

## Лекція 9. Методи мінімізації булевих функцій.

### ПЛАН

1. Основні поняття мінімізації функцій.
2. Алгоритм Квайна побудови скороченої ДНФ.
3. Метод Блейка побудови скороченої ДНФ.
4. Основні поняття другого етапу мінімізації.
5. Другий етап мінімізації.
6. Мінімізація булевих функцій графічним методом

#### 9.1. Основні поняття мінімізації функцій

Мінімальною ДНФ функції  $f(x_1, \dots, x_n)$  називається ДНФ, що реалізує функцію  $f$  і містить мінімальне число символів змінних в порівнянні з всіма іншими видами ДНФ, що реалізують функцію  $f$ .

Якщо для будь якого набору  $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$  значень змінних умова  $g(\tilde{a})=1$  тягне  $f(\tilde{a})=1$ , то функція  $g$  називається *частиною функції  $f$*  (або функція  $f$  *покриває функцію  $g$* ). Якщо при цьому для деякого набору  $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_n)$  функція  $g(\tilde{c})=1$ , то кажуть, що функція  $g$  *покриває одиницю* функції  $f$  на наборі  $\tilde{c}$  (або що  $g$  *покриває конституенту одиниці  $x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n}$  функції  $f$* ). Зауважимо, що конституента одиниці функції  $f$  є частиною функції  $f$ , що накриває єдину одиницю функції  $f$ .

Елементарна кон'юнкція  $K$  називається *імплікантою* функції  $f$ , якщо для будь якого набору  $\tilde{a}=(a_1, \dots, a_n)$  із 0 і 1 умова  $K(\tilde{a})=1$  тягне  $f(\tilde{a})=1$ .

Імпліканта  $K$  функції  $f$  називається *простою*, якщо вираз, отриманий з неї відкиданням будь яких множників, вже не буде імплікантою функції  $f$ .

Очевидно, що будь яка імпліканта функції  $f$  є частина функції  $f$ .

**Теорема 9.1.** Будь яка функція реалізується диз'юнкцією всіх своїх простих імплікант .

*Доведення.* Нехай  $f(x_1, \dots, x_n)$  є функція, а  $A = K_1 \vee \dots \vee K_m$  – диз'юнкція всіх її простих імплікант. Нехай  $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$  – довільний набір довжини  $n$  з 0 і 1.

Якщо  $A(\tilde{a}) = 1$ , то знайдеться диз'юнктивний доданок  $K_i(\tilde{a}) = 1$ , що тягне  $f(\tilde{a}) = 1$ , бо  $K_i$  є імплікантою функції  $f$ .

Якщо  $f(\tilde{a}) = 1$ , то в ДДНФ для функції  $f$  знайдеться елементарна кон'юнкція  $K$ , що дорівнює на цьому наборі одиниці. Одна з простих імплікант  $K_j$  функції  $f$  отримується відкиданням деяких множників з  $K$  і тому  $K_j(\tilde{a}) = 1$ , а тоді  $A(\tilde{a}) = 1$ .

Отже,  $f = A$ . Теорему доведено.

*Скорочена ДНФ* функції  $f \in$  диз'юнкція всіх простих імплікант функції  $f$ . Будь яка функція  $f$  реалізується своєю скороченою ДНФ. Для будь-якої функції, що не дорівнює тотожньо нулю, існує єдина скорочена ДНФ.

Нехай  $A$  і  $B$  – довільні формули. Із властивостей булевих операцій впливають наступні оборотні правила перетворення ДНФ:

- 1)  $A \cdot B \vee A \cdot \bar{B} = A$  – повне склеювання (розгортання);
- 2)  $A \cdot B \vee A \cdot \bar{B} = A \vee A \cdot B \vee A \cdot \bar{B}$  – неповне склеювання;
- 3)  $XA \vee \bar{X}B = XA \vee \bar{X}B \vee AB$  – узагальнене склеювання;
- 4)  $A \vee A \cdot B = A$  – поглинання;
- 5)  $A \vee A = A$ ;  $A \wedge A = A$  – ідемпотентність.

## **9.2 Алгоритм Квайна побудови скороченої ДНФ.**

**Теорема 9.2.** (Квайна). Якщо в ДДНФ функції  $f$  провести всі операції неповного склеювання, а потім всі операції поглинання і вилучення членів, що повторюються, то в результаті буде отримано скорочену ДНФ функції  $f$ .

*Доведення.* Нехай маємо скорочену ДНФ функції  $f$ . Проведемо всі операції розгортання до кожної простої імпліканти для отримання змінних, що не вистачає в кожному диз'юнктивному доданку скороченої ДНФ. В отриманому виразі з декількох однакових диз'юнктивних доданків лишимо лише по одному екземпляру. В результаті отримаємо ДДНФ функції  $f$ . Тепер, виходячи з отриманої ДДНФ, в оберненому порядку проведемо операції додавання однакових диз'юнктивних доданків (за допомогою правил ідемпотентності, неповного склеювання і поглинання). В результаті отримаємо вихідну скорочену ДНФ.

Отже, алгоритм Квайна побудови скороченої ДНФ зводиться до таких

кроків:

1. Отримати ДДНФ функції  $f$ .
2. Провести всі операції неповного склеювання.
3. Провести всі операції поглинання.

**Приклад 9.1.** а) Шляхом елементарних перетворень звести формулу  $x \leftrightarrow ((z|y) \rightarrow x)$  до ДДНФ. б) Методом Квайна знайти скорочену ДНФ.

*Розв'язання.* а)  $x \leftrightarrow ((z|y) \rightarrow x) = x \leftrightarrow (\overline{zy} \rightarrow x) = x \leftrightarrow (\overline{\overline{zy}} \vee x) =$   
 $= x \leftrightarrow (zy \vee x) = \overline{x}(\overline{yz \vee x}) \vee x(yz \vee x) = \overline{x}(\overline{y} \vee \overline{z})\overline{x} \vee xyz \vee x = \overline{x}\overline{y} \vee \overline{x}\overline{z} \vee xyz \vee x =$   
 $= \overline{x}\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee xyz \vee xy \vee x\overline{y} =$   
 $= \overline{x}\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee xyz \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}\overline{z} \vee x\overline{y}\overline{z} =$   
 $= \overline{x}\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}\overline{z} \vee x\overline{y}\overline{z} = A.$  Отримано ДДНФ.

б)  $A = \overline{x}\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}\overline{z} \vee x\overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}\overline{y} \vee$   
 $\vee \overline{x}\overline{z} \vee \overline{y}\overline{z} \vee y\overline{z} \vee xy \vee xz \vee x\overline{y} \vee \overline{y} \vee \overline{z} = xy \vee xz \vee \overline{y} \vee \overline{z}.$

Отже, знайдено скорочену ДНФ.

### 9.3. Метод Блейка побудови скороченої ДНФ

*Метод Блейка* для побудови скороченої ДНФ з довільної ДНФ полягає в застосуванні правил узагальненого склеювання і поглинання. Мається на увазі, що правила застосовуються зліва направо. На першому кроці проводиться операція узагальненого склеювання до тих пір, поки це можливо. На другому – проводиться операція поглинання.

**Приклад 9.2.** Побудувати скорочену ДНФ за ДНФ  $D$  функції  $f(x,y,z)$ , де  $D = xy \vee \overline{xz} \vee \overline{yz}$ .

*Розв'язання.* Після першого етапу отримуємо:

$$D_1 = xy \vee \overline{xz} \vee \overline{yz} \vee yz \vee xz \vee z.$$

Внаслідок другого етапу отримуємо скорочену ДНФ:  $D_f^c = D_2 = xy \vee z.$

### 9.4. Основні поняття другого етапу мінімізації.

Здебільшого скорочена ДНФ функції  $f$  є більш економним зображенням, ніж ДДНФ даної функції. Проте і тут можливі подальші

спрощення, оскільки деякі прості імпліканти можуть накривати лише одиниці, які вже накриті іншими імплікантами. Виключення з повної системи простих імплікант, що мають цю властивість, не позначиться на повноті одержаної таким чином системи.

Якщо  $S$  являє собою повну систему простих імплікант функції  $f$  і жодна її підсистема вже не має властивості повноти, то диз'юнкція всіх простих імплікант, що утворюють систему  $S$ , називається *тупиковою ДНФ функції  $f$* . Булева функція може мати декілька тупикових ДНФ.

**Теорема 9.3.** *Всяка мінімальна ДНФ функції  $f$  є одночасно і тупиковою ДНФ даної функції.*

*Доведення.* Для доведення досить показати, що кожна елементарна кон'юнкція, яка входить до мінімальної ДНФ функції  $f$ , є простою імплікантою даної функції.

Нехай  $M_f$  – мінімальна ДНФ функції  $f$ . Припустимо, що існує хоча б одна елементарна кон'юнкція  $P$ , яка входить до  $M_f$  і не являє собою просту імпліканту функції  $f$ . З визначення диз'юнкції безпосередньо випливає, що  $P$  є імплікантою функції  $f$ .

Оскільки  $P$  не являє собою просту імпліканту функції  $f$ , то знайдеться елементарна кон'юнкція  $g$ , складена з частини кон'юнктивних членів (букв)  $P$ , що також буде імплікантою функції  $f$ .

Але, як відомо, при зменшенні довжини елементарної кон'юнкції множина одиниць, які вона накриває, розширюється, а це значить, що імпліканта  $g$  набуває значення одиниці на всіх наборах, на яких була рівною 1 імпліканта  $P$ . Замінивши в  $M_f$  імпліканту  $P$  імплікантою  $g$ , одержимо ДНФ  $M_1$ , яка зображує функцію  $f$  і містить менше букв, ніж  $M_f$ , що суперечить мінімальності  $M_f$ . Теорему доведено.

Слід відзначити, що існують функції, які мають декілька мінімальних ДНФ.

Таким чином, загальна схема побудови ДНФ булевих функція

складається з двох етапів: побудови скороченої ДНФ функції  $f$  та побудови тупикових ДНФ даної функції, з яких вибираються мінімальні.

### 9.5. Другий етап мінімізації

На другому етапі мінімізації широко використовується так звана імплікантна матриця Квайна, яка являє собою прямокутну таблицю. Рядки матриці позначаються різними простими імплікантами функції  $f$  а стовпчики – конститuentами 1, що відповідають двійковим наборам, на яких функція перетворюється в одиницю.

Імплікантна матриця заповнюється за таким правилом. На перетині  $p$ -го рядка і  $k$ -го стовпчика тільки тоді ставиться зірочка (\*), коли імпліканта  $B$ , яка позначає  $p$ -й рядок, становить деяку частитну конститuentи  $K$ , що відповідає  $k$ -му стовпчику. У цьому випадку кажуть, що імпліканта  $B$  накриває конститuentу  $K$ .

Побудова тупикових ДНФ може бути проведена безпосередньо за імплікантною матрицею. Для цього необхідно вибрати мінімальні системи рядків таким чином, щоб для кожного стовпчика серед вибраних рядків знайшлась хоча б одна зірочка, яка міститься у цьому стовпчику. До будь-якої такої системи повинні входити всі рядки, в яких міститься хоча б одна зірочка, єдина у своєму стовпчику. Імпліканти, що позначають рядки з вказаною властивістю, складають *ядро* булевої функції. Імпліканти ядра можуть накривати лише частину конститuent одиниці імплікантної матриці. Виключаючи з імплікантної матриці стовпчики, які мають зірочки на перетині з рядками, позначеними імплікантами ядра, методом перебору можна знайти мінімальні системи імплікант, що накривають інші конститuentи.

**Приклад 9.3.** За допомогою імплікантної таблиці знайти мінімальну ДНФ функції  $x \leftrightarrow ((z|y) \rightarrow x)$ .

*Розв'язання.* Раніше було знайдено ДДНФ цієї функції:

$$\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z},$$

а також було знайдено скорочену ДНФ:  $x\bar{y} \vee xz \vee \bar{y} \vee \bar{z}$

На другому етапі мінімізації будемо імплікантну таблицю :

	$\vee$	$\vee$	$\vee$		$\vee$	$\vee$	$\vee$
	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}y\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$xyz$	$x\bar{y}z$	$\bar{x}y\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$
$xy$				*	*		
$xz$				*		*	
$\bar{y}$	[*]	*				*	*
$\bar{z}$		*	[*]		*		*

Бачимо, що  $\bar{y} \vee \bar{z}$  є ядром мінімальної ДНФ, маємо один стовпець, який містить конституенту  $xyz$ , яка не покривається ядром.

Щоб покрити конституенту  $xyz$  достатньо взяти імпліканту  $xy$  або  $xz$ . Отже маємо дві мінімальні форми:  $xy \vee \bar{y} \vee \bar{z}$  і  $xz \vee \bar{y} \vee \bar{z}$ .

### 9.6. Мінімізація булевих функцій графічним методом

Одним з можливих способів графічного представлення логічної функції від невеликого числа змінних є *карти Карно (діаграми Вейча)*. Карта Карно є не що інше, як форма таблиці істинності для визначення булевої функції. Кожна клітина карти задається своїм набором значень змінних, причому в клітинах, відповідних конституент одиниці даної функції, ставиться одиниця, тоді як інші клітини залишаються порожніми. Карта Карно влаштована так, що набори, що визначають будь-які дві сусідні клітини, розрізняються в точності в одній позиції (тобто розрізняються значеннями рівно однієї компоненти), причому клітини (одного і того ж рядка або одного і того ж стовпчика), що примикають до протилежних сторін прямокутника, також є сусідніми в тільки що визначеному сенсі. Це можна уявити собі так, що карта "закручується" "в циліндр" по обох напрямках, тобто в "тор".

Для булевих функцій від трьох змінних вигляд карт Карно, що представляють собою прямокутні таблиці, показано на рис. 6.7, а для функції від чотирьох змінних – на рис. 6.8. На рис. 6.7 рядки відзначені наборами значень змінного  $x_1$ , а стовпці –  $x_2, x_3$ , а на рис. 6.8 рядки – наборами значень змінних  $x_1, x_2$ , а стовпці –  $x_3, x_4$ .

$x_2 x_3$ \ $x_1$	00	01	11	10
0				
1				

**Рис. 6.7**

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

**Рис. 6.8**

З геометричної точки зору карта Карно це спосіб зображення булевого куба (розмірності 3 і 4). Будь-яка пара сусідніх клітин (з урахуванням "закрученості" карти) визначає деяке ребро булевого куба, а будь-який прямокутник, що складається з  $2^k$  клітин (або, як кажуть, прямокутник з площею  $2^k$ ) Для деякого  $k$ , Визначає межу розмірності  $k$ .

Нехай булева функція  $f$  задана таблицею, представленої у формі карти Карно. Описаний вище ітераційний процес склеювання, в результаті якого виходить скорочена ДНФ, що представляє функцію  $f$ , проводиться на карті Карно так: будь-які дві сусідні клітини, що містять одиниці, обводяться, і "поглинаючий" їх прямокутник (він і є позначення результату склеювання на карті) представляється словом, що містить "0", "1" і "x" ("хрестик"), причому "хрестик" займає позицію тієї змінної, за якою проведено склеювання (рис. 6.9).

$x_2 x_3$ \ $x_1$	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

$1 \times 1$ 
 $x11$ 
 $11x$

**Рис. 6.9**

З геометричної точки зору такий прямокутник площі 2 відповідає ребру булевого куба, в кожній вершині якого функція приймає значення 1. Запис прямокутника у вигляді слова можна розуміти як позначення відповідного

ребра. Так, на карті, показаної на рис. 6.9, прямокутник  $11 \times$  позначає ребро  $[110,111]$ , прямокутники ж  $1 \times 1$  і  $\times 11$  - ребра  $[101,111]$  і  $[011,111]$  відповідно.

За таких позначень легко отримати і ту імпліканту, яка є результатом простого склеювання: для цього достатньо записати літерал  $x_i$  (відповідно  $\bar{x}_i$ ), Якщо в  $i$ -й позиції стоїть 1 (відповідно 0), і пропустити літерал  $x_i$ , якщо в  $i$ -й позиції стоїть "хрестик". Так, за словом  $1 \times 0$  отримаємо імпліканту  $x_1 \bar{x}_3$ .

Наявність на карті Карно двох прямокутників площі 2, що знаходяться в сусідніх стовпцях або рядках, показує, що функція приймає значення 1 на деякій парі сусідніх ребер, тобто на деякій грані розмірності 2. Тоді вони можуть бути об'єднані в один великий прямокутник площі 4 (рис. 6.10).

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0	1	1		
1	1	1		

$\times 00$      $\times 0x$      $\times 01$

**Рис. 6.10**

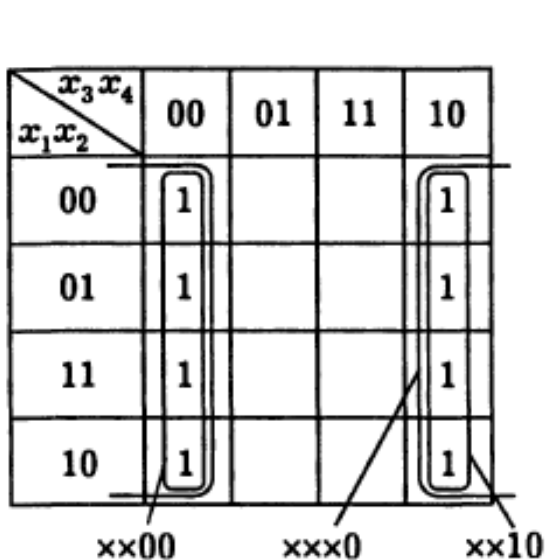
Цей прямокутник можна записати у вигляді слова  $\times 0 \times$ , показуючи тим самим, що відповідна грань (розмірності 2) утворена будь-який з двох пар сусідніх ребер:  $(\times 00, \times 01)$  (два вертикальних прямокутника площі 2) або  $(00 \times, 10 \times)$  (два горизонтальних прямокутника площі 2).

Точно так само можна об'єднувати в один прямокутник площі 8 два сусідніх прямокутника площі 4 (рис. 6.11).

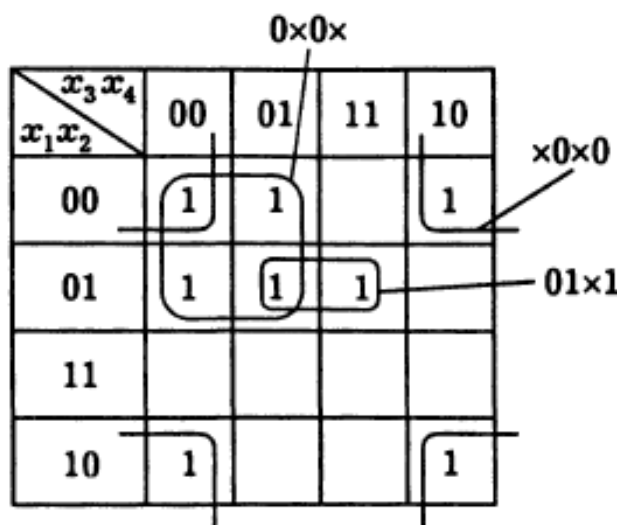
*Зауваження.* Якщо такі великі прямокутники знаходити відразу, то "поглинуті" ними менші прямокутники вже не розглядаються. Тим самим, знаходячи на карті Карно прямокутники максимальної площі і водночас не містяться один в одному, ми знаходимо межі максимальних розмірностей і

максимальні по включенню, такі, на яких задана функція приймає одиничне значення.

Оскільки грань розмірності  $k$  має вершин  $2^k$ , то виділені описаним способом прямокутники можуть складатися тільки з  $2^k$  клітин (для деякого  $k$ , що не перевищує числа змінних). Так, на карті, наведеної на рис. 6.12, отримаємо два прямокутники площі 4:  $x0x0$  і  $0x0x$ , що відповідають граням розмірності 2, і один прямокутник  $01x1$ , що відповідає ребру, яке не міститься ні в одній із зазначених вище граней. Підкреслимо ще раз, що сусідство клітин, прямокутників і саме виділення прямокутників на карті Карно проводиться з урахуванням її "закрученості". У зв'язку з цим цікавий "прямокутник" на карті, представленої на рис. 6.12, позначений  $x0x0$ . Він утворений двома парами протилежних кутових клітин.



**Рис. 6.11**



**Рис. 6.12**

Таким чином, якщо на карті Карно відразу виділяти всі максимальні (в зазначеному вище сенсі) прямокутники площею  $2^k$  (для деякого  $k \geq 0$  і не перевищує числа змінних), то тим самим ми "геометрично" реалізуємо описаний раніше алгебраїчний ітераційний процес склеювання і в результаті отримуємо всі прості імпліканти вихідної функції (які складають скорочену ДНФ). Ці імпліканти відновлюються за записами прямокутників точно так

само, як описано вище для простого склеювання. Так, для карти, наведеної на рис. 6.12, отримаємо скорочену ДНФ у вигляді

$$\bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4.$$

Кожна проста імпліканта, яка входить до скороченої ДНФ, покриває деяку елементарну кон'юнкцію вихідної ДДНФ. На карті Карно цьому відповідає прямокутник, “що закриває” відповідну одиницю. На карті Карно прямокутник, відповідний ядровій імпліканті, відшукується дуже просто: це такий прямокутник, видаливши який отримаємо одиницю, не закриту ніким іншим прямокутником. Тоді жодна ядра імпліканта не може бути видалена з шуканої мінімальної ДНФ вихідної функції, тобто всі ядрові імпліканти обов'язково увійдуть до мінімальної ДНФ. Множину всіх ядрових імплікант (склеювань) скороченої ДНФ називають *ядром*.

Наприклад, у функції, зображеній на карті Карно на рис.6.13, ядро пусте, тобто ядрових імплікацій немає взагалі.

На карті Карно на рис. 6.14 в ядро потрапляють склеювання  $0 \times \times 1$ ,  $0 \times 1 \times 0$ ,  $1 \times 00$ .

$x_2 x_3$	00	01	11	10
$x_1$				
0		1	1	1
1	1	1		1

Diagram illustrating a Karnaugh map for variables  $x_1, x_2, x_3$ . The map shows 1s in cells (0,01), (0,11), (0,10), (1,00), (1,01), and (1,10). Several rectangles are drawn around the 1s, labeled with their corresponding prime implicants:  $0 \times 1$  (covering (0,01), (0,11), (0,10)),  $01 \times$  (covering (0,01), (0,11)),  $\times 10$  (covering (0,11), (0,10)),  $10 \times$  (covering (1,00), (1,01)),  $\times 01$  (covering (1,01), (1,10)), and  $1 \times 0$  (covering (1,00), (1,10)).

Рис. 6.13

$x_3 x_4$	00	01	11	10
$x_1 x_2$				
00		1	1	1
01		1	1	1
11	1			
10	1			1

Diagram illustrating a Karnaugh map for variables  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . The map shows 1s in cells (00,01), (00,11), (00,10), (01,01), (01,11), (11,00), (10,00), and (10,10). Several rectangles are drawn around the 1s, labeled with their corresponding prime implicants:  $0 \times \times 1$  (covering (00,01), (00,11), (00,10)),  $\times 010$  (covering (00,01), (01,01)),  $0 \times 1 \times$  (covering (00,01), (01,01)),  $1 \times 00$  (covering (11,00), (10,00)), and  $10 \times 0$  (covering (10,00), (10,10)).

Рис. 6.14

Якщо всі прості імпліканти опинились в ядрі, то скорочена ДНФ і є єдина мінімальна і найкоротша ДНФ для даної функції. На карті Карно кожна клітина, яка містить одиницю, повинна бути закрита прямокутником, що

відповідає деякій ядровій імпліканті. Якщо це так, то ДНФ, побудована по ядру, є мінімальна і найкоротша (склейки ядра закрили всі одиниці карти Карно). При цьому імпліканти, що не потрапили в ядро, всі виявляються "надлишковими", тобто їх видалення із скороченої ДНФ не приводить до порушення еквівалентності цієї останньої з вихідною ДДНФ.

В інших випадках переходять до відшукування так званих тупикових ДНФ. Просту імпліканту називають *надмірною* (щодо деякої ДНФ, що містить тільки прості імпліканти і еквівалентної вихідної ДДНФ), якщо її можна видалити з цієї ДНФ без втрати еквівалентності її вихідній ДДНФ. Так, скорочена ДНФ (див. рис. 6.14) містить надлишкові імпліканти: імпліканта, відповідна прямокутнику  $10 \times 0$ , або імпліканта, яка відповідає прямокутнику  $\times 010$ , може бути видалена (але не обидві відразу!). Це означає, що кожна з цих імплікант є надлишковою щодо скороченої ДНФ, але видалення однієї з них призводить до нової ДНФ, щодо якої друга зі згаданих імплікант вже не буде надмірною. У тому випадку, коли кожен елементарну кон'юнкцію вихідної ДДНФ покриває деяка ядрна імпліканта, імпліканти, що не увійшли в ядро, можна видалити одночасно.

Тоді можна уявити процес покрокового видалення надлишкових імплікант, починаючи із скороченої ДНФ, в результаті якого вийде деяка ДНФ, яка вже не містить жодної надлишкової склейки.

Будь-яку ДНФ, еквівалентну вихідній ДДНФ, що містить всі ядрові імпліканти і не містить жодної надлишкової імпліканти, називають *тупиковою*.

Зауважимо, що в силу кінцівки множини всіх імплікант тупикова ДНФ обов'язково існує, тобто в згаданому вище процесі ми рано чи пізно доберемося до такого моменту, коли видалення хоча б однієї склейки призведе до того, що "відкриється" якась одинична клітина на карті Карно і тим самим буде втрачена еквівалентність отриманої таким чином ДНФ з вихідною ДДНФ.

Для ДДНФ, карта Карно якої наведена на рис. 6.14, є дві тупикові ДНФ:

$$\bar{x}_1 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4,$$

$$\bar{x}_1 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4.$$

Перші три кон'юнкції відповідають ядру.

В загальному випадку для перерахування всіх тупикових ДНФ може бути використаний наступний алгоритм. Ми викладемо його в термінах карт Карно і, допускаючи вільність мови, будемо ототожнювати максимальні прямокутники на карті Карно з відповідними простими імплікантами.

Присвоїмо кожній простій імпліканті скороченої ДНФ деяке ім'я: тобто позначимо їх, наприклад, як  $K_1, K_2, \dots, K_m$ . Для будь-якої одиниці карти Карно, що не покривається ядром, перерахуємо всі прості імпліканти, які її покривають, записавши їх у вигляді елементарної диз'юнкції, в якій змінними вважаються введені вище імена простих імплікант. Змінна, що іменує дану просту імпліканту, приймає, за визначенням, значення 1, якщо дана проста імпліканта вибирається для покриття даної одиниці карти Карно.

Записавши всі елементарні диз'юнкції, складемо з них КНФ. Розглянемо карту Карно на рис. 6.13. позначивши

$$K_1 = x_1 \bar{x}_2 (10 \times), \quad K_2 = \bar{x}_2 x_3 (\times 01), \quad K_3 = \bar{x}_1 x_3 (0 \times 1), \\ K_4 = \bar{x}_1 x_2 (01 \times), \quad K_5 = x_2 \bar{x}_3 (\times 10), \quad K_6 = x_1 \bar{x}_3 (1 \times 0),$$

отримаємо

$$(K_1 \vee K_6) \wedge (K_1 \vee K_2) \wedge (K_2 \vee K_3) \wedge \\ \vee (K_3 \vee K_4) \wedge (K_4 \vee K_5) \wedge (K_5 \vee K_6). \quad (6.13)$$

Тим самим ми утворюємо допоміжну функцію (представлену КНФ виду (6.13)), яка називається *функцією Патріка*. Розкриваючи дужки в КНФ (6.13) і використовуючи тотожності булевої алгебри (зокрема, тотожність поглинання), отримаємо ДНФ, в якій кожна елементарна кон'юнкція є певною тупиковою ДНФ і, навпаки, кожній тупиковій ДНФ може бути зіставлена одна з цих кон'юнкцій.