Лекція 15. Потоки в мережах.

ПЛАН

1. *Означення мережі*
2. *Поняття потоку*
3. *Розріз. Пропускна здатність розрізу*
4. *Алгоритм побудови максимального потоку*

15.1. Означення мережі

Граф *G* = (*V, E*), елементам якого поставлені у відповідність певні характеристики або параметри, називають *мережею*, а самі характеристики − *функціями*. Функції можуть бути задані на таких елементах, як вершини, дуги, підмножини вершин та дуг.

На вершинах мережі визначимо *функцію інтенсивності*. Це така функція, яка кожній вершині $v_i \in V \leftrightarrow i \in V$ ставить у відповідність деяке число d_i. Ті вершини, для яких $d_i > 0$, називаються *джерелами* вершин, а для яких $d_i < 0$ – *стоками*, інші − *нейтральними*. Так для транспортної мережі джерелами є пункти постачання, стоками − пункти споживання, нейтральними пункти − де відсутнє виробництво і споживання.

На дугах можуть бути задані різні функції, одна з них − *пропускна спроможність*. Функція пропускної спроможності ставить у відповідність, кожній дузі *(i, j)* графа *G* = (*V, E*) невід'ємне ціле число r_{ij}, яке називається пропускною спроможністю дуги. В транспортних задачах пропускна спроможність дуги визначає максимальну кількість продукції, яку відповідна комунікація може пропустити за одиницю часу.

Для наочності уявлятимемо, що по ребрах (*i, j*), де *i*<*j*, з джерела S до стоку *t* прямує деяка речовина (вантаж, ресурс, інформація тощо).

Максимальна кількість r_{ij}, речовини, яку може пропустити за одиницю часу ребро (i, j), називається його *пропускною спроможністю*. У загальному випадку $r_{ij} \neq r_{ji}$. На графі пропускні спроможності ребер вказуються в дужках: перше число − це пропускна спроможність в напрямі від вершини і до вершини j, друге − в протилежному напрямі. Якщо вершини k та l на мережі не сполучені, то $r_{kl} = r_{lk} = 0$.

Пропускні спроможності ребер мережі можна задати квадратною матрицею $R = (r_{ij})$ *n*-го порядку (*n* − число вершин мережі). Оскільки $r_{ii} = 0$, то головна діагональ матриці складається з нулів.

Мережа — це скінченний граф без циклів і петель, орієнтований в одному загальному напрямі від вершини *S*, що є *входом* (*джерелом*) графа, до вершини *t*, що є *виходом* (*стоком*) графа.

Отже, *мережа* – це граф *G* = (*V, E*), в якому:

1) кожній дузі приписане ціле невід'ємне число, яке називається *пропускною здатністю дуги*;

2) відокремлено дві вершини − *S* та *t*. При цьому в графі *G* немає дуг, які заходять у вершину *S*, і немає дуг, які виходять з вершини *t*. Ці дві вершини називаються відповідно *джерелом* та *стоком*.

Можна надати різні інтерпретації поняттю транспортної мережі.

1. У вершині *S* є необмежений запас певного продукту і треба зорганізувати доставку цього продукту до вершини *t* мережею шляхів сполучання з проміжними вершинами *u, v*, … . Нехай пропускна здатність дуги у випадку, що розглядається – це кількість вантажу, який можна перевезти за одиницю часу даною дугою. Виникає *задача*: зорганізувати перевезення мережею в такий спосіб, щоб, не перевищуючи пропускних здатностей дуг, доставляти з *S* до *t* максимальну кількість вантажу за одиницю часу.

2. Інша інтерпретація: наприклад, комп'ютерна мережа, якою з *S* до *t* передається інформація.

15.2. Поняття потоку

Основним поняттям теорії мереж є поняття потоку по мережі. Кількість x_{ij} речовини, що проходить через ребро (i, j) за одиницю часу, називається *потоком по ребру* (i, j). У теорії потоків передбачається, що якщо з вершини v_i у вершину v_j прямує потік величиною x_{ij} то величина потоку з v_j у вершину v_i дорівнює $-x_{ij}$, тобто

$$x_{ji} = -x_{ij}. \qquad (15.1)$$

Приймається також, що $x_{ii} = 0$. Сукупність $X = (x_{ij})$ потоків по всіх ребрах (i, j) мережі називають *потоком по мережі* або просто *потоком*.

Потік по кожному ребру не перевищує його пропускну здатність:

$$0 \le x_{ij} \le r_{ij},\ (i, j) \in E \qquad (15.2)$$

Кількість речовини, що втікає у вершину, дорівнює кількості речовини, що витікає з неї:

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 0,\ \ i \ne S, t. \qquad (15.3)$$

Формуючи потік на мережі, необхідно враховувати властивості (15. 1) — (15.3). З властивостей потоків по ребрах мережі витікає, що загальна кількість речовини, витікаючої з джерела S, співпадає із загальною кількістю речовини, що надходить до стоку *t*, тобто

$$f = \sum_j x_{Sj} = \sum_i x_{it} \qquad (15.4)$$

Лінійну функцію *f* називають *потужністю потоку на мережі*.

Основна задача. Для заданої транспортної мережі знайти потік, який має найбільшу величину. Такий потік називається *максимальним.* Це означає: знайти сукупність $X = (x_{ij})$ потоків x_{ij} по всіх ребрах (i, j) мережі, яка задовольняє умовам (15.1) - (15.3) і максимізує функцію (15.4).

15.3. Розріз. Пропускна здатність розрізу

Щоб привести алгоритм розв’язання сформульованої основної задачі, потрібно нагадати деякі важливі поняття. Припустимо, що дана деяка мережа *G* = (*V, E*). Розіб'ємо множину вершин *V* цієї мережі на дві підмножини *A* та

B, що не перетинаються, так, щоб джерело S потрапило до підмножини A, а стік t – до підмножини B. В цьому випадку кажуть, що на мережі проведений розріз, що відокремлює джерело S від стоку t. Точніше: сукупність ребер (*i, j*), початкові вершини яких належать підмножині *A*, а кінцеві – підмножині *B*, називають *розрізом мережі* і позначають $A \backslash B$.

Якщо на мережі заданий деякий потік $X = \left(x_{ij} \right)$, то ребро (*i, j*) називають *насиченим*, якщо потік x_{ij} по ньому співпадає з його пропускною спроможністю r_{ij} $\left(x_{ij} = r_{ij} \right)$, і *ненасиченим*, якщо потік менший від пропускної спроможності $\left(x_{ij} < r_{ij} \right)$. Величина

$$R(A \backslash B) = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} r_{ij}$$

є сумою пропускних спроможностей r_{ij} всіх ребер розрізу і називається *пропускною спроможністю розрізу*. Величина

$$X(A \backslash B) = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} x_{ij},$$

що є сумою потоків x_{ij} по всіх ребрах розрізу, називається *потоком через розріз*. Важливе значення має наступна теорема.

Теорема *(Форда – Фалкерсона)*. Для довільної мережі з одним джерелом S і одним стоком t величина максимального потоку із S в t дорівнює пропускній спроможності мінімального розрізу , який відокремлює S від t.

15.4.Алгоритм побудови максимального потоку

Наведемо один із алгоритмів побудови максимального потоку.

1. Будується деякий початковий потік $X^0 = \left(x_{ij}^0 \right)$.

2. Організовується процедура складання підмножини *A* вершин, досяжних з джерела *S* по ненасичених ребрах. Якщо в цьому процесі стік *t* не потрапить до підмножини *A*, то побудований потік є максимальним і задача

розв'язана. Якщо ж t потрапив до А, то перейти до наступного пункту алгоритму.

3. Виділити шлях із S в t, що складається з ненасичених ребер, і збільшити потік x_{ij} по кожному ребру цього шляху на величину

$$\Delta = \min\left(r_{ij} - x_{ij} \right),$$

де мінімум береться по ребрах (i, j) згаданого шляху. Тим самим буде побудований новий потік $X^1 = \left(x_{ij}^1 \right)$. Після цього потрібно повернутися до п. 2 алгоритму.

Приклад 15.1 . На мережі (рис. 15.1) вказані пропускні спроможності ребер, однакові в обох напрямках.

Потрібно: 1) сформувати на мережі потік максимальної потужності, що виходить з джерела S і входить в стік t; 2) виписати ребра, які утворюють розріз мінімальної пропускної спроможності.

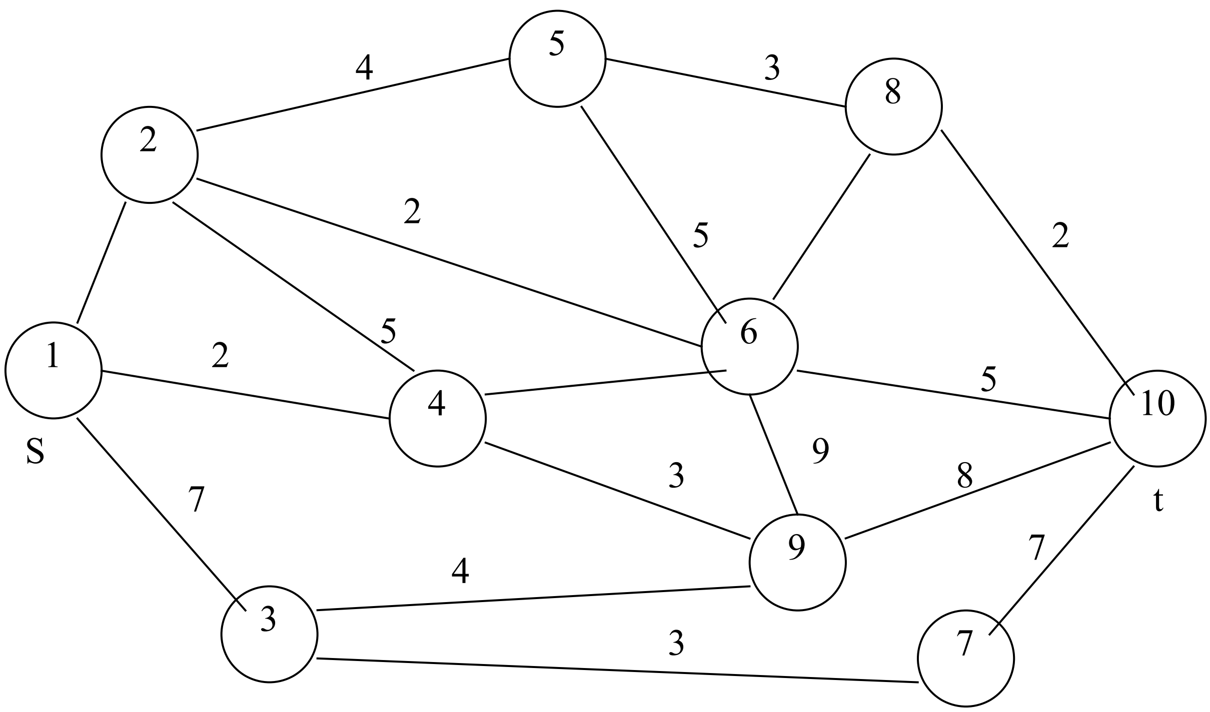

Рис. 15.1

Розв'язання. 1. Сформуємо на мережі початковий потік X^o. Виберемо шляхи із джерела до стоку, наприклад:

а) 1-2-5-8-10 → min {8; 4; 3; 2}=2,   б) 1-2-6-10   → min {6; 2; 5}= 2, в) 1-4-5-10 → min {2; 7; 3}= 2, г) 1-2-4-9-10 → min {4; 5; 3; 8}= 3,

д) 1-3-9-10 → min {7; 4; 5}= 4, е) 1-3-7-10 → min {3; 3; 7}= 3.

Записуємо матрицю R пропускних спроможностей і початковий потік X^o.

R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	8	7	2	0	0	0	0	0	0
2	8	0	0	5	4	2	0	0	0	0
3	7	0	0	0	0	0	3	0	4	0
4	2	5	0	0	0	7	0	0	3	0
5	0	4	0	0	0	5	0	3	0	0
6	0	2	0	7	5	0	0	7	9	5
7	0	0	3	0	0	0	0	0	0	7
8	0	0	0	0	3	7	0	0	0	2
9	0	0	4	3	0	9	0	0	0	8
10	0	0	0	0	0	5	7	2	8	0

X^o	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	7	7	2	0	0	0	0	0	0
2	-7	0	0	3	2	2	0	0	0	0
3	-7	0	0	0	0	0	3	0	4	0
4	-2	-3	0	0	0	2	0	0	3	0
5	0	-2	0	0	0	0	0	2	0	0
6	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	4
7	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	3
8	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	2
9	0	0	-4	-3	0	0	0	0	0	7
10	0	0	0	0	0	-4	-3	-2	-7	0

Знаходимо матрицю R - X^o.

R-X^o	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	15	0	0	2	2	0	0	0	0	0
3	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	4	8	0	0	0	5	0	0	0	0
5	0	6	0	0	0	5	0	1	0	0
6	0	4	0	9	5	0	0	7	9	1
7	0	0	6	0	0	0	0	0	0	4
8	0	0	0	0	5	7	0	0	0	0
9	0	0	8	6	0	9	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	9	10	4	15	0

За цією матрицею складемо список вершин, в які можна потрапити із джерела S, рухаючись по ненасичених ребрах:

110||6 ,6||4 ,4||2 ,2||.

Оскільки одержаний список містить стік t, то потік не є максимальним; його можна збільшити. Із матриці $R - X^o$ видно, що по шляху 1-2-4-6-10 можна збільшити потік на величину

$$\Delta = \min \{1; 2; 5; 1\} = 1.$$

Приходимо до матриці X^1:

X^1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	8	7	2	0	0	0	0	0	0
2	-8	0	0	4	2	2	0	0	0	0
3	-7	0	0	0	0	0	3	0	4	0
4	-2	-4	0	0	0	3	0	0	3	0
5	0	-2	0	0	0	0	0	2	0	0
6	0	-2	0	-3	0	0	0	0	0	5
7	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	3
8	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	2
9	0	0	-4	-3	0	0	0	0	0	7
10	0	0	0	0	0	-5	-3	-2	-7	0

Виписуємо матрицю $R - X^1$:

R-X^1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	16	0	0	1	2	0	0	0	0	0
3	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	4	9	0	0	0	4	0	0	0	0
5	0	6	0	0	0	5	0	1	0	0
6	0	4	0	10	5	0	0	7	9	0
7	0	0	6	0	2	0	0	0	0	4
8	0	0	0	0	5	7	0	0	0	0
9	0	0	8	6	0	9	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	10	10	4	15	0

Видно, що $r_{1j} - x_{1j}^{1} = 0$, тому всі ребра, що виходять з джерела S=1 є насиченими. Це означає, що не існує більше ненасиченого шляху із S в t і одержаний потік є максимальної потужності.

Ребра 1-2, 1-3, 1-4 утворюють розріз мінімальної пропускної спроможності, через який протікає потік 8+2+7= 17 од.

Література

1. Бондаренко М.Ф. Комп’ютерна дискретна математика : Підручник / М.Ф. Бондаренко, Н.В. Білоус, А.Г. Руткас. – Харків: “Компанія СМІТ”, 2004. – 480 с.

2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков. – СПб.: Питер, 2000. –304 с.