

## Лекція 12. Цикли та розрізи графів.

### ПЛАН

1. Досяжність. Бази.
2. Плоскі та планарні графи
3. Розрізи графа.
4. Ейлерові і гамільтонові графи.

### 12.1. Досяжність. Бази.

Матриця досяжності  $R = (r_{ij})$  графа  $G = (V, E)$  визначається наступним чином:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } x_j \text{ досяжна із } x_i, \\ 0, & \text{в супротивному випадку.} \end{cases} \quad (12.1)$$

Множина вершин  $R(x_i)$  графа  $G = (V, E)$ , досяжних із заданої вершини  $x_i$ , складається з таких елементів  $x_j$ , для яких елемент  $r_{ij}$  в матриці досяжності дорівнює 1. Очевидно, що усі діагональні елементи в матриці  $R$  дорівнюють 1, оскільки кожна вершина досяжна із себе самої за допомогою шляху завдовжки 0.

Оскільки  $\Gamma(x_i)$  є множиною таких вершин  $x_j$ , які досяжні з  $x_i$  через шляхи довжини 1, тобто  $\Gamma(x_i)$  – така множина вершин, для яких в графі існують дуги  $(x_i, x_j)$ , то множина  $\Gamma(\Gamma(x_i)) = \Gamma^2(x_i)$  складається з вершин, досяжних із  $x_i$  з використанням шляхів довжини 2.

Аналогічно,  $\Gamma^p(x_i)$  є множиною вершин, які досяжні із  $x_i$  за допомогою шляхів довжини  $p$ .

Оскільки будь-яка вершина графа  $G = (V, E)$ , яка досяжна з  $x_i$ , має бути досяжна з використанням шляху (чи шляхів) довжини 0, або 1, або 2, ..., або  $p$ , то множину вершин, досяжних з  $x_i$ , можна представити у вигляді

$$R(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma(x_i) \cup \Gamma^2(x_i) \cup \dots \cup \Gamma^p(x_i). \quad (12.2)$$

Матрицю досяжності можна побудувати так. Знаходимо досяжні множини  $R(x_i)$  для усіх вершин  $x_i \in V$  способом, приведеним вище.

Візьмемо  $r_{ij} = 1$ , якщо  $x_j \in R(x_i)$ , і  $r_{ij} = 0$  - в супротивному випадку.

Отримана таким чином матриця є матрицею досяжності.

База  $B$  графа  $G=(V, E)$  – це множина вершин, з якої досяжна будь-яка вершина графа і ця множина є мінімальною в тому сенсі, що в  $B$  не існує власної підмножини, якій притаманна така властивість досяжності.

Отже, базою  $B$  є така множина вершин графа  $G=(V, E)$ , яка задовольняє наступним двом умовам:

- кожна вершина графа  $G$  досяжна хоча б з однієї вершини множини  $B$ ;
- в  $B$  немає вершини, яка досяжна з іншої вершини множини  $B$ .

## 12.2. Плоскі та планарні графи

У багатьох випадках не має особливого значення, як зобразити граф у вигляді рисунка (діаграми) на площині, оскільки ізоморфні графи подібні за своєю структурою і містять ту саму інформацію. Однак існують ситуації, коли необхідно, щоб зображення графа на площині задовольняло певні умови. Наприклад, якщо граф є моделлю деякої електронної схеми або транспортної мережі, де вершинами є окремі елементи схеми або станції, а ребрами, відповідно, електричні провідники і шляхи, то бажано так розташувати ці ребра на площині, щоб уникнути перетинів.

Таким чином виникає поняття плоского графа.

Граф називається *плоским*, якщо його діаграму можна зобразити на площині так, що лінії, які відповідають ребрам графа, не перетинаються (тобто мають спільні точки тільки у вершинах графа).

Приклади плоских графів показано на рис.12.1.

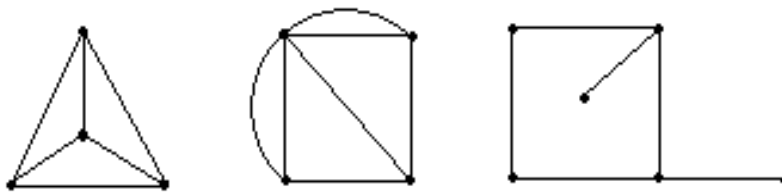


Рис.12.1.

Граф називають *планарним*, якщо він ізоморфний деякому плоскому

графу. Наприклад, граф, зображений на рис.12.2,*a*, планарний, оскільки він ізоморфний графу, зображеному поруч. Простий цикл, дерево і ліс – це також планарні графи.



Рис.12.2

Очевидними є такі твердження.

**Лема 12.1** . 1. Будь-який підграф планарного графа є планарним.

2. Граф є планарним тоді і тільки тоді, коли кожна його зв'язна компонента – планарний граф.

Про планарні графи кажуть, що вони *укладаються на площині* або мають *плоске укладання*.

*Жордановою кривою* будемо називати неперервну лінію, яка не перетинає сама себе. *Гранню* плоского графа назвемо множину точок площини, кожна пара яких може бути з'єднана жордановою кривою, що не перетинає ребер графа. *Межею* грані будемо вважати замкнений маршрут, що обмежує цю грань.

Отже, плоский граф розбиває всю множину точок площини на грані так, що кожна точка належить деякій грані. Відзначимо, що плоский граф має одну, причому єдину, необмежену грань, яку називають *зовнішньою*, а всі інші – *внутрішніми* гранями.

Множину граней плоского графа позначатимемо через  $P$ .

*Степенем* грані  $r$  називатимемо довжину циклічного шляху, що обмежує грань  $r$  (тобто довжину межі грані  $r$ ); позначається  $\Delta_r$ .

**Лема 12.2.** Нехай  $G=(V, E)$  плоский граф, тоді справедлива рівність

$$\sum_{r \in P} \Delta_r = 2|E|. \quad (12.3)$$

*Доведення.* Справді, кожне ребро плоского графа або розділяє дві різні грані, або знаходиться всередині однієї грані. Отже, кожне ребро графа  $G$  або входить у межі тільки двох граней, або є елементом межі лише однієї грані, але при циклічному обході цієї грані таке ребро проходиться двічі. Тобто кожне ребро плоского графа вносить у суму в лівій частині (12.3) дві одиниці.

**Теорема 12.1.** (*теорема Ейлера*). Для будь-якого зв'язного плоского графа  $G=(V, E)$  виконується рівність

$$|V| - |E| + |P| = 2. \quad (12.4)$$

**Наслідок 12.1.** Кількість граней будь-якого плоского укладання зв'язного планарного графа з  $n$  вершинами і  $m$  ребрами є величиною сталою і дорівнює  $m - n + 2$ , тобто  $|P| = |E| - |V| + 2$ .

Інакше кажучи, число  $|P|$  є інваріантом для заданого планарного графа  $G$ , тобто не залежить від способу укладання його на площині.

**Наслідок 12.2.** Для довільного зв'язного планарного графа  $G=(V, E)$  з не менше ніж трьома вершинами виконується співвідношення

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Дійсно, оскільки в графі  $G$  відсутні петлі та кратні ребра, то степінь  $\Delta_r$  будь-якої грані не менше 3, тобто  $\sum_{r \in P} \Delta_r \geq 3|P|$ .

Звідси, враховуючи співвідношення (12.3) і попередній наслідок, маємо

$$\sum_{r \in P} \Delta_r = 2|E| \geq 3(|E| - |V| + 2) \Rightarrow |E| \leq 3|V| - 6.$$

**Наслідок 12.3.** У будь-якому планарному графі є принаймні одна вершина, степінь якої не перевищує 5.

Справді, якщо припустити, що степені всіх вершин планарного графа  $G=(V, E)$  більші, ніж 5, то дістанемо нерівність

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg v \geq 6|V|,$$

яка суперечить попередньому наслідку.

**Наслідок 12.4.** (узагальнення формули Ейлера ). Для довільного планарного графа  $G=(V, E)$  з  $k$  компонентами зв'язності виконується рівність

$$|V|-|E|+|P|=k+1. \quad (12.5)$$

*Доведення.* Нехай  $V_i, E_i$  та  $P_i$  - відповідні множини вершин, ребер і граней  $i$ -ї зв'язної компоненти графа  $G$ ; згідно з формулою (12.4) виконується

$$|P_i|=|E_i|-|V_i|+2.$$

Спільних внутрішніх граней різні компоненти не мають, а зовнішня грань для всіх компонент єдина і рахується по одному разу для кожної з них. Тому загальна кількість граней графа  $G$  дорівнюватиме

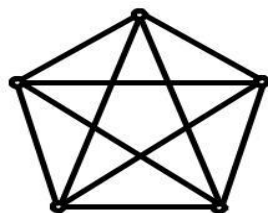
$$\begin{aligned} |P| &= \sum_{i=1}^k |P_i| - (k-1) = \sum_{i=1}^k (|E_i| - |V_i| + 2) - (k-1) = \\ &= \sum_{i=1}^k |E_i| - \sum_{i=1}^k |V_i| + 2k - (k-1) = |E| - |V| + k + 1. \end{aligned}$$

Звідси приходимо до формули (12.5).

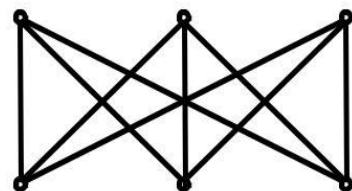
**Наслідок 12.5.** Кількість внутрішніх граней довільного плоского графа  $G$  дорівнює цикломатичному числу  $\gamma(G)$  графа.

**Наслідок 12.6.** Графи  $G$  і  $\bar{G}$  не можуть бути одночасно планарними, якщо кількість вершин у них не менше 11.

Справедливість твердження випливає з того, що нерівність з наслідку 12.2 не може одночасно виконуватися для графів  $G$  і  $\bar{G}$  з кількістю вершин  $|V| \geq 11$ .



$K_5$



$K_{3,3}$

Рис.12.3

При дослідженні плоских графів особливе місце займають графи  $K_5$  і

$K_{3,3}$ , зображені на рис.12.3.

**Теорема 21.2.** Графи  $K_5$  і  $K_{3,3}$  не є планарними.

*Доведення.* Доведемо, що повний граф  $K_5$  не є планарним. Припустімо супротивне, тобто, що  $K_5 = (V, E)$  – планарний граф. Тоді з наслідку 12.2 випливає, що

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Однак, для графа  $K_5$   $|E|=10$ ,  $|V|=5$  і повинно виконуватись  $10 \leq 3 \times 5 - 6 = 9$ , що неможливо.

Отже, припущення про те, що  $K_5$  планарний граф – неправильне.

Аналогічно, методом від супротивного доведемо, що повний дводольний граф  $K_{3,3}$  не є планарним. В графі  $K_{3,3}$  жодні три вершини не є вершинами трикутника. Отже,  $\Delta_r \geq 4$  для всіх граней  $r \in P$ . Припускаючи, що граф  $K_{3,3}$  планарний, з наслідку 12.1 отримаємо

$$|P| = |E| - |V| + 2 = 9 - 6 + 2 = 5.$$

Тоді маємо

$$2|E| = \sum_{r \in P} \Delta_r \geq 4|P| = 4 \times 5 = 20,$$

тобто  $|E| \geq 10$ , що невірно для графа  $K_{3,3}$ . Теорему доведено.

Значення графів  $K_5$  і  $K_{3,3}$  полягає в тому, що вони є "єдиними" суттєво непланарними графами. Всі інші непланарні графи містять у собі підграфи "подібні" до  $K_5$  або  $K_{3,3}$ . Характер цієї подібності розкривається за допомогою таких понять.

*Елементарним стягуванням* графа  $G = (V, E)$  називається видалення в графі  $G$  деякого ребра  $(v_i, v_j) \in E$  і злиття вершин  $v_i$  і  $v_j$  в одну вершину  $v$ , причому  $v$  інцидентна всім тим відмінним від  $(v_i, v_j)$  ребрам графа  $G$ , які були інцидентні або  $v_i$ , або  $v_j$ .

Кажуть, що граф  $G$  *стягується* до графа  $G'$ , якщо  $G'$  можна отримати з  $G$  за допомогою послідовності елементарних стягувань.

**Приклад 12.1.** На рис.12.4 зображено графи  $G$  і  $G'$ , при цьому  $G$  стягується до  $G'$ .



Рис.12.4

Наведемо важливу теорему теорії графів.

**Теорема 12.3 (теорема Куратовського).** Граф  $G$  є планарним тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфів, що стягуються до  $K_5$  або  $K_{3,3}$ .

Ця теорема лежала в основі перших алгоритмів перевірки планарності графів. Час роботи таких алгоритмів пропорційний  $|V|^6$ .

### 12.3. Розрізи графа.

Не потрібно доводити зростаючу складність пристроїв і систем. При їх проектуванні розробників, а пізніше і користувачів цих пристроїв та систем, цікавить питання про поведінку пристрою чи системим, якщо якісь складові (елементи, деталі) при роботі вийдуть з ладу. Це питання – одне з основних у сучасній теорії надійності технічних систем. Аналіз системної надійності пов'язаний з побудовою надійних схем, що є графами певного виду. Пристрій чи система, як відомо з теорії систем, виконують функцію, що не зможе виконати жоден з їхніх елементів. З'єднаємо елементи, вихід з ладу одного з яких, виводить з ладу систему (пристрій), послідовно; а елементи, вихід з ладу одного з яких не виводить з ладу систему (пристрій), паралельно. Вихід з ладу системи (пристрою) – це неможливість виконувати її функцію. Тоді одержуємо те, що називається надійнісною схемою у вигляді графа.

**Приклад 12.2.** Комп'ютер повинен обчислювати, вводити і виводити

інформацію. Тоді, якщо до його складу входять: 1 процесор (ЦП), 1 оперативна пам'ять (ОП), 2 канали (ДО1 і ДО2), до обох з яких приєднано 2 пристрої вводу/виводу (ПВВ1 і ПВВ2), то надійнішу схему можна зобразити у вигляді рис. 12.5:

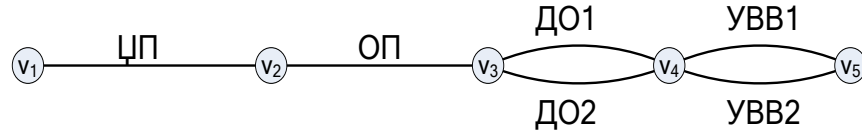


Рис. 12.5

Очевидно, що виконання системою функцій – це можливість пройти у графі з вершини  $v_1$  до вершини  $v_5$ . Зрозуміло, що для невиконання системою функцій, необхідно забрати ребра: або ЦП, або ОП, або ДО1 і ДО2, або ПВВ1 і ПВВ2. Для аналізу цих ситуацій і вводяться наступні поняття.

*Розрізаючою множиною  $S$  зв'язного графа  $G$  назвемо таку підмножину ребер графа  $G$ , що вилучення їх із графа  $G$  розділяє останній, тобто граф  $G \setminus S$  стає незв'язним.*

**Приклад 12.3.** Граф  $G$  і компоненти зв'язності його підграфів  $G_1$  і  $G_2$ , отриманих вилученням ребер розрізаючих множин  $S_1$  і  $S_2$  графа  $G$  відповідно зображені на рис. 12.6.

Тут розрізаючі множини  $S_1 = \{e_9, e_7, e_6, e_0\}$ ,  $S_2 = \{e_9, e_1, e_3, e_8\}$ .

Підмножина ребер  $S_3 = \{e_9, e_1, e_3, e_6, e_8\}$ , яка також перетворює граф  $G$  у незв'язний граф  $G_3$  (рис. 12.7), є розрізаючою, причому має особливість, що відрізняє її від розрізаючих множин  $S_1$  і  $S_2$ .

Ця особливість полягає в тому, що з  $S_3$  можна вилучити ребро  $e_6$ , причому отримана множина  $\{e_9, e_1, e_3, e_8\}$  також буде розрізаючою. У той же час ні  $S_1$  ні  $S_2$  не мають жодного такого ребра, вилучення якого залишало б їх розрізаючими множинами. Таким чином, розрізаючі множини  $S_1$  і  $S_2$  графа  $G$  мають властивість мінімальності.

*Розрізом зв'язного графа  $G$  є така мінімальна множина  $S$  ребер графа  $G$ , що вилучення  $S$  розбиває граф  $G$  точно на дві компоненти.*

Розріз графа  $G$ , який складається лише з одного ребра, називається

МОСТОМ.

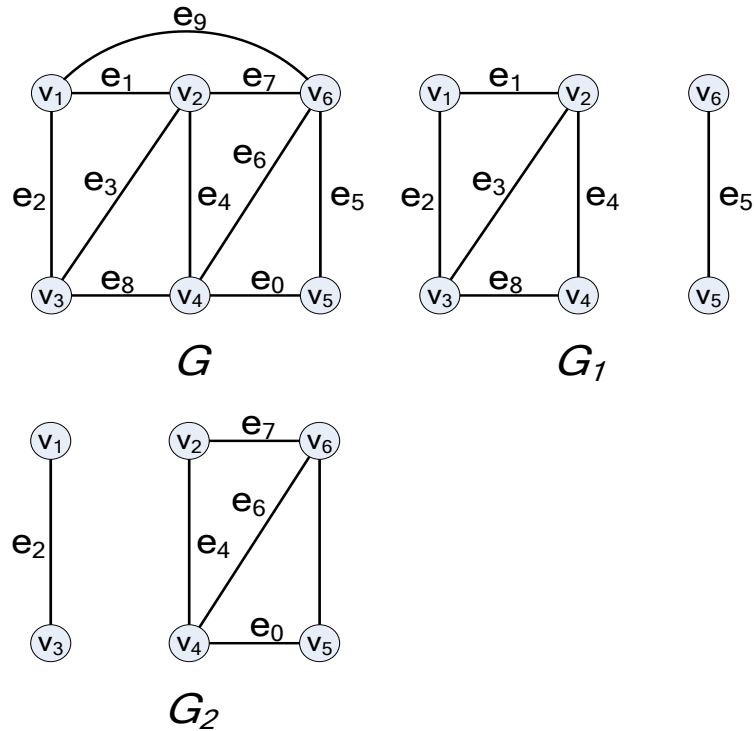


Рис. 12.6

Розрізаючу множину можна визначити й іншим способом. Нехай  $V$  множина вершин зв'язного графа  $G$ . Нехай його підмножини  $V_1$  і  $V_2$  не перетинаються і такі, що  $V = V_1 \cup V_2$ . Тоді множина  $S$  усіх тих ребер, що мають одну вершину в підмножині  $V_1$ , а іншу – у підмножині  $V_2$ , називається розрізаючою множиною графа  $G$ . За звичай в такому випадку розрізаюча множина позначається  $\langle V_1, V_2 \rangle$ .

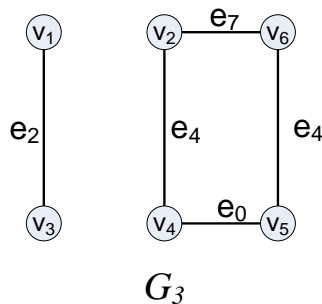


Рис. 12.7

Якщо підграфи  $G_1$  і  $G_2$ , на які розбивається граф  $G$  після вилучення ребер розрізаючої множини  $\langle V_1, V_2 \rangle$ , є зв'язними, то за означенням розрізу

розрізаюча множина  $\langle V_1, V_2 \rangle$  є розрізом графа  $G$ .

Нехай  $S$  – розріз графа  $G$ . Тоді множини  $V_1$  і  $V_2$  є відповідно множинами вершин двох компонентів  $G_1$  і  $G_2$  графа  $G \setminus S$ , де  $S$  – множина ребер розрізу. Тоді  $S$ , за означенням розрізаючої множини, є розрізаючою множиною. Отже, доведено наступну теорему.

**Теорема 12.4.** Розрізаюча множина  $\langle V_1, V_2 \rangle$  зв'язного графа  $G$  є розрізом графа  $G$ , якщо після вилучення його ребер із графа  $G$  утвориться точно дві компоненти, причому множини  $V_1, V_2$  є множинами їх вершин. Якщо  $S$  – розріз зв'язного графа  $G$ , а  $V_1, V_2$  є відповідно множинами вершин двох компонентів  $G_1$  і  $G_2$  графа  $G \setminus S$ , то  $S$  – розрізаюча множина графа  $G$ .

Співвідношення між розрізами і розрізаючою множин виражає наступна теорема.

**Теорема 12.5.** Розрізаюча множина у зв'язному графі  $G$  є об'єднання декількох розрізів цього графа.

#### ***12.4. Ейлерові і гамільтонові графи.***

Задача про обходи графів, зокрема, задачі ейлеревих і, особливо гамільтонових ланцюгів і циклів часто зустрічаються на практиці. Наприклад, коли якість виконання деякого комплексу операцій істотно залежить від порядку, в якому вони виконуються.

Розглянемо два важливих класи зв'язних графів і їхні властивості.

Граф  $G$  називається *ейлеревим*, якщо існує замкнутий ланцюг, що проходить через кожне його ребро (тільки один раз). Такий ланцюг називається *ейлеровим*. Якщо зняти обмеження на замкнутість ланцюга, то граф називається *напівейлеровим*.

На рис. 12.8.а, б, в, зображено відповідно не ейлерів, напівейлерів і ейлерів графи.

За означенням, кожен ейлерів граф є напівейлеровим.

Для аналізу властивостей ейлерових графів скористаємось наступною лемою.

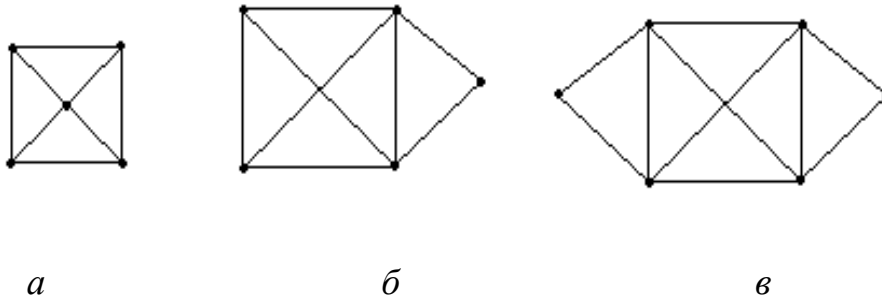


Рис. 12.8

**Лема 12.3.** Якщо степінь кожної вершини графа  $G$  не менший двох, то граф містить цикл.

*Доведення.* Якщо граф  $G$  містить петлі чи паралельні ребра, то твердження очевидне. Залишається розглянути випадок простого графа. Тоді існування циклу в ньому впливає з можливості побудови довільного маршруту, що веде з довільної вершини. Оскільки граф скінчений, то обов'язково прийдемо у вершину, що вже зустрічалася раніше.

**Теорема 12.6.** Зв'язний граф  $G = (V, E)$  є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли кожна вершина в  $G$  має парний степінь.

*Наслідок 1.* Зв'язний граф ейлерів тоді і тільки тоді, коли множину його ребер можна розбити на цикли, що не перетинаються.

*Наслідок 2.* Граф є напівейлеровим тоді і тільки тоді, коли в ньому не більше двох вершин мають не парні степені.

*Зауваження.* Якщо напівейлерів граф містить рівно дві вершини з непарними степенями, то в будь-якому напівейлеровому ланцюгу одна з цих двох вершин обов'язково буде початковою, а друга - кінцевою. По лемі про рукопотискання граф не може мати лише одну вершину непарного степеня.

**Теорема 12.7. (теорема Флері).** Нехай  $G = (V, E)$  – ейлерів граф. Тоді наступна процедура завжди можлива і веде до ейлерового ланцюга в графі  $G$ . Виходячи з будь-якої вершини  $u \in V$ , ідемо по ребрах графа  $G$  довільним чином за такими правилами:

1) стираємо пройдені ребра і стираємо ізольовані вершини, які при цьому виникають;

2) на кожному етапі йдемо по мосту лише тоді, коли немає інших можливостей.

Граф називається *гамільтоновим*, якщо у ньому є простий цикл, що містить кожну вершину цього графа. Такий цикл називається *гамільтоновим*.

Граф називається *напівгамільтоновим*, якщо він містить ланцюг, що проходить через кожну його вершину.

На жаль, для довільного графа поки не отримані умови, необхідні і достатні для установлення його належності до гамільтонових графів, як це зроблено для ейлерових графів. Пошук критеріїв гамільтоновості графа – це одна з основних невирішених проблем теорії графів. Сформулюємо один з найбільш відомих результатів загального характеру.

**Теорема 12.8.** (теорема Дірака). Якщо в графі  $G = (V, E)$  з  $n \geq 3$  вершинами степінь кожної вершини  $v \in V$  справджує нерівність  $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ , то граф  $G$  є гамільтоновим.

Взаємозв'язки між ейлеровим і гамільтоновим графами покажемо на прикладі, зображеному на рис. 12.9. Тут кожен граф містить 8 вершин.

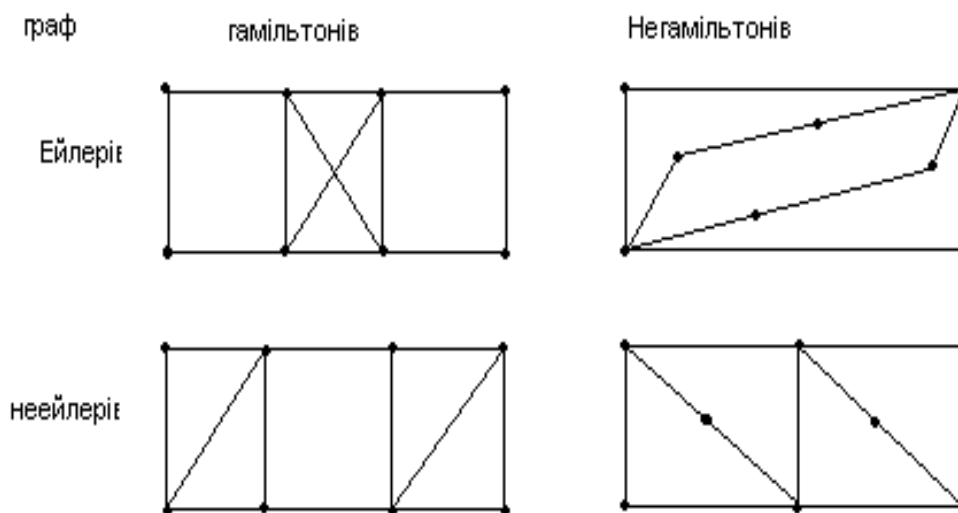


Рис. 12.9