Лекція 7. **Алгебра логіки**

ПЛАН

1. Поняття алгебри.
2. Функції алгебри логіки.

7. 1. Поняття алгебри

Для зображення інформації в комп'ютерах використовується двійкова система числення. Таким чином, всі операції, які виконує комп'ютер, проводяться на множині $\{0,1\}$. Ці перетворення зручно формально зображати за допомогою апарату двійкової логіки, який був розроблений англійським математиком Джорджем Булем у середині XIX століття. Ця алгебраїчна структура є алгеброю і називається булевою . Алгебра, як розділ математики, вивчає властивості множин, на яких визначена система операцій і відношень. Алгебраїчними методами користуються в різних прикладних застосуваннях, наприклад, в теорії автоматів. Булева алгебра використовується при розв'язанні різних задач обробки інформації, при роботі з базами даних, в логічному програмуванні, при проектуванні інтелектуальних систем, для конструювання та аналізу роботи комп'ютерів та інших електронних пристроїв.

Алгебраїчною системою (або *алгеброю*) називається система (A,Σ), яка складається з деякої непустої множини *A* (*основна множина алгебри* або *носій алгебри*) і множини операцій Σ, визначених на А (*сигнатура алгебри*). Прикладами алгебраїчних систем є: $(Z,+),\ (R;+,-,\times)$, де Z – множина всіх цілих чисел, R – множина всіх дійсних чисел.

Висловлюванням називають розповідне речення, про яке в даній ситуації можна сказати, що воно або *істинне*, або *хибне*, але не одне й інше водночас. Наведемо приклади висловлювань.

1. Київ – столиця України.

2. Сніг зелений.

Перше висловлювання є істинне, а друге – хибне.

Поставимо у відповідність висловлюванню *P логічну змінну x*, яка набуває значення 1, якщо висловлювання *P* істинне, і 0, якщо *P* хибне.

Із кількох висловлювань можна утворити різні нові висловлювання. При цьому початкові висловлювання називають *простими*, а утворені – *складними*. Відповідно із логічних змінних можна складати різні конструкції, які утворюють формули алгебри логіки. Прості висловлювання можна розглядати як деякі змінні, які набувають свої значення із множини $B = \{0,1\}$. Такі змінні називають булевими змінними в честь англійського математика Джоржа Буля. Самі значення 0 і 1 булевих змінних називають *булевими константами*. З простих висловлювань можливо створити більш складні висловлювання за допомогою речових *зв'язок:* «і», «або», «не», «якщо …,
тоді». Для цих зв'язок введемо відповідні позначення: $\wedge$ – *кон'юнкція*, $\vee$– *диз'юнкція*, $\neg$ – *заперечення*, $\rightarrow$– *імплікація.*

Алгебраїчна система (B,Σ), де носій алгебри $B = \{0,1\}$ і сигнатура $\Sigma = \{\wedge,\vee,\neg\}$, називається *двохелементною булевою алгеброю*.

Алгебра логіки – це булева алгебра $(B,\Sigma^{'})$, в якій множину операцій доповнено двома бінарними операціями: імплікацією $\rightarrow$ і еквівалентністю $\sqcup$, тобто сигнатура $\Sigma^{'} = \{\wedge,\vee,\neg,\rightarrow,\square\}$. Алгебра логіки вивчає будову складних логічних висловлювань (логічних формул) і способи встановлення їх істинності за допомогою алгебраїчних методів.

7.2. Функції алгебри логіки.

Функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від *n* змінних, аргументи і значення якої належать множині *B*= {0, 1}, називають *n*-місною булевою функцією. Іншими словами, булева функція розглядається як відображення

$$f : B^n \rightarrow B.$$

Множину всіх булевих функцій позначають P_2, а множину всіх булевих функцій від *n* змінних – $P_2(n)$.

Область визначення функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – множина B^n усіх можливих двійкових наборів довжиною *n*. Очевидно, існує 2^n різних наборів із *n* булевих змінних: $\left|B^n\right| = 2^n$.

Справедливі наступна теорема.

Теорема 7.1. Кількість різних булевих функцій від *n* змінних дорівнює 2^{2^n}, тобто

$$\left|P_2(n)\right| = 2^{2^n}. \qquad (7.1)$$

Доведення. На кожному із 2^n наборі значень аргументів булева функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ може набувати лише двох значень: 1 або 0. Тому існує $2^{\left|B^n\right|} = 2^{2^n}$ різних булевих функцій *n* змінних.

Змінну x_i функції $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ називають *неістотною* або *фіктивною*, якщо

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

при будь-яких значеннях решти змінних. Це означає, що зміна значення x_i у будь-якому наборі значень аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не змінює значення функції. Тому функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ фактично залежить від $(n-1)$ змінної, тобто являє собою функцію $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. В такому разі кажуть, що функцію g отримано з функції *f* вилученням фіктивної змінної, а функцію *f* отримано з g введенням фіктивної змінної. Функції *f* і *g* називають *рівними*, якщо функцію *g* можна одержати з *f* введенням або вилученням фіктивних змінних.

Булеві функції можна задавати наступними способами:

1) за допомогою *таблиці істинності*;
2) порядковим номером, який має ця функція;
3) аналітично у вигляді формули;
4) графічно.

Скінченність області визначення булевих функцій дає змогу задавати такі функції за допомогою таблиць. Розглядатимемо двійкові набори значень змінних функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ як записи цілих чисел у двійковій системі числення. Це означає, що набір $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ототожнюється із записом числа

$$a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n.$$

Приймемо це число за номер набору $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Наприклад, для чотиримісної булевої функції номером набору 1011 буде число

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 8 + 2 + 1 = 11.$$

Номери наборів значень змінних n-місної булевої функції змінюються від 0 до $2^n - 1$. Розмістимо набори в стовпчик за зростанням їх номерів і запишемо відповідні значення функції на кожному з них. Одержимо *таблицю істинності* булевої функції (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

$x_1\ x_2\ \ldots\ x_{n-1}\ x_n$	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0 0 … 0 0	$f(0,0,\ldots,0,0)$
0 0 … 0 1	$f(0,0,\ldots,0,1)$
0 0 … 1 0	$f(0,0,\ldots,1,0)$
…	…
1 1 … 1 1	$f(1,1,\ldots,1,1)$

Надалі завжди будемо вважати, що набори значень булевих функцій розміщено за зростанням їх номерів. Тоді кожній функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна привласнити порядковий номер – натуральне число, двійковий код якого відповідає стовпчику значень функції у таблиці істинності. Молодшим розрядом вважається самий нижчий рядок (на інтерпретації $(1,1,\ldots,1,1)$), а старшим – самий верхній (на інтерпретації $(0,0,\ldots,0,0)$). Вказаний порядковий номер, як двійковий, так і десятковий, повністю визначає булеву функцію.

Приклад 7.1. Знайти порядковий номер функції $f(x_1, x_2)$, заданої таблицею істинності (табл. 7.2).

Таблиця 7.2

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Розв'язання. Цій функції відповідає двійковий код 1010, утворений значеннями функції на її наборах. Переведемо двійкове число 1010 у десяткове:

$$1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 0 = 8 + 2 = 10.$$

Отже, маємо булеву функцію $f_{10}(x_1, x_2)$.

Зі зростанням кількості змінних швидко збільшується кількість залежних від них булевих функцій. Наприклад, згідно із формулою (7.1) існує $2^2 = 4$ різних булевих функцій однієї змінної. Множина всіх логічних функцій однієї змінної $P_2(1)$ (унарних операцій) представлена таблицями істинності (табл. 7.3).

Таблиця 7.3

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Кожна з функцій має такі назви:

$\varphi_0(x) = 0$ – константа 0;

$\varphi_1(x) = x$ – повторення аргументу;

$\varphi_2(x) = \overline{x}$ – інверсія (заперечення) аргументу;

$\varphi_3(x) = 1$ – константа 1.

Число булевих функцій двох змінних $|P_2(2)| = 2^{2^2} = 16$; вони представлені таблицями істинності (табл. 7.4).

Таблиця 7.4

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

В цій таблиці маємо функції:

$f_0(x_1, x_2) = 0$ – константа 0;

$f_1(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$ – кон’юнкція;

$f_2(x_1, x_2) = x_1 \leftarrow x_2$ – заперечення імплікації (x_1 і не x_2);

$f_3(x_1, x_2) = x_1$ – повторення першого аргументу;

$f_4(x_1, x_2) = x_2 \leftarrow x_1$ – заперечення оберненої імплікації (не x_1 і x_2);

$f_5(x_1, x_2) = x_2$ – повторення другого аргументу;

$f_6(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ – додавання за модулем 2;

$f_7(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ – диз’юнкція;

$f_8(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ – стрілка Пірса (заперечення диз’юнкції);

$f_9(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2$ – еквівалентність;

$f_{10}(x_1, x_2) = \overline{x}_2$ – заперечення другого аргументу;

$f_{11}(x_1, x_2) = x_2 \to x_1$ – обернена імплікація;

$f_{12}(x_1, x_2) = \overline{x}_1$ – заперечення першого аргументу;

$f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$ – імплікація;

$f_{14}(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$ – штрих Шеффера (заперечення кон’юнкції);

$f_{15}(x_1, x_2) = 1$ – константа 1.

Булеві функція однієї і двох змінних називають *елементарними*. Дві булеві функції називаються *рівними*, якщо їхні таблиці істинності однакові.

Зі збільшенням кількості змінних таблиці для булевих функцій стають громіздкими, і ними незручно користуватись, наприклад, $|P_2(3)| = 2^{2^3} = 256$, а $|P_2(4)| = 2^{2^4} = 65536$.

7.3. Властивості булевих операцій.

1. *Асоціативність* : а) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$; б) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

2. *Комутативність:* а) $x \wedge y = y \wedge x$; б) $x \vee y = y \vee x$.

3. *Дистрибутивність*:

а) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$; б) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

4. *Ідемпотентність* : а) $x \wedge x = x$; б) $x \vee x = x$

5. *Закони дії з 0*: а) $x \vee 0 = x$; б) $x \wedge 0 = 0$.

6. *Закони дії з 1*: а) $x \vee 1 = 1$; б) а) $x \wedge 1 = x$.

7. *Правила де Моргана*: а) $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$; б) $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$.

8. Закон протиріччя: $x \wedge \bar{x} = 0$.

9. Закон виключеного третього: $x \wedge \bar{x} = 1$.

10. Закон інволюції: $\bar{\bar{x}} = x$.

7.4.Істотні та неістотні (фіктивні) змінні

Дамо означення істотної змінної.

Означення. Функция $f(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)$ *істотно залежить від* x_i, якщо існують такі значення $\alpha_1, ...\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ...\alpha_n$ змінних $x_1, ...x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n$, що

$f(\alpha_1, ...\alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}...\alpha_n) \neq f(\alpha_1...\alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}...\alpha_n)$.

Тоді змінна x_i називається *істотною змінною*. В протилежному випадку x_i називається *фіктивною змінною*.

Приклад 7.2.

Розглянемо декілька функцій двох змінних.

x_1	x_2	$(x_1 \& x_2)$	f_3	f_{15}
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Покажемо, що $(x_1 \& x_2)$ істотно залежить від x_1. Розглянемо набори (0,1) і (1,1), тут α_2=1, $f(0,\alpha_2)$=0 і не дорівнює $f(1,\alpha_2)$=1. Покажемо, що x_2 також істотна змінна. Розглянемо набори (1,0) і (1,1). Тут α_1=1, $f(1,0)$=0 і не дорівнює $f(1,1)$=1. Для функції $f_3(x_1,x_2)$ покажемо , що x_2 –фіктивна змінна, тобто потрібно показати, що не існує наборів $(\alpha_1,0)$ і $(\alpha_1,1)$ таких, що $f_3(\alpha_1,0) \neq f_3(\alpha_1,1)$. Нехай α_1=0, тобто розглянемо набори (0,0) і (0,1), $f(0,0)=f(0,1)=0$. Нехай α_1=1, але $f(1,0)=f(1,1)=1$.

Для функції f_{15} і x_1 і x_2 є фіктивними змінними. x_1 – фіктивна змінна, якщо не існує наборів $(0,\alpha_2)$ і $(1,\alpha_2)$, таких, що $f(0,\alpha_2)\neq f(1,\alpha_2)$. Якщо $\alpha_2=0$, то $f(0,0)=f(1,0)=1$. Нехай $\alpha_2=1$, тоді $f(0,1)=f(1,1)=1$.

Нехай x_i є фіктивною змінною для функції $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$. Тоді її можна вилучити з таблиці истинності, викреслюючи всі рядки виду: $(\alpha_1, ...\alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ...\alpha_n)$ або, навпаки, всі рядки виду: $(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ...\alpha_n)$ і стовпчик для змінної x_i. При цьому отримаємо таблицю для деякої функції $g(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n)$. Будемо говорити, що функція $g(x_1, ...x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n)$ отримана з функції $f(x_1, ..., x_\mathrm{i}, ...x_n)$ шляхом вилучення фіктивної змінної x_i або f отримана з g шляхом введення фіктивної змінної x_i.

Означення. Функції f_1 і f_2 називаються *рівними*, якщо f_2 можна отримати з f_1 шляхом додавання або вилучення фіктивної змінної.

Приклад 7.3.

x_1	x_2	f_3
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Викреслили рядки типу $(\alpha,1)$, тобто (0,1) і (1,1) і стовпчик для x_2.

Отримали $f_3(x_1\ x_2) = g(x_1) = x_1$.

Приклад 7.4.

x_1	x_2	g
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Нехай функція $g(x_1\ x_2)$ задана таблицею і істотно залежить від обох змінних. Побудуємо функцію $f(x_1,x_2,x_3)$, яка отримується з $g(x_1,x_2)$ введенням фіктивної зменної x_3:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

До наборів (x_1,x_2) ми додамо $x_3=0$, отримаємо набори виду: $(\alpha_1,\alpha_2,0)$, на цих наборах функцію f покладемо равною $g(\alpha_1,\alpha_2)$, потім додамо набори виду $(\alpha_1,\alpha_2,1)$, функцію $f(\alpha_1,\alpha_2,1)$ покладемо равною $g(\alpha_1,\alpha_2)$.

Особливу роль відіграють константи 0 і 1, які не мають істотних змінних і які можна розглядати як функції від порожньої множини змінннних.