Лекція 10. **Висловлення і проблема встановлення істинності.**

ПЛАН

1. *Висловлення і проблема встановлення істинності.*

2. Операції логіки висловлень.

3. Відношення слідування.

4. Основні схеми логічно правильних міркувань.

10.1. Висловлювання і проблема встановлення істинності.

Форми і закони мислення вивчає наука – формальна логіка. Застосування математичних методів у логіці привело до створення математичної логіки. Основними об’єктами вивчення традиційних розділів логіки є висловлення.

Висловленням називається твердження, про яке можна сказати, що воно тільки або істинне або хибне. Приклади висловлень: «Два менше чотирьох», «Реєстрація фірми вимагає наявності її статуту», «Василь – брат Романа», «Якщо іде дощ, вам потрібно взяти парасольку» тощо.

Для того, щоб далі оперувати цими реченнями як висловленнями, потрібно знати відносно кожного із них істинне воно або хибне, тобто знати їх істинносне значення.

Будемо називати висловлення *простим* (*елементарним*), якщо воно розглядається як деяке неподільне ціле. За звичай до них відносять висловлення, що не містять логічних зв’язок.

Складеним називається висловлення, складене із простих за допомогою логічних зв’язок: сполучників «і», «або», «не», виразів « якщо...,то», «або....або», «тоді і тільки тоді,коли....» та їх синонімів.

Висловлення будемо позначати великими латинськими буквами. Символи, які використовуються для позначень висловлювань, називають *атомарними формулами* або *атомами*.

10.2. Основні операції логіки висловлювань

Кон’юнкцією (операцією”і”, логічним добутком) двох висловлень P і Q називається висловлення, істинне тоді і тільки тоді, коли обидва істинні, і хибне

– у всіх інших випадках. Кон’юнкція позначається: P&Q, $P \wedge Q$, $P \cdot Q$ (читається: P і Q).

Диз’юнкцією (операцію «або», логічною сумою) двох висловлень P, Q називається висловлення, яке хибне тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення хибні, і істинне – у всіх інших випадках, позначається $P \vee Q$, P+Q(читається «P» або «Q».

Інверсією (запереченням) висловлення P називається висловлення, яке істинне тоді і тільки тоді, коли висловлення P хибне, і хибна – в супротивному випадку; позначається через $\overline{P}$ або $\neg P$ і читається «не P»,

«неправильно, що P».

Імплікацією (логічним наслідком) двох висловлень P і Q називається висловлення, яке хибне тоді і тільки тоді, коли P істинне,а Q хибне, у всіх інших випадках – істинне. Імплікація висловлень P і Q позначається $P \rightarrow Q$, $P \supset Q$ і читається «якщо P, то Q», «із P випливає Q».

При цьому висловлення P називається *умовою імплікації*, а Q – *висновком*.

Еквівалентністю (еквіваленцією) двох висловлень P і Q називається висловлення, яке істинне тоді і тільки тоді, коли істинностні значення P і Q співпадають, і хибне – в супротивному випадку. Еквіваленція висловлень P і Q записується $P \sim Q$, $P \equiv Q$, $P \leftrightarrow Q$ і читається «P еквівалентне Q», «P тоді і тільки тоді, коли Q».

Нерівнозначністю (виключаючим «або», додаванням за модулем 2) двох висловлень P і Q називається висловлення, яке істинне тоді і тільки тоді, коли істинностні значення P і Q не співпадають, і хибне – в супротивному випадку. Нерівнозначність позначається через $P \oplus Q$ або $P \Delta Q$ і читається «або P, або Q» (розуміється у розділовому сенсі).

Зазначимо, що $\neg$ є унарною операцією, а $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ та $\oplus$ – бінарні операції на класі P всіх висловлень. Операції над висловленнями називаються *пропозиційними зв'язками*. Наступне важливе спостереження також випливає з означення: істинність означених складених вислювань $\neg$ P, P $\vee$ Q, P $\wedge$ Q,
P $\rightarrow$ Q та P$\leftrightarrow$Q не залежить від самих висловлень, а лише залежить від їхньої істинності.

10.3. Таблиці істинності.

Кожне із введених означень операцій над висловленнями можна розглядати як означення деякої дії над символами 0 (хибність) і 1 (істина), тобто як визначення деякої операції (функції) на двохелементній множині {0,1}. Таким чином, можна скласти таблицю істинності введених унарної та бінарних операцій.

Букви, що позначають висловлення, логічні зв'язки і дужки складають алфавіт мови логіки висловлень: алгебри логіки і операції над висловленнями. За допомогою елементів алфавіту можна побудувати різноманітні логічні формули.

Формули алгебри висловлень поділяються на наступні типи: *тавтології* (тотожно істинні), *суперечності* (тотожно хибні) та *нейтральні*. Формула φ називається тавтологією, якщо на всіх інтерпретаціях пропозиційних змінних функція φ тотожно дорівнює 1. Формулу φ логіки висловлень, називають суперечністю, якщо вона набуває значення на всіх інтерпретаціяч. Формула, яка не є ні тавтологією, ні суперечністю, називається нейтральною. Будь-яку формулу, яка не є суперечністю називають виконуваною, а не тотожно істинну – спростовною. Якщо формула A залежить від невеликої кількості змінних, то для з'ясування її типу зручно користуватися таблицями істинності. У деяких випадках доцільно застосовувати метод міркувань від супротивного.

Найпростішими *пропозиційними формами* вважаються конкретні висловлювання *A*, *B*, … , які ще називаються *пропозиційними константами*, і змінні висловлювання P, Q, . . ., які називаються *пропозиційними змінними*. З них, використовуючи пропозиційні зв'язки $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, можна утворювати складніші пропозиційні форми, такі як $\neg A$, $P \vee (\neg B)$, $P \wedge (Q \Rightarrow R)$, тощо. *Пропозиційні форми* – це всі вирази, які отримуються таким чином. Тепер дамо точне рекурсивне означення пропозиційної форми.

Означення. Множина F всіх пропозиційних формул визначається як найменший (у розумінні включення) клас, який має властивості:

1) пропозиційні константи та пропозиційні змінні належать до F;

2) якщо формули $\phi, \psi \in F$, то $\neg\phi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \rightarrow \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi \in \mathsf{F}$.

Нарешті, пропозиційними формами називаються елементи класу F і тільки вони.

10.4. Закони логіки висловлювань

Означення. Пропозиційні форми ϕ та ψ називаються еквівалентними (записується $\phi \equiv \psi$), якщо пропозиційна форма $\phi \leftrightarrow \psi$ є тавтологією.

Мають місце такі еквівалентності – закони логіки висловлень.

1. Комутативність: 1) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$; 2) $P \vee Q \equiv Q \vee P$.

2. Асоціативність: 3) $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$;

4) $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$.

3. Дистрибутивність: 5) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;

6) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

4. Правила де Моргана: 7) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$;

8) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$.

5. Доповненість: 9) $P \vee \neg P \equiv 1$; 10) $P \wedge \neg P \equiv 0$.

6. Нейтральність: 11) $P \vee 0 \equiv P$; 12) $P \wedge 1 \equiv P$.

7. Подвійного заперечення: 13) $\neg\neg P \equiv P$.

8. Домінування: 14) $P \vee 1 \equiv 1$; 15) $P \wedge 0 \equiv 0$.

9. Поглинання: 16) $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$; 17) $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$.

10. Ідемпотентність: 18) $P \vee P \equiv P$; 19) $P \wedge P \equiv P$.

10.5. Основні схеми логічно правильних міркувань.

Однією з фундаментальних ідей, на які спираються дослідження із засад математики, є ідея *формалізації теорій*, тобто послідовного проведення аксіоматичного методу побудови теорії. При цьому не припускається використовувати будь-які припущення про об'єкти теорії, окрім тих, що виражені явно у вигляді *аксіом*. Аксіоми розглядають як формальні послідовності символів (вирази, формули або слова), а методи доведення - як методи одержання одних виразів з інших за допомогою операцій над символами.

У найзагальнішому вигляді *формальну теорію* Т (інший термін - *числення*) будують таким чином.

1. Означають набір основних символів - *алфавіт* теорії.

2. Конструктивно (як правило, індуктивно) означають *множину формул*, або правильно побудованих виразів, яка утворює мову теорії.

3. Виокремлюють підмножину формул, які називають *аксіомами* теорії.

4. Задають *правила виводу* (*виведення*) теорії.

Правило виводу $R(F_1, F_2, \ldots, F_m, G)$ - це відношення (або операція) на множині формул. Якщо формули $F_1, F_2, \ldots, F_m, G$ знаходяться у відношенні *R*, то формула G називається безпосередньо вивідною з формул $F_1, F_2, \ldots, F_m$ за правилом *R*; формула G логічний наслідок формул $F_1, F_2, \ldots, F_m$. За звичай правило виводу $R(F_1, F_2, \ldots, F_m, G)$ записують у вигляді $\dfrac{F_1, F_2, \ldots, F_m}{G}$ або $F_1, F_2, \ldots, F_m \vdash G$.

Формули $F_1, F_2, \ldots, F_m$ називають *припущеннями*, *посилками* або *гіпотезами* правила *R*, а формулу *G* - *висновком,* або *наслідком*.

Теорема 10.1. Формула G - логічний наслідок формул $F_1, F_2, \ldots, F_m$ тоді і тільки тоді, коли формула $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m) \to G$ є загальнозначущою.

Теорема 10.2 (*принцип прямої дедукції*). Формула G - логічний наслідок формул $F_1, F_2, \ldots, F_m$ тоді і тільки тоді, коли формула $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m \wedge \neg G$ є суперечністю.

Поряд з алфавітом і правилами побудови складних висловлень – логічних формул, мови логіки висловлень містять правила перетворення формул логіки. Ці правила реалізують загально логічні закони і забезпечують логічно правильні міркування. Коректність допустимих у логіці перетворень є фундаментальною властивістю математичної логіки.

Якщо опис системи (процесу, явища і т.п.) представлено сукупністю складних висловлень – логічних формул, істинних для даної системи, то за допомогою допустимих перетворень наявних логічних уявлень про систему може бути виконаний їх аналіз (синтез), можуть бути одержані нові уявлення, які характеризують вказану систему. Таким чином, за допомогою допустимих у логіці перетворень з'являється можливість одержання нових знань із наявних.

Процес одержання нових знань, виражених висловленнями, із інших знань називається *міркуванням*. Вихідні висловлення називаються *гіпотезами* або *посилками*, а одержанні висловлення – *наслідком* (висновком).

Наведемо приклади найбільш вживаних схем логічно правильних міркувань.

1. *Правило висновку*: «Якщо із висловлення A випливає висловлення B і істинне висловлення A, то вірне B». Це позначається:

$\frac{A \to B, A}{B}$ або ($(A \to B) \wedge A \to B$

2. *Правило заперечення*: «Якщо із A випливає B, але висловлення B невірне, то невірне A», тобто ($(A \to B) \wedge \urcorner B \to \urcorner A$.

3. *Правило твердження – заперечення*: «Якщо вірне або висловлення A або висловлення B (в розділовому сенсі) і істинне одне із них, то друге - хибне»; записується.

$(A + B) \wedge A \to \urcorner B$; $(A + B) \wedge B \to \urcorner A$

4. *Правило заперечення – твердження*:

а) $(A+B)\wedge \urcorner A \to B$; $(A+B)\wedge \urcorner B \to A$;

б) $(A\vee B)\wedge \urcorner A \to B$; $(A\vee B)\wedge \urcorner B \to$ A;

5. *Правило транзитивності* (силогізму):
(($A \to B) \wedge (\mathrm{B} \to \mathrm{C})) \to A \to \mathrm{C}$

6. *Закон суперечності*: «Якщо із A випливає В і $\urcorner B$,
(($A \to B) \wedge (A \to \urcorner B)) \to \urcorner A$

7. *Правило контрапозиції*: «Якщо із A випливає B і $\urcorner B$, (($A \to B) \leftrightarrow (\urcorner B \to \urcorner A)$.

8. *Правило розширеної контрапозиції*:
(($A \wedge B) \to C) \leftrightarrow (A \wedge \urcorner C) \to \urcorner B$

9. *Правило перетину*:
$((A - B) \wedge ((B \wedge C) \to D)) \to ((A \wedge C) \to D)$

10. *Правило імпортації* (об’єднання посилок):
$(A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C)$;

11. *Правило експортації* (роз’єднання посилок):
(($A \wedge B) \to C) \to (A \to (B \to C))$

12. *Правила дилем*:
а) $((A \to C) \wedge (B \to C) \wedge (A \vee B) \to C$

б) $((A \to B) \wedge (A \to C) \wedge (\urcorner B \vee \urcorner C)) \to \urcorner A$

в) $((A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C)) \to B \vee D$

г) $((A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\urcorner B \vee \urcorner D)) \to (\urcorner A \vee \urcorner C)$

Приклади міркувань, які не є правильними:
а) $((A \to B) \wedge B) \to A)$,

б) $(A \to B) \wedge \urcorner A \to \urcorner B$,

в) $((A \vee B) \wedge A) \to \urcorner B$ та інші

Для того, щоб перевірити, чи є данні умови логічно правильними, потрібно відновити схему міркувань і визначити належність її до логічно правильних міркувань. Проте така перевірка ускладнюється тим, що схем логічно правильних міркувань нескінченно багато. Для перевірки правильності міркувань може бути використаний метод доведення від супротивного (правило 6), але така перевірка часто виявляється трудомісткою. В алгебрі логіки існують простіші способи перевірки правильності міркувань.