Лекція 8. **Нормальні форми булевих функцій**

ПЛАН

1. *Еквівалентні перетворення в булевій алгебрі.*
2. *Теорема про разкладання функції за змінними*
3. *Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ*
4. *Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ)*
5. *Принцип і закон двоїстості*

8. 1. Еквівалентні перетворення в булевій алгебрі.

Еквівалентні перетворення є потужним засобом доведення еквівалентності формул. Поряд із основними законами мулевої алгебри для спрощення формул часто використовуються наступні еквівалентні співвідношення.

1. *Закони склеювання*:

а) $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x$; б) $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x$.

2. *Закони поглинання:*

а) $x \vee (x \wedge y) = x$; б) $x \wedge (x \vee y) = x$.

Крім того, при спрощенні формул користуються ще такими еквівалентними співвідношеннями:

1. $(x \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y) = (x \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z})$.
2. $x \vee (\bar{x} \wedge y) = x \vee y$.
3. $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$.
4. $x \oplus y = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$.
5. $x \leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$.
6. $x \leftrightarrow y = \overline{x \oplus y}$.
7. $x | y = \bar{x} \vee \bar{y}$.
8. $x \downarrow y = \bar{x} \cdot \bar{y}$

Приклад 8.1. Спростимо формули:

1. $x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 = x_3(x_2 \vee x_1\bar{x}_2) = x_3((x_2 \vee x_1)\&(x_2 \vee \bar{x}_2)) = (x_1 \vee x_2)x_3.$

2. $x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 = x_1 \vee \bar{x}_1(x_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4) =$

$x_1 \vee \bar{x}_1(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4) = (x_1 \vee \bar{x}_1)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4) = x_1 \vee (x_2 \vee x_3) \vee (\overline{x_2 \vee x_3})x_4 =$

$x_1 \vee (x_2 \vee x_3 \vee (\overline{x_2 \vee x_3}))(x_2 \vee x_3 \vee x_4) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4.$

8.2. Теорема про разкладання функції за змінними

Позначимо $x^{\sigma} = \begin{cases} \bar{x}, \sigma = 0, \\ x, \sigma = 1. \end{cases}$

Розглянемо, чому дорівнює x^{σ} при різних значеннях x і σ.

$x \backslash \sigma$	0	1
0	1	0
1	0	1

З таблиці випливає: $x^{\sigma}=1$ тоді и тільки тоді, коли $x=\sigma$.

Теорема 8.1.*(про разкладання функції за змінними)*

Нехай $f(x_1, ..., x_n) \in P_2$. Тоді для будь якого m: $1 \le m \le n$ справедливе представлення:

$$f(x_1,...,x_m,x_{m+1},...,x_n)= \bigvee_{(\sigma_1,...,\sigma_m)} x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& ... \& x_m^{\sigma_m} \& f(\sigma_1,...,\sigma_m,x_{m+1},...,x_n),$$

де диз'юнкція береться по всіх наборах з 0 і 1, яке називається разкладанням функції f за змінними $x_1, ..., x_n$.

Перш ніж доводити твердження, розглянемо приклади.

Приклад 8.2. При $m = 1$ запишемо разкладання за змінною x:

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigvee_{\sigma_1} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1, x_2,...,x_n) = \bar{x}_1 f(0, x_2, ..., x_n) \vee x_1 f(1, x_2, ..., x_n). \quad (8.1)$$

Приклад 8.3. При $m=2$ запишемо разкладання за змінними x і $\bar{x}$:

$$f(x_1,x_2,...x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2)} x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& f(\sigma_1,\sigma_2,x_3,...,x_n) =$$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 f(0,0) \vee \bar{x}_1 x_2 f(0,1) \vee x_1 \bar{x}_2 f(1,0) \vee x_1 x_2 f(1,1) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2): f(\sigma_1\sigma_2)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}.$$

Якщо $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$, то остання формула дає $x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$.

Доведення. Для доведення візьмемо довільний набір $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ і покажемо, що ліва і права частини формули (8.1) приймають на цьому наборі однакові значення. Зліва маємо $f(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Справа : $\bigvee_{(\sigma_1 ... \sigma_m)} \alpha_1^{\sigma_1} \alpha_2^{\sigma_2} ... \alpha_m^{\sigma_m} f(\sigma_1, ..., \sigma_m, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_n)$.

Диз'юнкція береться по всеможливих наборах $(\sigma_1, ..., \sigma_m)$. Якщо в цих наборах хоча б одне $\sigma_i \neq \alpha_i$ $(1 \leq i \leq m)$, то $\alpha_i^{\sigma_i} = 0$ і $\alpha_1^{\sigma_1} \alpha_2^{\sigma_2} ... \alpha_m^{\sigma_m} f = 0$, отже, ненульовий член буде лише на наборі $(\sigma_1, ..., \sigma_m) = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, тоді $\alpha_1^{\sigma_1} \alpha_2^{\sigma_2} ... \alpha_m^{\sigma_m} f(\sigma_1, ..., \sigma_m, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_n) = \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} ... \alpha_m^{\alpha_m} f(\alpha_1, ..., \alpha_n) = f(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

8.3. Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ).

Елементарною кон'юнкцією називають вираз k , який містить кон'юнкції різних змінних або їх інверсій. Число r змінних в елементарній кон'юнкції називають *рангом* кон'юнкції. Елементарну кон'юнкцію, яка містить усі змінні функції називають *конституентою одиниці*. Інакше кажучи, копституента одиниці – це елементарна кон'юнкція з рангом n.

Диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ) називають диз'юнкцію

$$D = k_1 \vee k_2 \vee \cdots \vee k_s$$

Різних елементарних кон'юнкцій.

З теореми 8.1 отримуємо наступний висновок.

Наслідок 8.1. Будь яку функцію $f(x_1, ..., x_n)$, що не дорівнює тотожньо нулю, можна представити в вигляді:

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigvee_{(\sigma_1 ... \sigma_n): f(\sigma_1 ... \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} ... x_n^{\sigma_n},$$

причому єдиним способом. Цей вигляд називається *досконалою диз'юнктивною нормальною формою* функції $f(x_1, ..., x_n)$ і записується *ДДНФ.*

Доведення. Існування ДДНФ для функції, що не дорівнює тотожньо нулю, випливає з попередньої теореми. Покажемо, що ця ДДНФ єдина. Справді, є $2^{2^n} - 1$ n-містних функцій, що не дорівнюють нулю тотожньо. Знайдемо число різних ДДНФ від n змінних. Нехай C_n^k означає число комбінацій з n елементів по k. Тоді число одночленних ДДНФ $x_1^{\sigma_1} ... x_n^{\sigma_n}$ дорівнює $C_{2^n}^1$. Число k-членних

ДДНФ дорівнює $C_{2^n}^k$. Число n-членних ДДНФ дорівнює $C_{2^n}^n$. Число всіх різних ДДНФ $C_{2^n}^1 + C_{2^n}^2 + \ldots + C_{2^n}^k + \ldots + C_{2^n}^n = 2^{2^n} - 1$.

Отже, $2^{2^n} - 1$ функцій реалізуються за допомогою $2^{2^n} - 1$ ДДНФ, тобто кожній функції відповідає єдина ДДНФ.

Зауваження. $x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}$ – элементарна кон'юнкція рангу n за числом змінних, що входять до неї.Отже, ДДНФ для $f(x_1, ..., x_n)$ – це диз'юнкція елементарних кон'юнкцій рангу n. Якщо функція представлена в вигляді диз'юнкцій элементарних кон'юнкцій, де ранг хоча б однієї елементарної кон'юнкції менше n, то така форма називається *диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ).*

Наслідок 8.2. Будь яка функція алгебри логіки може бути представлена у вигляді формули через заперечення, & і $\vee$.

а) Якщо $f \equiv 0$, то $f(x_1, ..., x_n) = x_1 \& \bar{x}_1$.

б)Якшо $f(x_1, ..., x_n) \neq 0$ тотожньо, то її можна представити в вигляді ДДНФ, де використовуються лише зв'язки $\bar{\ }$, &, $\vee$. ДДНФ дає алгоритм представлення функції в вигляді формули через &, $\vee$, $\bar{\ }$.

Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна представити у вигляді досконалої диз'юнктивної нормальної форми (ДДНФ) . Це можна зробити або шляхом еквівалентних перетворень, або одержати із таблиці істинності функції.

Алгоритм переходу від таблиці істинності до ДДНФ:

1) в таблиці виділяються набори значень змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, на яких значення функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнює одиниці;

2) для кожного відзначеного набору виписуються кон'юнкції всіх змінних: над тими змінними, які на цьому наборі дорівнюють 0, ставляться заперечення;

3) всі отримані кон'юнкції з'єднуються операцією диз'юнкції.

Приклад 8.4. Нехай функцію $f(x_1, x_2, x_3)$ задано таблицею істинності. Запишемо її у вигляді ДДНФ. Наборів, на яких функція дорівнює 1, є три: (0, 1, 0), (1, 0, 0) і (1, 1, 1), тому

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^0 \& x_2^1 \& x_3^0 \vee x_1^1 \& x_2^0 \& x_3^0 \vee x_1^1 \& x_2^1 \& x_3^1 = \overline{x_1} \& x_2 \& \overline{x_3} \vee x_1 \& \overline{x_2} \& \overline{x_3} \vee x_1 \& x_2 \& x_3.$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

8.4. Кон’юнктивна нормальна форма (КНФ).

Елементарною диз'юнкцією називають вираз d , який утворений диз’юнкціями різних змінних або їх інверсій.

Кон'юнктивною нормальною формою (КНФ) називають кон'юнкцію

$$K = d_1 \vee d_2 \vee \cdots \vee d_s$$

різних елементарних диз'юнкцій d_j. Елементарну диз'юнкцію, яка містить усі можливі змінні називають *конституентою нуля*. Інакше кажучи, конституента нуля — це елементарна диз'юнкція з рангом n.

Є алгоритм, який дає змогу для будь-якої формули булевої алгебри знайти рівносильну до неї КНФ.

Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) називають КНФ, у якій кожна елементарна диз'юнкція d_j (j = 1, ..., s) — конституента нуля.

З теореми 8.1 отримуємо ще один важливий висновок.

Наслідок 8.3. Ми вміємо представляти функцію в вигляді $\vee(x_1^{\sigma_1}\ \&\ x_2^{\sigma_2}\ \&\ldots)$. Чи не можна її представити в вигляді $\&(x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots)$. Нехай функція $f(x_1, ..., x_n) \neq 1$ тотожньо. Тоді функція $f^* \neq 0$ тотожньо, і її можна представити в вигляді ДДНФ:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = (f^*(x_1,\ldots,x_n))^* = (\bigvee_{(\sigma_1\ldots\sigma_n):f^*(\sigma_1\ldots\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n})^*.$$

За принципом двоїстості замінимо & на $\vee$ і навпаки, отримаємо

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n) &= \underset{(\sigma_1\ldots\sigma_n):\bar f(\bar\sigma_1\ldots\bar\sigma_n)=1}{\&} (x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}) = \\ &= \underset{(\sigma_1\ldots\sigma_n):f(\bar\sigma_1\ldots\bar\sigma_n)=0}{\&} (x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}) = \underset{(\sigma_1\ldots\sigma_n):f(\sigma_1\ldots\sigma_n)=0}{\&} (x_1^{\bar\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\bar\sigma_n}). \end{aligned} \quad (8.2)$$

$(x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n})$ називаєтся елементарною диз'юнкцією рангу n. Представлення функції в вигляді (8.2) називається довершеною кон'юнктивною нормальною формою. Отже, ДКНФ для $f(x_1, ..., x_n)$ – кон'юнкція елементарних диз'юнкцій рангу n. КНФ для $f(x_1, ..., x_n)$ – кон'юнкція елементарних диз'юнкцій, де ранг хоча б однієї елементарної диз'юнкції менше n.

Алгоритм переходу від таблиці істинності до ДКНФ:

1) в таблиці виділяються набори значень змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, на яких значення функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнює нулю;

2) для кожного відзначеного набору виписуються диз'юнкції всіх змінних: над тими змінними, які на цьому наборі дорівнюють 1, ставляться заперечення;

3) всі отримані диз'юнкції з'єднуються операцією кон'юнкції.

Приклад 8.5. Нехай $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow (x_3 \sim x_1))$. Представимо її у вигляді ДКНФ, для цього побудуємо таблицю істинності.

x_1	x_2	x_3	$x_3 \sim x_1$	$x_2 \rightarrow (x_3 \sim x_1)$	f
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1

1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Функція рівна нулю лише на наборі (1, 1, 0), тому

$f(x_1\, x_2\, x_3)=x_1^{\bar{1}} \vee x_2^{\bar{1}} \vee x_3^{\bar{0}} = x_1^0 \vee x_2^0 \vee x_3^1 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3.$

8.5. Двоїсті та самодвоїсті функції

Функція $f^*(x_1, ..., x_n)$ називається *двоїстостою* до функції $f(x_1, ..., x_n)$, якщо $f^*(x_1, ..., x_n) = \overline{f}\,(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$.

Приклад 8.6. Покажемо за допомогою таблиці істинності, що константа 0 двоїста до 1:

x	f	f^*
0	0	1
1	0	1

Функції $f(x) = x$ і $g(x) = \bar{x}$ двоїсті самі до себе:

x	f	f^*	g	g^*
0	0	0	1	1
1	1	1	0	0

оскільки $f^*(0)=\overline{f}\,(1)$.

Якщо $f^*(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n)$, то $f(x_1, ..., x_n)$ називається *самодвоїстою*.

Приклад 8. 6. Покажемо, що $f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ – самодвоїста

x_1	x_2	x_2	f	f^*
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0

1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Якщо f^*– самодвоїста, то $\overline{f}(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) = f(x_1, ..., x_n)$, тобто на протилежних наборах функція приймає протилежні значення.

Приклад 8.7. Покажемо, що функція $x_1 \vee x_2$ двоїста до $x_1 \& x_2$, функція $x_1 \downarrow x_2$ двоїста до функції $x_1 | x_2$.

x_1 x_2	$f=x_1 \vee x_2$	f^*	$g=x_1 \vert x_2$	$g^*=x_1 \downarrow x_2$
0 0	0	0	1	1
0 1	1	0	1	0
1 0	1	0	1	0
1 1	1	1	0	0

Припустимо, що функція задана формулою. Чи можна знайти за цією формулою двоїсту функцію? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 8.2.(*Принцип двоїстості***).** Нехай функція $h(x_1, ..., x_n)$ реализована формулою $h(x_1, ..., x_n) = g(G_1, ..., G_m) = g(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$, де деякі змінні можуть бути фіктивними. Тоді $h^*(x_1, ..., x_n) = g^*(f_1^*(x_1, ..., x_n), ..., f_m^*(x_1, \ldots, x_n))$, це означає, що якщо функція задана деякою формулою, то щоб отримати двоїсту функцію, потрібно в цій формулі всі знаки функцій замінити на двоїсті, 0 на 1, 1 на 0.

Якщо функція $h(x_1, ..., x_n)$ реалізується формулою $N[f_1, ..., f_n]$, то формулу, отриману з N заміною f_i, що входять в неї, на f_i^* і які реалізують функцію $h^*(x_1, ..., x_n)$, будемо називати двоїстою і позначати $N^*(x_1, ..., x_n)$.

Приклад 8.8. Побудувати формулу, що реалізує f^*, якщо

$f = ((x \to y) \vee z)\ (y\bar{z} \to (x \oplus yz))$. Покажемо, що вона еквівалентна формулі

$N = z(x \oplus y)$.

Найдемо $(x \oplus y)^*$ і $(x \to y)^*$.

x y	$x\oplus y$	$(x\oplus y)^*$	$x \to y$	$(x\to y)^*$
0 0	0	1	1	0
0 1	1	0	1	1
1 0	1	0	0	0
1 1	0	1	1	0

Із таблиці видно, що

$(x\oplus y)^* = x \sim y = \overline{x\oplus y} = x\oplus y\oplus 1, \quad x\oplus y = \bar{x}\,y\oplus x\,\bar{y}$,

$(x\to y)^* = \bar{x}\,y \quad x\to y = \bar{x} \vee y$.

За принципом двоїстості маємо:

$f^* = \bar{x}\,yz\vee(\overline{y\vee\bar{z}}\,(x\oplus(y\vee z)\oplus 1)) = \bar{x}\,yz\vee\bar{y}\,z(x\oplus(y\vee z)\oplus 1) = z(\bar{x}\,y\vee(\bar{y}\,x\oplus\bar{y}\,z\oplus\bar{y}\,))$

$= z(\bar{x}\,y\vee\bar{y}\,(x\oplus z\oplus 1)) = z(\bar{x}\,y\vee\bar{y}\,(x\oplus\bar{z}\,)) = z\,\bar{x}\,y\vee(z\,\bar{y}\,x\oplus z\,\bar{y}\,\bar{z}\,) = z(\bar{x}\,y\vee x\,\bar{y}\,) = z(x\oplus y)$.

Тоді $f = (f^*)^* = [z(x\oplus y)]^* = z\vee(x\sim y)$.

Приклад 8.9. Знайти формулу для f^* і показати, що вона еквівалентна формулі $N = (x\vee(z\oplus t))\,\bar{y}$, якщо $f = (xyz\sim(t\vee x\,\bar{y}\,))\vee\bar{y}\,t$.

$f^*=((x\vee y\vee z)\oplus t(\bar{x}\vee y))(\bar{y}\vee t) = (\overline{x\vee y\vee z}\,t(\bar{x}\vee y)\vee(x\vee y\vee z)\,\overline{t(\bar{x}\vee y)}\,)(\bar{y}\vee t)=$

$= (\bar{x}\;\bar{y}\;\bar{z}\,t\vee(x\vee y\vee z)(\bar{t}\vee x\,\bar{y}\,))(\bar{y}\vee t) = \bar{x}\;\bar{y}\;\bar{z}\,t\vee(x\vee y\vee z)(\bar{t}\;\bar{y}\vee x\,\bar{y}\vee tx\,\bar{y}\,) =$

$= \bar{x}\;\bar{y}\;\bar{z}\,t\vee(x\vee y\vee z)(\bar{t}\;\bar{y}\vee x\,\bar{y}\,) = \bar{y}\;(\bar{t}\,x\vee\bar{z}\,t\vee\bar{t}\,z\vee x\vee xz) = \bar{y}\,(\bar{z}\,t\vee x\vee\bar{t}\,z\vee xz)$

$= \bar{y}\,(x\vee(z\oplus t))$.