості біноміальних коефіцієнтів.

Числа сполучень C_n^k $(0 \le k \le n)$, які обчислюються за формулою (5.7): $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, називають *біноміальними коефіцієнтами*. Ці числа зустрічаються в формулах розв'язування багатьох задач комбінаторного аналізу. Розглянемо деякі найважливіші властивості біноміальних коефіцієнтів.

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.
2. $C_n^0 = C_n^n = 1$.
3. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
4. $C_{m+n}^k = \sum\limits_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i}$

Переконатись у справедливості наведених тотожностей можна шляхом безпосереднього використання формули (5.7). Доведемо, наприклад, формулу 3. Маємо:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{k(k-1)!(n-k-1)!(n-k)} = \frac{(n-k+k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Доведемо тепер властивість 4. За означенням C_{m+n}^k – це число способів вибору k елементів із $(m+n)$- елементної множини. Елементи можна вибирати в два етапи. Спочатку вибрати i елементів із підмножини потужністю m елементів; це можна зробити C_m^i способами. Потім вибирається решта $k-i$ елементів із іншої підмножини потужністю n, що можна зробити C_n^{k-i} способами. За правилами добутку і суми загальне число способів вибору k елементів становить $C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i}$.

Приклад 6.1. Розв'язати рівняння $C_k^{k-3} + C_k^{k-2} = 15(k-1)$ відносно натурального числа k.

Розв'язання. Очевидно, розв'язки рівняння мають задовольняти умовам

$$\begin{cases} k-3 \ge 0, \\ k-2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \ge 3, \\ k \ge 2 \end{cases} \Rightarrow k \ge 3.$$

Скориставшись формулою (5.7), запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{k!}{(k-3)!(k-k+3)!} + \frac{k!}{(k-2)!(k-k+2)!} = 15(k-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k!}{(k-3)!3!} + \frac{k!}{(k-2)!2!} = 15(k-1).$$

Виконаємо спрощення:

$$\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)!}{(k-3)!3!} + \frac{k(k-1)(k-2)!}{(k-2)!2!} = 15(k-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k(k-1)(k-2)}{6} + \frac{k(k-1)}{2} = 15(k-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k-1)\left(\frac{k(k-2)}{6} + \frac{k}{2} - 15\right) = 0.$$

Приходимо до сукупності

$$\left[\begin{array}{c} k-1=0, \\ \dfrac{k(k-2)}{6} + \dfrac{k}{2} - 15 = 0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} k=1, \\ k(k-2)+3k-90=0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} k=1, \\ k^2+k-90=0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} k_1=1, \\ k_2=-10, \\ k_3=9. \end{array}\right.$$

Отже, дане рівняння має єдиний розв'язок $k=9$.

6.2. Біном Ньютона.

З елементарної математики добре відомі формули скороченого множення

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{і} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Виявляється, існує загальна формула.

Теорема 6.1. (*біноміальна теорема*). Для натурального n справедлива рівність

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n a^0 b^n \equiv \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \qquad (6.1)$$

Доведення. Скористаємось методом індукції. При $n=1$ маємо:

$$(a+b)^1 = a + b = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = \sum_{k=0}^{1} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Отже, база індукції виконується.

Нехай теорема справедлива при n. Покажемо, що вона справедлива і при $n+1$ (індуктивний перехід). За припущенням індукції маємо:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = \left(C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n a^0 b^n\right)(a+b) =$$

$$= a\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k + b\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$= C_n^0 a^{n+1} b^0 + (C_n^1 + C_n^0) a^n b^1 + (C_n^2 + C_n^1) a^{n-1} b^2 + \cdots + C_n^n a^0 b^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^0 a^{n+1} b^0 + C_{n+1}^1 a^n b^1 + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \cdots + C_{n+1}^{n+1} a^0 b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k a^{n-k} b^k;$$

тут скористались властивостями 3 і 2. Теорема доведена.

Формулу (6.1) називають *біномом Ньютона*, звідки дістали свою назву біноміальні коефіцієнти C_n^k.

З властивості 3 біноміальних коефіцієнтів випливає, що біноміальні коефіцієнти формули (6.1) можна записати у вигляді трикутної таблиці, яку називають *трикутником Паскаля*:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdots & & & & \cdots & & & & \cdots & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
n=1 \\ n=2 \\ n=3 \\ n=4 \\ n=5 \\ \
\end{array}
$$

У n-му рядку цього трикутника стоять біноміальні коефіцієнти розкладу (6.1): кожний коефіцієнт, крім двох крайніх одиниць, є сумою двох коефіцієнтів із попереднього рядка, які стоять над ним.

Із теореми 6.1 можна одержати ряд важливих наслідків.

Наслідок 1. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$

Доведення. Покладемо в формулі (6.1) $a=1,\ b=1$; маємо

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k .$$

Наслідок 2. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$

Доведення. В формулі бінома ньютона покладемо $a=1,\ b=-1$; одержимо

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k .$$

Приклад 6.2. Знайти коефіцієнт при $x^2 y^5$ в розкладанні $(3x+2y)^7$.

Розв'язання. Згідно з формулою (6.1) доданок, який містить $x^2 y^5$, має вигляд

$$C_7^2 (3x)^2 (2y)^5 = \frac{7!}{2!5!} (3x)^2 (2y)^5 = \frac{42}{2} 3^2 x^2 2^5 y^5 = 21 \cdot 9 \cdot 32 x^2 y^5 = 6048 x^2 y^5 .$$

Отже, коефіцієнт при $x^2 y^5$ дорівнює 6048.

Наступна теорема є узагальненням бінома Ньютона.

Теорема 6.2. (*поліноміальна теорема*). Для натурального n справедлива рівність

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 \ge 0, \ldots, k_m \ge 0 \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n}} P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}. \quad (6.2)$$

Приклад 6.3. Знайти коефіцієнт при $x^3y^4z^4$ в розкладанні $(2x + y^2 + 3z)^9$.

Розв'язання. Із поліноміальної теореми видно, що доданок, який містить $x^3y^4z^4$ буде таким (при $n = 9,\ k_1 = 3,\ k_2 = 2,\ k_3 = 4;\ k_1 + k_2 + k_3 = n$):

$$P_9(3,2,4)(2x)^3(y^2)^2(3z)^4 = \frac{9!}{3!2!4!} 2^3 3^4 x^3 y^4 z^4 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6 \cdot 4} 8 \cdot 81 x^3 y^4 z^4.$$

Обчислюємо коефіцієнт при $x^3y^4z^4$:

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6 \cdot 4} 8 \cdot 81 = 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 81 = 408240.$$

6.3. Метод включень і вилучень.

Раніше при застосуванні комбінаторного правила суми розглядались множини, які не перетинаються. Проте часто виникають задачі про підрахунок елементів об'єднання множин, які перетинаються. Нехай A, B – скінченні множини.

Теорема 6.3. Кількість елементів, які можна вибрати із множин A або B визначається за формулою

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (6.3)$$

Доведення. Множину $A \cup B$ представимо у вигляді
$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$,
де $A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \cap B$ – множини, які попарно не перетинаються. Тому маємо

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B|. \quad (6.4)$$

Враховуючи, що $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ і $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$, $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$ або $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$, $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$, рівність (6.4) запишемо так:

$$|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Теорема доведена.

Приклад 6.4. У фірмі працює 63 співробітники. Серед них 45 володіють англійською мовою, 33 – німецькою, а 23 знають і англійську, і німецьку мови. Скільки співробітників:

а) володіють англійською або німецькою мовою?

б) не володіють жодною із цих мов?

Розв'язання. Нехай U – універсальна множина (всі співробітники фірми), A – множина співробітників, які володіють англійською мовою, H – множина співробітників, які володіють німецькою мовою;

$$|U| = 63, \quad |A| = 45, \quad |H| = 33, \quad |A \cap H| = 23.$$

а) Співробітники, які володіють англійською або німецькою мовами, утворюють множину $A \cup H$, потужність якої визначається за формулою (6.3):

$$|A \cup H| = |A| + |H| - |A \cap H| = 45 + 33 - 23 = 55.$$

б) Співробітники фірми, які не володіють як англійською, так і німецькою мовами утворюють множину $\bar{A} \cap \bar{H}$. Оскільки справедлива рівність $\bar{A} \cap \bar{H} = \overline{A \cup H}$ (закон де Моргана), то знаходимо потужність

$$|\bar{A} \cap \bar{H}| = |\overline{A \cup H}| = |U| - |A \cup H| = 63 - 55 = 8.$$

Розглянемо тепер випадок трьох множин. Нехай задано множини *A, B* і *C*, які можуть перетинатися, і необхідно визначити потужність множини $A \cup B \cup C$. Якщо взяти суму потужностей кожної із множин *A, B* і *C,* то підмножини, які утворюють перерізи $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ будуть враховані двічі. Якщо відняти потужності $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ і $|B \cap C|$, то як видно, наприклад, із діаграми Ейлера-Венна, елементи множини $A \cap B \cap C$ зовсім не будуть враховані. Тому необхідно додати потужність $|A \cap B \cap C|$, після чого при підрахунку потужності множини $A \cup B \cup C$ кожний елемент буде враховуватись лише один раз. Отже, маємо наступну формулу:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \tag{6.5}$$

Приклад 6.5. а) Скільки додатних цілих чисел, менших 1002, діляться на 2, 3 або 5? б) Скільки додатних цілих чисел, менших 1002, не діляться на 2, 3 або 5?

Розв'язання. Позначимо через U – універсальну множину всіх додатних цілих чисел, менших 1002; A – множину додатних цілих чисел, менших 1002, які діляться на 2; B – множину додатних цілих чисел, менших 1002, які діляться на 3; C – множину додатних цілих чисел, менших 1002, які діляться на 5. Маємо: $|U| = 1001$ – всього чисел, менших 1002;

$|A| = \left[\dfrac{1001}{2}\right] = 500$ – кількість цілих чисел, які діляться на 2;

$|B| = \left[\dfrac{1001}{3}\right] = 333$ – кількість цілих чисел, які діляться на 3;

$|C| = \left[\dfrac{1001}{5}\right] = 200$ – кількість цілих чисел, які діляться на 5;

$|A \cap B| = \left[\dfrac{1001}{6}\right] = 166$ – кількість цілих чисел, які діляться на 2 і на 3;

$|A \cap C| = \left[\dfrac{1001}{10}\right] = 100$ – кількість цілих чисел, які діляться на 2 і на 5;

$|B \cap C| = \left[\dfrac{1001}{15}\right] = 66$ – кількість цілих чисел, які діляться на 3 і на 5;

$|A \cap B \cap C| = \left[\dfrac{1001}{30}\right] = 33$ – кількість цілих чисел, які діляться на 2, 3 і на 5.

а) Згідно з формулою (6.5) кількість додатних цілих чисел, менших 1002, які діляться на 2, 3 або 5 буде таким:

$$|A \cup B \cup C| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 333 = 734.$$

б) Визначаємо кількість додатних цілих чисел, менших 1002, які не діляться на 2, 3 або 5:

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |U| - |A \cup B \cup C| = 1001 - 734 = 267.$$

Теорема 6.4. Якщо $A_1, A_2, \dots, A_n$ – деякі скінченні множини, то потужність множини $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ визначається за формулою

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| - \sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i \cap A_j\right| + \\ + \sum_{1\le i<j<k\le n}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \dots + (-1)^{n-1}\left|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n\right|. \tag{6.5}$$

Доведення. Необхідно показати, що кожний елемент із множини $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ враховується в правій частині рівності (6.5) лише один раз. Нехай елемент $a \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ входить до складу рівно m множин сукупності $A_1, A_2, \dots, A_n$. Тоді в сумі $\sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right|$ елемент a враховано $m = C_m^1$ разів. В сумі $\sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i \cap A_j\right|$ елемент a враховується лише тоді, коли вибрані дві множини, які містять цей елемент; існує C_m^2 способи вибору таких множин. Отже, в сумі $\sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i \cap A_j\right|$ елемент a враховується C_m^2 разів. В сумі $\sum_{1\le i<j<k\le n}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right|$ елемент a враховується лише тоді, коли вибрані три множини, які містять цей елемент; існує C_m^3 способи вибору таких множин і відповідно стільки ж разів враховується елемент a. Отже, в правій частині формули (6.5) елемент a підраховується $C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \dots + (-1)^{m-1}C_m^m$ разів. Згідно з наслідком 1 маємо:

$$C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \dots + (-1)^{m-1}C_m^m = 1 - \left(1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \dots + (-1)^m C_m^m\right) = \\ = 1 - (1-1)^m = 1 - 0 = 1,$$

а це означає, що кожний елемент a із $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ враховується в правій частині рівності (6.5) лише один раз. Теорема доведена.