Лекція 13. ***Дерева.***

ПЛАН

1. *Дерева, їх властивості.*
2. *Остови графа.*
3. *Цикломатичне число графа*
4. *Матриця Кіргофа*
5. *Орієнтовані дерева і їхні властивості.*
6. *Кістяк мінімальної ваги*

13.1. Дерева, їх властивості.

Граф без циклів називається *ациклічним*. Ациклічний зв’язний граф називається *деревом*. Довільний ациклічний граф називається *лісом*. Очевидно, що зв’язними компонентами лісу є дерева, і тому, кожен ліс може бути зображений у вигляді прямої суми дерев.

Дерева – це особливий і дуже важливий клас графів. Особлива роль дерев визначається як широким їхнім застосуванням у різних галузях науки і практики, так і тим особливим положенням, яке дерева займають у самій теорії графів. Останнє випливає з граничної простоти будови дерев. Часто при розв’язуванні різних задач теорії графів їхнє дослідження починають з дерев. Зокрема, порівняно нескладною є проблема перевірки ізоморфності дерев.

Існують й інші, рівносильні наведеному, означення дерева, які можна розглядати як характеристичні властивості дерева.

Теорема 13.1. Для графа $G=(V, E)$, $|V|=n$, $|E|=m$ наступні твердження є рівносильними:

1) G – дерево (ациклічний зв’язний граф);

2) G – зв’язний граф і $m=n-1$;

3) G – ациклічний граф і $m=n-1$;

4) для будь-яких вершин v і w графа G існує лише один простий ланцюг, що з’єднує v і w ;

5) G – ациклічний граф такий, що коли будь-які його несуміжні вершини v і w з’єднати ребром (v,w), то одержаний граф міститиме рівно один цикл.

Для доведення цієї теореми встановлюється виконання такого ланцюжка логічних слідувань: 1) → 2), 2) → 3), 3) → 4), 4) → 5) і 5) → 1).

Наслідок 1. Для довільного дерева $T = (V, E)$ з n вершинами виконується

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2(n-1). \tag{13.1}$$

Наслідок 2. Будь-яке нетривіальне дерево $T = (V, E)$ має принаймні дві кінцеві вершини.

Наслідок 3. Ліс F, який має n вершин і складається з k дерев, містить $n - k$ ребер.

Наслідок 4. В графі G з n вершинами, який має більше, ніж $n - 1$ ребро, є принаймні один цикл.

13.2. Остови графа.

Кістяковим (*остовним*) *деревом* зв’язного графа $G = (V, E)$ називається дерево $T = (V, E_T)$ таке, що $E_T \subseteq E$.

Кістяковим (*каркасним*) *лісом* незв’язного графа $G = (V, E)$ називається сукупність кістякових (остовних) дерев зв’язних компонент графа G.

Наслідок 5. Для зв’язного графа $G = (V, E)$ можна вказати $|E| - |V| + 1$ ребро, після вилучення яких отримаємо кістякове дерево графа G.

Наслідок 6. Нехай граф $G = (V, E)$ має k компонент зв’язності. Для отримання його кістякового лісу з графа G необхідно вилучити $|E| - |V| + k$ ребер.

13.3. Цикломатичне число графа

Число

$$\gamma(G) = |E| - |V| + k \tag{13.2}$$

називається *цикломатичним числом* графа G; тут k – число компонент зв’язності графа.

Цикломатичне число графа G має такі прості властивості.

1. Для довільного графа *G* виконується $\gamma(G) \geq 0$.

2. Граф *G* є лісом тоді і тільки тоді, коли $\gamma(G) = 0$.

3. Граф *G* має рівно один простий цикл тоді і тільки тоді, коли $\gamma(G) = 1$.

Кількість циклів у графі *G* не менша, ніж $\gamma(G)$. За своєю суттю цикломатичне число визначає число ребер, які необхідно вилучити із графа *G*, щоб він не мав циклів.

13.4. Матриця Кіргофа

Нехай *G(V,E)* – помічений граф з множиною вершин *V={1, 2, ...,n}*. Визначимо матрицю *B(G)* порядку $n\times n$, елементи якої визначаються так:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, \textit{якщо вершини } i, j \text{ - суміжні}, \\ 0, \text{ якщо } i \neq j; \quad i, j\text{-несуміжні}, \\ \deg v_i, \textit{ якщо } i = j. \end{cases}$$

Матриця *B(G)* називається *матрицею Кіргофа*.

Теорема 13.2.(*Кіргофа*). Число кістякових дерев у зв'язному графі *G* порядку *n≥2* дорівнює алгебраїчному доповненню будь – якого елемента матриці Кіргофа *B(G)*.

Наприклад, для графа G, зображеного на рис.13.1., матриця Кіргофа буде такою:

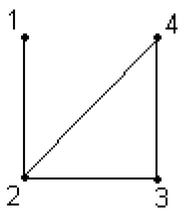


Рис.13.1.

$$\mathrm{B(G)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Число кістякових дерев, за теоремою Кіргофа, дорівнює, наприклад, алгебраїчному доповненню елемента b_{11}, тобто

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Ці дерева зображені на рис.13.2.

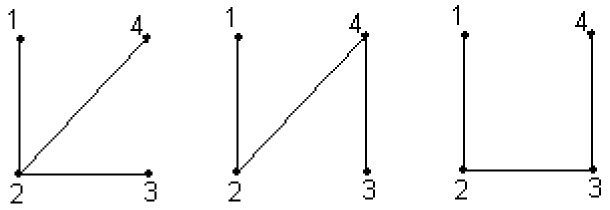


Рис.13.2

13.5. Орієнтовані дерева і їхні властивості.

Варто зазначити, що застосування графів для зображення процесів і явищ природним чином вимагає врахування орієнтації ребер. Тому в цій сфері орграфи дуже широко використовуються, а це припускає дослідження специфічних орграфів, що володіють певними корисними для застосувань властивостями. Саме такий клас орграфів складають орієнтовані дерева.

Інтуїтивно зрозуміло, що орієнтовані дерева також не повинні мати циклів і для них також повинна виконуватися умова існування оршляху між кожною парою вершин. Легко, однак переконатися, що такі умови приводять до орграфів, що ми не хотіли б віднести до орієнтованих дерев, зокрема

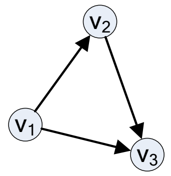


Рис. 13.3

Дійсно, цей граф циклів не містить, але традиційного для дерев наявності між парою вершин не більш одного шляху тут не забезпечується. Тому потрібно необхідним чином визначити орієнтовані дерева.

Означення. Вершина *V* орграфа G називається коренем орграфа G, якщо з вершини *V* існує орієнтований шлях у кожну з інших вершин орграфа G.

Означення. Орграф G називається *орієнтованим (кореневим) деревом*, якщо він має корінь r і покладений у його основу граф є деревом.

Існує ще одне визначення орієнтованого (кореневого) дерева, побудоване на його властивостях.

Означення. Орієнтованим деревом називається орграф з коренем, з якого є тільки один орієнтований маршрут у будь-яку іншу вершину орграфа G.

Означення. Орграф G називається *квазісильно зв'язним*, якщо для будь-якої пари його вершин v_1 і v_2 існує така вершина v_3, з якої йдуть орієнтовані шляхи у вершини v_1 і v_2, причому вершина v_3 не обов'язково відрізняється від вершин v_1 і v_2.

Тоді справедлива наступна

Теорема 13.2. Для орієнтованого дерева G виконуються наступні твердження:

1) орграф G – квазісильно зв'язний і втрачає цю властивість при видаленні з нього будь-якого ребра;

2) орграф G – квазісильно зв'язний і має таку вершину r, що $d^-(v_i) = 0$ і $d^-(v_i) = 1$, для кожної іншої вершини $v \neq r$;

3) орграф G – квазісильно зв'язний без циклів.

Доведення. Встановити ці властивості досить просто.

1. Очевидно, що G квазісильно зв'язний. Нехай він не втрачає цю властивість при видаленні ребра (v_i, v_j). Тоді існує така вершина v_k, що з неї існують шляхи в v_i і v_j, що не використовують ребро (v_i,v_j), тобто існують в орграфі G по два орієнтованих шляхи до вершин, що суперечить умові.

2. Тому що G – квазісильно зв'язний, для його кореня $d^-(r) = 0$. Для будь-якої іншої вершини $v_i \neq r$ $d^-(v_i) = 1$, тому що якби виконувалася умова $d^-(v_i) > 1$, то існувало б два шляхи у вершину v_i, що суперечить умові.

Очевидно, специфіка орієнтованих дерев, що полягає в тому, що в кожну вершину з кореня веде єдиний шлях, може істотно спростити способи їхнього задання. Той факт, що в орієнтованих деревах напівступінь заходу для усіх вершин, крім кореня, дорівнює 1, дозволяє задати граф символьним рядком, який специфікує обхід орієнтованого дерева в порядку зверху - вниз, зліва - направо. Для уточнення цієї модифікації потрібно ввести ряд термінів, що відображають особливості орієнтованих дерев.

Означення. Назвемо *глибиною* вершини орієнтованого дерева довжину орієнтованого шляху від кореня до цієї вершини.

Сутність термінів, що вводяться, ми будемо пояснювати на наступному прикладі.

Приклад 13.1. Задамо орієнтоване дерево геометричним способом

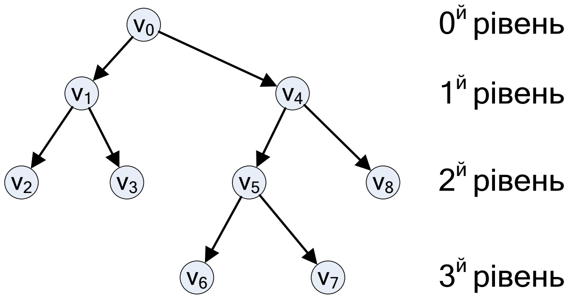


Рис. 13.4

Таким чином, глибина вершини v_0 – 0, вершини v_1 – 1, вершини v_5 – 2, вершини v_6 – 3.

Означення. Назвемо глибиною орієнтованого дерева найбільшу глибину вершин цього дерева. Так глибина дерева з прикладу 13.1 дорівнює 3.

Означення. Усі вершини орієнтованого дерева, глибина яких дорівнює i, назвемо i-м рівнем орграфа.

Рівні дерева з прикладу 13.3 наведені на рис. 13.4.

Означення. Якщо в орієнтованому дереві вершини v_i, v_k суміжні, причому ребро виходить з вершини v_i, то вершину v_i назвемо *прямим предком* вершини v_k, а вершину v_k – *прямим нащадком* вершини v_i.

У нашому прикладі, зокрема, v_0 – прямий предок вершин v_1 і v_4, а вершини v_1 і v_4 – прямі нащадки вершини v_0.

Означення. Якщо в орієнтованому дереві існує шлях з вершини v_i у вершину v_k, то назвемо вершину v_i предком вершини v_k, а вершину v_k –

нащадком вершини v_i.

У нашому прикладі, зокрема, v_0 – предок вершин $v_1,v_2,\dots,v_8$, а вершини $v_1,v_2,\dots,v_8$ – нащадки вершини v_0.

Означення. Вершину орієнтованого дерева, яка не має прямих нащадків, назвемо л*истком*.

У нашому прикладі вершини v_2,v_3,v_6,v_7,v_8 – листя.

Уточнимо поняття піддерева орієнтованого дерева в такий спосіб.

Означення. Назвемо піддеревом орієнтованого дерева G зв'язний його підграф G_1 такий, що:

1) якщо G_1 містить вершину орграфа G, то містить і всіх її нащадків;
2) жодна з вершин, що не входять у підграф G_1, не є нащадком вершини, що входить у підграф G_1.

У нашому прикладі піддеревами є, зокрема:

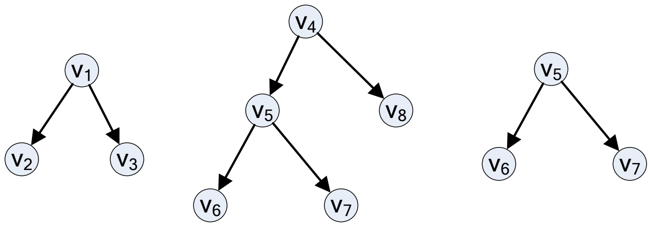


Рис. 13.5

Тепер опишемо модифікацію, відому, як ліве (праве) дужкове зображення орієнтованого дерева. Отже, ідея зображення – перелічення прямих нащадків кожної вершини за правилом зверху - вниз, зліва - направо.

Якщо $G_1,\dots,G_n$ – піддерева графа G, корені яких – прямі нащадки кореня графа G, то ліве дужкове зображення $lr(G) = v_0(lr(G_1),\dots,lr(G_n))$, а праве дужкове зображення $rr(G) = (rr(G_1), \dots,rr(G_n))v_0$. Таке визначення називається рекурсивним і ми часто будемо використовувати цей прийом в подальшому. Якщо корінь графа G прямих нащадків не має, то $lr(G) = rr(G) = v_0$.

Для розглянутого прикладу:

$lr (G) = v_0(v_1 (v_2,v_3), v_4(v_5(v_6,v_7),v_8))$

$rr(G) = ((v_2,v_3)v_1,((v_6,v_7)v_5,v_8)v_4)v_0$

Дуже важливий клас орієнтованих дерев – це дерева, напівступінь виходу кожної вершини якого не перевищує 2. Зокрема, вони широко застосовуються при кодуванні ін формації. У наступній темі ми розглянемо питання про те, скільки різних дерев можна побудувати на *n* вершинах.

13.6. Кістяк мінімальної ваги

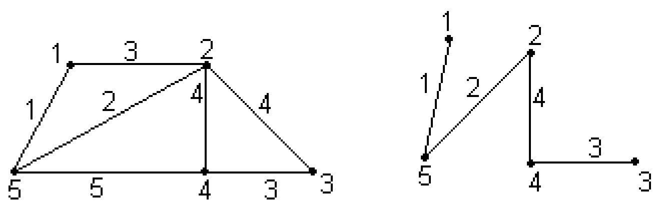
Нехай на множині ребер *E* графа *G(V,E)* задано функцію $w: E \to R^+$, тобто кожному ребру *e* графа *G* ставиться у відповідність додатне число *w(e)* – вага ребра e. пару (G, w) назвемо зваженим графом. Під вагою будь – якого підграфа зваженого графа розуміють суму ваг ребер цього підграфа.

Розглянемо таку задачу: у зваженому зв’язному графі потрібно знайти кістяк мінімальної ваги. Ця задача виникає під час проектування ліній електромережі, трубопроводів, доріг і т.ін., коли потрібно задані центри з’єднати деякою системою каналів зв’язку так, щоб будь-які два центри були з’єднані або безпосередньо, або через інші центри і щоб загальна довжина (або вартість) каналів зв’язку була мінімальною. Розв’язок цієї задачі знаходиться за допомогою *алгоритму Краскала*, який полягає у послідовності таких кроків:

1. Будуємо граф $T_1 = O_n + e_1$, приєднуючи до порожнього графа O_n ребро мінімальної ваги e_1.

2. Якщо граф T_1 побудований і *i<n-1*, то побудуємо граф $T_{i+1} = T_i + e_{i+1}$, де e_{i+1} - ребро графа *G*, що має мінімальну вагу серед ребер, що не входять в T_i і не утворюють циклів з ребрами з T_i.

Для ілюстрації цього алгоритму розглянемо зважений граф, зображений на рис.13.6.*а*. Покладаємо $e_1 = (1,5)$, $e_2 = (2,5)$. Серед ребер, що залишилися, мінімальну вагу має, наприклад, ребро (1, 2), але воно непридатне для побудови, тому що утворює цикл з двома попередніми, тому, продовжуючи процес, покладаємо $e_3 = (3,4)$ і $e_4 = (2,4)$. Отже, ребра (1, 5),(2, 5),(2, 4),(3, 4) становлять кістяк мінімальної ваги (рис. 13.6.б).



а *б*

Рис.13.6.