

# Лекція 1. Елементи теорії похибок . Методи розв'язування алгебраїчних рівнянь.

## ПЛАН

1. Класифікація похибок.
2. Абсолютна і відносна похибки.
3. Постановка задачі наближеного розв'язування нелінійного рівняння.
4. Відокремлення коренів
5. Метод поділу відрізка навпіл (бісекції)
6. Метод Ньютона (дотичних)

### 1.1. Класифікація похибок.

Числові методи відносяться до основних методів розв'язування задач математики і різних її прикладних застосувань. Ці методи характеризуються тим, що зводять процес розв'язування математичної задачі до деякої скінченної послідовності операцій над числами і приводять до результатів, представлених у вигляді чисел, числових векторів і матриць, числових таблиць тощо. Значення числових методів зростає паралельно з розвитком обчислювальної техніки. В той же час отримані числовими методами результати зазвичай містять похибки і є лише деякими наближеннями до шуканих відповідей. Викликано це низкою об'єктивних причин. Щоб їх з'ясувати, проаналізуємо основні етапи розв'язування прикладних математичних задач, а саме:

- 1) побудова математичної моделі задачі;
- 2) визначення початкових даних;
- 3) розв'язування отриманої математичної задачі.

Похибки з'являються вже на першому етапі, оскільки математична модель практичної задачі — це наближений опис задачі мовою математики; в ній взаємозв'язки між реальними параметрами замінюються на математичні поняття і співвідношення. Заради того, щоб отримана математична модель виявилася зручною для подальших досліджень, в ній враховують лише найбільш важливі параметри, умови і особливості початкового завдання. Тому жодна математична модель не може абсолютно точно описати досліджуване явище; чим менше чинників відкидається, тим точнішою буде модель.

Вибравши певну модель, стикаються з тим, що числові параметри цієї моделі та початкові дані одержані з деякою похибкою внаслідок експериментів або вимірювань.

В більшості випадків наявні в математичній моделі рівняння, нерівності чи їх системи не можливо розв'язати аналітично, тому використовується якийсь наближений числовий метод розв'язування. При цьому виникає похибка методу.

Застосування комп'ютерних засобів при розв'язуванні прикладних задач приводить до похибки комп'ютерної арифметики, яка є наслідком

машинних заокруглень в процесі розрахунків. Це пов'язано з обмеженістю розрядної сітки представлення чисел в комп'ютері.

Отже, основними джерелами похибок є:

- заміна реального завдання математичною моделлю;
- труднощі у визначенні точних початкових даних;
- застосування наближених методів;
- арифметичні дії над наближеними числами;
- обчислення значень функцій;
- заокруглення чисел;
- обмеженість розрядної сітки обчислювальних пристроїв.

### 1.2. Абсолютна і відносна похибки.

Нехай  $A$  – точне числове значення деякої величини, а  $a$  – відоме наближення до нього; позначається  $A \approx a$ . Наприклад, у співвідношеннях  $\pi \approx 3,14$  або  $\pi \approx 3,142$  число  $\pi$  є точним, а числа 3,14 та 3,142 – його наближені значення.

*Означення 1.* Абсолютною похибкою  $\Delta$  наближеного числа  $a$  називається абсолютна величина різниці між відповідним точним числом  $A$  і числом  $a$ , тобто

$$\Delta = |A - a|. \quad (1.1)$$

Тут слід розрізняти два випадки:

1) число  $A$  нам відомо, тоді абсолютна похибка  $\Delta$  легко визначається за формулою (1.1);

2) число  $A$  нам не відоме, що практично буває найчастіший, а тому ми не можемо визначити і абсолютну похибку  $\Delta$  за формулою (1.1).

В цьому випадку корисно замість невідомої теоретичної абсолютної похибки  $\Delta$  ввести її верхню оцінку, яку називають граничною абсолютною похибкою.

*Означення 2.* Невід'ємне число  $\Delta_a$ , яке задовольняє нерівність

$$\Delta = |A - a| \leq \Delta_a \quad (1.2)$$

називається *граничною абсолютною похибкою* наближеного значення  $a$ .

Звідси випливає, що точне значення числа  $A$  знаходиться в межах

$$a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a \quad (1.3)$$

**Приклад 1.1.** Визначити граничну абсолютну похибку числа  $a = 3,14$ , яке є наближеним значенням числа  $\pi$ .

*Розв'язання.* Оскільки має місце нерівність  $3,14 < a < 3,15$ , то  $|a - \pi| < 0,01$  і, отже, можна прийняти  $\Delta_a = 0,01$ . Якщо врахувати, що  $3,14 < \pi < 3,142$ , то матимемо кращу оцінку:  $\Delta_a = 0,002$ .

Отже, під граничною абсолютною похибкою наближеного числа  $a$  розуміється будь-яке із невід'ємних чисел  $\Delta_a$ , що задовольняють нерівності (1.2). З практичної точки зору за  $\Delta_a$ , доцільно вибирати якнайменше число, що задовольняє нерівності (1.2).

*Означення 3.* Якщо відома абсолютна похибка  $\Delta_a$  наближеного значення  $a$ , то  $a$  називають наближенням до  $A$  з точністю до  $\Delta_a$

### **1.3. Постановка задачі наближеного розв'язування нелінійного рівняння.**

Часто при вирішенні наукових або інженерних проблем виникає потреба знаходження коренів нелінійного (алгебраїчного або трансцендентного) рівнянь виду

$$f(x) = 0. \quad (1.3)$$

Знайти точний розв'язок такого рівняння можливо лише в деяких частинних випадках. В більшості випадків для розв'язування рівняння (1.3) доводиться використовувати наближені числові методи. До таких належать методи ітерацій, які дозволяють отримувати наближений розв'язок із заданою точністю.

Нагадаємо, що число  $\xi$  називається коренем рівняння (1.3) або нулем функції  $f(x)$ , якщо при підстановці його замість  $x$  рівняння перетворюється на вірну числову тотожність. Розв'язати рівняння — це означає знайти множину всіх його коренів. Корінь рівняння може бути дійсним або комплексним. Займатимемося пошуком лише дійсних коренів. Будемо вважати, що рівняння (1.3) має лише ізольовані (локалізовані) корені. Корінь називається *ізольованим*, якщо існує такий непорожній інтервал, в якому цей корінь єдиний.

Наближене знаходження ізольованого дійсного кореня рівняння (1.3) ітераційним методом складається з двох етапів:

1) відокремлення (ізоляція) кореня, тобто встановлення відрізка  $[a, b]$ , що належить області визначення функції  $f(x)$ , на якому знаходиться лише один корінь рівняння  $f(x) = 0$ ;

2) уточнення значення кореня. Задача уточнення буде вирішена, якщо знайдеться число  $x$  таке, що  $|\xi - x| < \varepsilon$ ; тоді  $\xi \approx x$  з точністю до  $\varepsilon$ .

Початкове наближення  $x_0$  значення кореня можна знайти різними способами: графічно або прийняти  $x_0 = (a + b)/2$ , де  $[a, b]$  - відрізок ізоляції кореня  $\xi$ . Метод послідовних наближень полягає в послідовному уточненні початкового наближення  $x_0$ . Кожен такий крок називається *ітерацією*. В результаті ітерацій знаходиться послідовність  $x_1, x_2, \dots, x_n$  наближених значень кореня. Якщо ці значення із зростанням  $n$  наближаються до дійсного значення  $\xi$  кореня, то кажуть, що ітераційний процес збіжний. Як тільки виявиться, що  $|\xi - x_n| < \varepsilon$ , то приймається  $\xi \approx x_n$ .

### **1.4. Відокремлення коренів**

Відокремлення коренів рівняння зазвичай проводять графічно і (або) аналітично. Графічний спосіб відокремлення коренів рівняння (1.3) полягає в

знаходженні таких відрізків  $[a, b]$  з області визначення функції  $f(x)$ , всередині яких міститься абсциса точки перетину графіка функції  $y = f(x)$  з віссю  $Ox$ , тобто нуль функції  $f(x)$ . На рис. 1.1 відмічено два корені і відповідні їм відрізки.

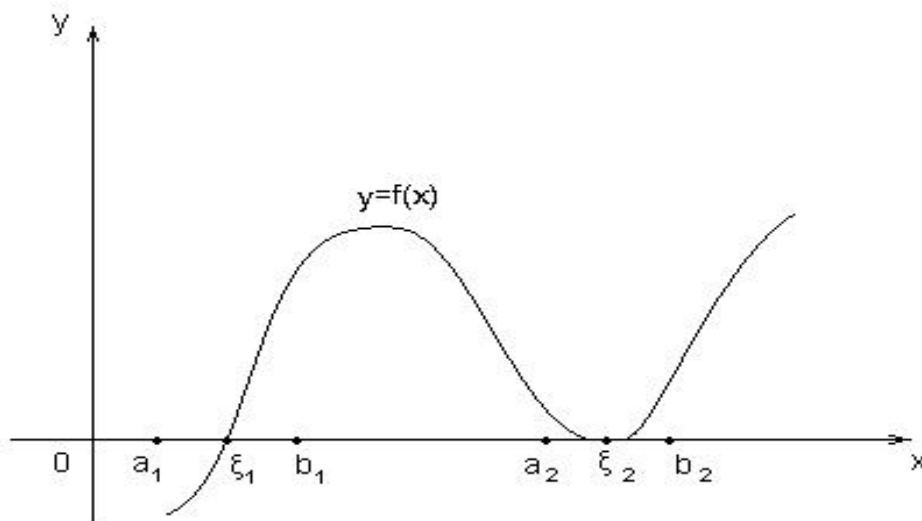


Рис 1.1

У багатьох випадках виявляється зручним замінити рівняння (1.3) рівносильним йому рівнянням

$$p(x) = g(x), \quad (1.4)$$

де  $p(x)$  і  $g(x)$  - функції, графіки яких будуються легше, ніж графік функції  $f(x)$ . Коренями рівняння (1.4) є абсциси точок перетину ліній  $y = p(x)$  і  $y = g(x)$  (рис. 1.2).

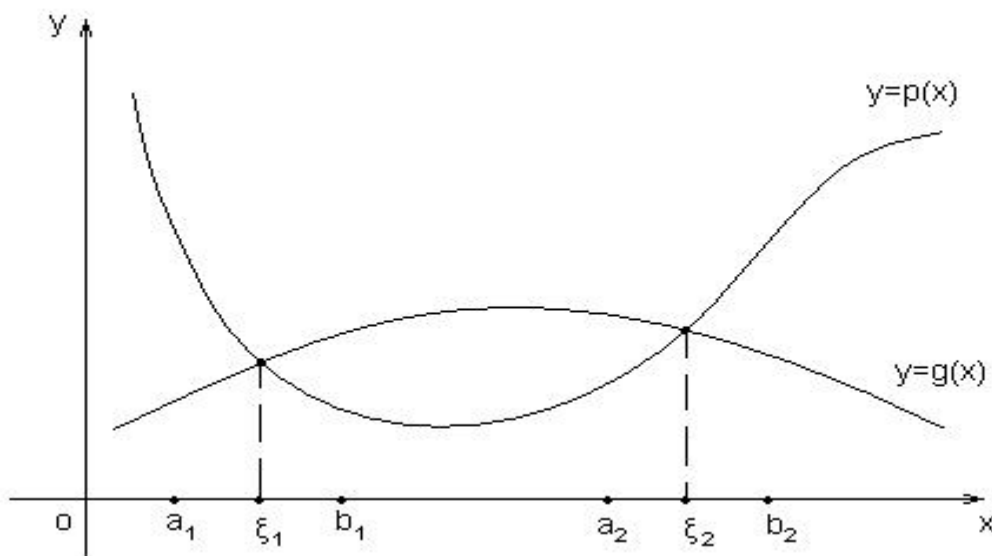


Рис 1.2

Графічний спосіб застосовується найчастіше. Зазвичай з нього і починають відокремлення коренів. Проте йому не притаманна велика точність, і тому робити остаточні висновки не завжди можливо на підставі

графічних міркувань. Отже, результати графічного методу необхідно перевіряти і уточнювати. Робиться це *аналітичними* методами.

Аналітичний спосіб відокремлення коренів ґрунтується на наведених нижче теоремах із математичного аналізу.

**Теорема 1.1** (*перша теорема Больцано- Коші*). Нехай функція  $f(x)$  неперервна на відріжку  $[a, b]$  і на його кінцях набуває значення різних знаків, тобто  $f(a)f(b) < 0$ . Тоді існує принаймні одна точка  $\xi \in (a, b)$ , в якій значення функції дорівнює нулю:  $f(\xi) = 0$ .

**Теорема 1.2.** Якщо функція  $f(x)$  диференційовна на інтервалі  $(a, b)$  і  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) для всіх  $x \in (a, b)$ , то вона зростає (спадає) на  $(a, b)$ .

Наприклад, рівняння  $x^5 - 4x^2 + x - 2 = 0$  має принаймні один корінь, оскільки функція  $f(x) = x^5 - 4x^2 + x - 2$  визначена і неперервна на множині дійсних чисел і

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Далі береться декілька проміжних точок з області неперервності функції  $f(x)$ , підбір яких залежить від її властивостей, і обчислюються значення функції в них. Якщо в двох вибраних сусідніх точках з одного і того ж проміжку неперервності функції відбудеться зміна знаку, то згідно з теоремою 1.1 між ними є корінь.

Слід відзначити, що теорем 1.1 і 1.2 недостатньо для виявлення і ізоляції всіх коренів рівняння  $f(x) = 0$ . Корінь може бути всередині  $[a, b]$  і при однакових знаках  $f(a)$ ,  $f(b)$ . Такими коренями можуть бути точки максимуму або мінімуму функції  $f(x)$ . Щоб їх виявити, не потрібно проводити повне дослідження функції на екстремум, досить знайти підозрілі на екстремум точки  $\xi$  і обчислити в них значення функції. Якщо  $f(\xi) = 0$ , то  $\xi$  - корінь.

**Теорема 1.3.** (*теорема Ролля*) Якщо функція  $f(x)$ :

- 1) неперервна на відріжку  $[a, b]$ ;
- 2) має скінченну похідну на інтервалі  $(a, b)$ ;
- 3)  $f(a) = f(b)$ .

Тоді знайдеться принаймні одна точка  $c \in (a, b)$ , в якій  $f'(c) = 0$ .

Теорема Ролля допомагає встановити, скільки всього різних коренів може мати рівняння.

### **1.5. Метод поділу відрізка навпіл (бісекції)**

Це один з найпростіших методів знаходження коренів нелінійних рівнянь. Він полягає в наступному. Нехай функція  $f(x)$  неперервна на відріжку  $[a, b]$  і  $f(a)f(b) < 0$  (рис. 1.3). Розділимо відрізок  $[a, b]$  навпіл точкою  $c = (a + b)/2$  і обчислимо  $f(c)$ .

Якщо  $f(c) = 0$ , то корінь  $\xi$  знайдено точно:  $\xi = c$ . Якщо ж ні, виберемо ту половину відрізка, на кінцях якої значення функції різних знаків, і позначимо

її  $[a_1, b_1]$  (на рис. 1.3 права половина відрізка  $[a, b]$ ). Потім відрізок  $[a_1, b_1]$  ділимо навпіл точкою  $c_1 = (a_1 + b_1)/2$  і проводимо аналогічні міркування. Одержимо або точний корінь  $c_1$ , або відрізок  $[a_2, b_2]$  з властивістю  $f(a_2)f(b_2) < 0$ . І так далі.

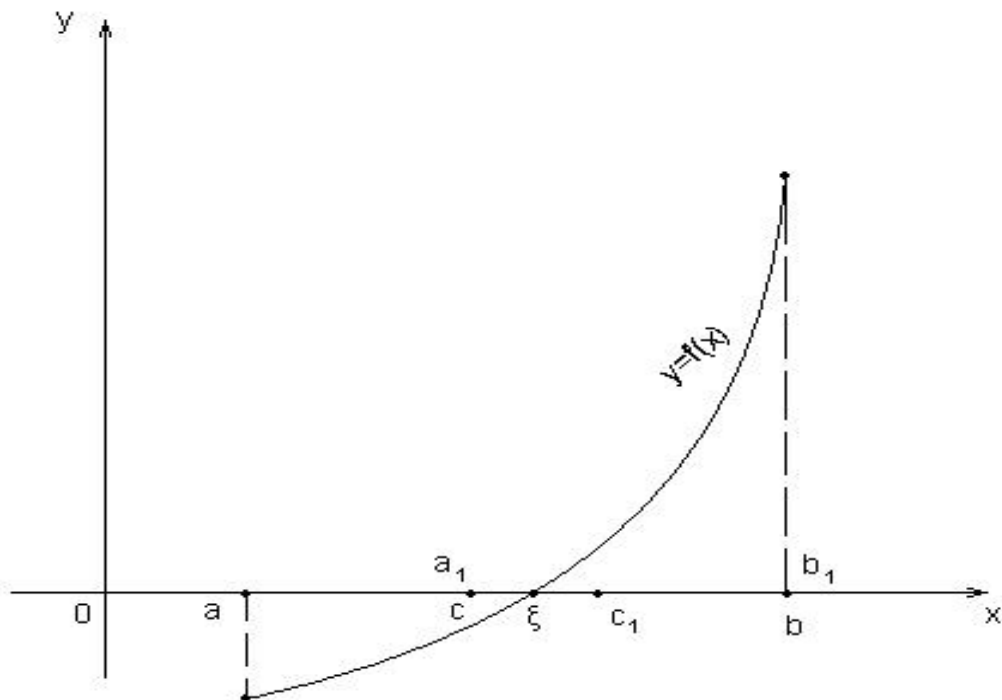


Рис. 1.3

Якщо на якомусь кроці виявиться точний корінь, то процес ділення навпіл закінчиться; якщо ж ні, то в результаті вийде нескінченна послідовність вкладених відрізків  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$  таких, що  $f(a_n)f(b_n) < 0$  при всіх  $n = 1, 2, \dots$

Оскільки  $b_n - a_n = (b - a)/2^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то отримана послідовність відрізків є такою, що стягується; існує єдина точка, яка належить всім відрізкам цієї послідовності.

Для того, щоб знайти наближене значення кореня з точністю до  $\varepsilon > 0$ , необхідно зупинити процес половинного поділу на такому кроці  $n$ , на якому відрізок  $[a_n, b_n]$  матиме довжину

$$b_n - a_n = (b - a)/2^n \leq 2\varepsilon$$

і обчислити  $x = (a_n + b_n)/2$ . Ясно, що тоді можна взяти  $\xi \approx x$ , причому  $|\xi - x| \leq \varepsilon$ . При цьому абсолютна похибка становить

$$\Delta_n = (b_n - a_n)/2 = (b - a)/2^{n+1}. \quad (1.5)$$

Метод поділу відрізка навпіл збігається повільно. Кількість кроків наближення залежить від відрізка  $[a, b]$  і заданої точності  $\varepsilon$ , причому на кожному кроці абсолютна похибка наближеного значення кореня зменшується вдвічі. Внаслідок цього збільшення точності завжди пов'язане з пропорційним зростанням обсягу обчислювальної роботи.

**Приклад 1.2.** Переконайтесь графічно, що єдиний корінь  $\xi$  рівняння  $x^3 - x - 1 = 0$  належить відрізку  $[1; 2]$ . Методом половинного поділу відрізка уточнити корінь з точністю до двох знаків.

*Розв'язання.* Побудуємо графіки функцій  $p(x) = x^3$ ,  $g(x) = x + 1$  (рис 1.4).

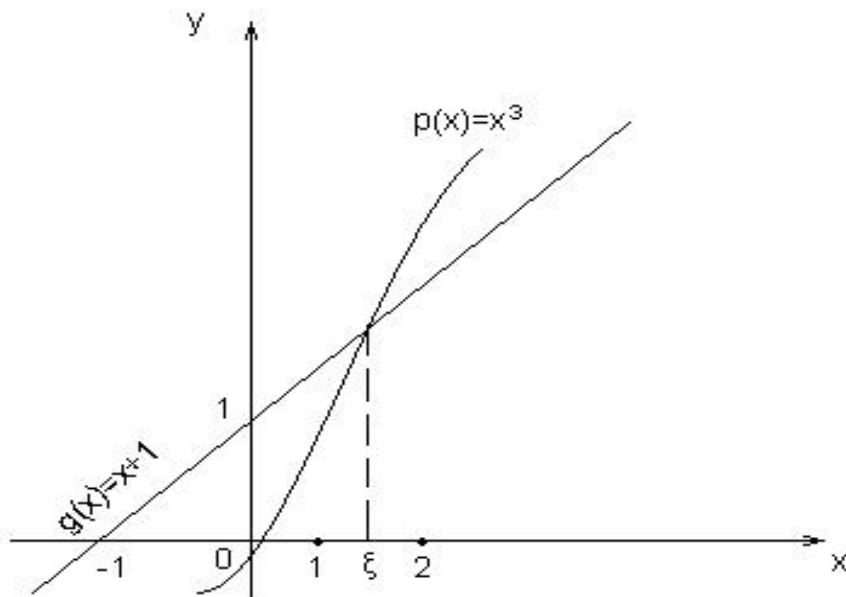


Рис. 1.4

Видно, що вони перетинаються в єдиній точці, яка належить відрізку  $[1; 2]$ . Для уточнення  $\xi$  можна скористатись методом половинного поділу, оскільки функція  $f(x) = x^3 - x - 1$  неперервна на цьому відрізку і на його кінцях приймає значення різних знаків:  $f(1) = -1 < 0$ ,  $f(2) = 5 > 0$ .

Знайдемо середину  $c = 1,5$  відрізка  $[1; 2]$  і обчислимо значення функції в цій точці:  $f(1,5) = 0,875$ . Значить, число 1,5 не є точним коренем. Якщо взяти  $\xi \approx 1,5$ , то  $\Delta_{1,5} = (2 - 1)/2 = 0,5$ . Точність наближення невисока, але цифра 1 вже є вірною

Далі, бачимо, що  $f(1) = -1 < 0$ ,  $f(1,5) = 0,875 > 0$  і, отже, корінь належить відрізку  $[a_1, b_1] = [1; 1,5]$ . Ділимо навпіл отриманий відрізок точкою  $c_1 = 1,25$  і знаходимо  $f(1,25) \approx -0,3$ . Абсолютна похибка наближеного кореня 1,25 становить 0,25. Точність підвищилася, але мало, оскільки вірних цифр у наближення не додалося.

На наступному кроці беремо  $[a_2, b_2] = [1,25; 1,5]$  і  $c_2 = 1,375$ .

Оскільки  $\Delta_{c_2} = 0,125$ , знову гарантується тільки одна вірна цифра наближеного числа 1,375.

Продовжуючи аналогічно, маємо:

$$[a_3, b_3] = [1,25; 1,375], \quad c_3 = 1,325, \quad \Delta_{c_3} = 0,06254, \quad f(c_3) \approx -0,05;$$

$$[a_4, b_4] = [1,3125; 1,375], \quad c_4 = 1,34375, \quad \Delta_{c_4} = 0,03125.$$

Отже, отримали наближене значення кореня з двома вірними цифрами  $\xi \approx c_4 \approx 1,34$ .

### 1.6. Метод Ньютона (дотичних)

Нехай виконуються умови, наведені вище, щодо рівняння  $f(x) = 0$ . В подальшому знадобиться формула Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \quad (1.6)$$

Співвідношення (1.6) називається формулою Тейлора для функції  $f(x)$ , а вираз  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$  - залишковим членом у формі Лагранжа.

Нехай  $\xi$  — точний корінь рівняння (1.3) належить інтервалу  $(a, b)$  і нехай відоме якесь наближення  $\xi \approx x_n$ ,  $x_n \in [a; b]$  (наприклад, початкове наближення  $x_0$ ). Тоді між значеннями  $\xi$  і  $x_n$  знайдеться така точка  $c_n$ , що виконується рівність

$$0 = f(\xi) \approx f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2} f''(c_n)(\xi - x_n)^2. \quad (1.7)$$

Якщо значення  $x_n$  достатньо близьке до  $\xi$ , то  $(\xi - x_n)^2$  є малим, тому третім доданком в правій частині (1.7) можна знехтувати і отримати наближену рівність

$$0 \approx f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n).$$

Звідси виражаємо  $\xi \approx x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ . Одержали нове наближення до  $\xi$ , яке приймемо за  $x_{n+1}$ , тобто

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

Одержана рекурентна формула не залежить від знаків похідних функції  $f(x)$  і пов'язаних з ними особливостей її графіка на відрізку  $[a; b]$ .

Геометричний зміст методу полягає в тому, що обчислені наближення дорівнюють абсцисам точок перетину осі  $Ox$  і дотичних до графіка функції  $y = f(x)$ . Переконаємось в цьому, розглянувши для визначеності випадок  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$  на  $[a; b]$  (рис. 1.5).

Візьмемо  $x_0 = b$  і проведемо дотичну до графіка функції в точці  $B(x_0; f(x_0))$ :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Дотична перетне вісь  $Ox$  при  $y = 0$ . Підставивши  $y = 0$  в рівняння

дотичної, отримаємо абсцису точки перетину  $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ . Аналогічно, скориставшись рівнянням дотичної до графіка в точці ці  $B_1(x_1; f(x_1))$ , при  $y=0$  отримаємо  $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$  і т.д. Бачимо, що кожного разу абсциси точок перетину дотичних з віссю  $Ox$  обчислюються за формулою (1.8), причому завжди виконуються  $a < \xi \leq x_{n+1} < x_n \leq b$ .

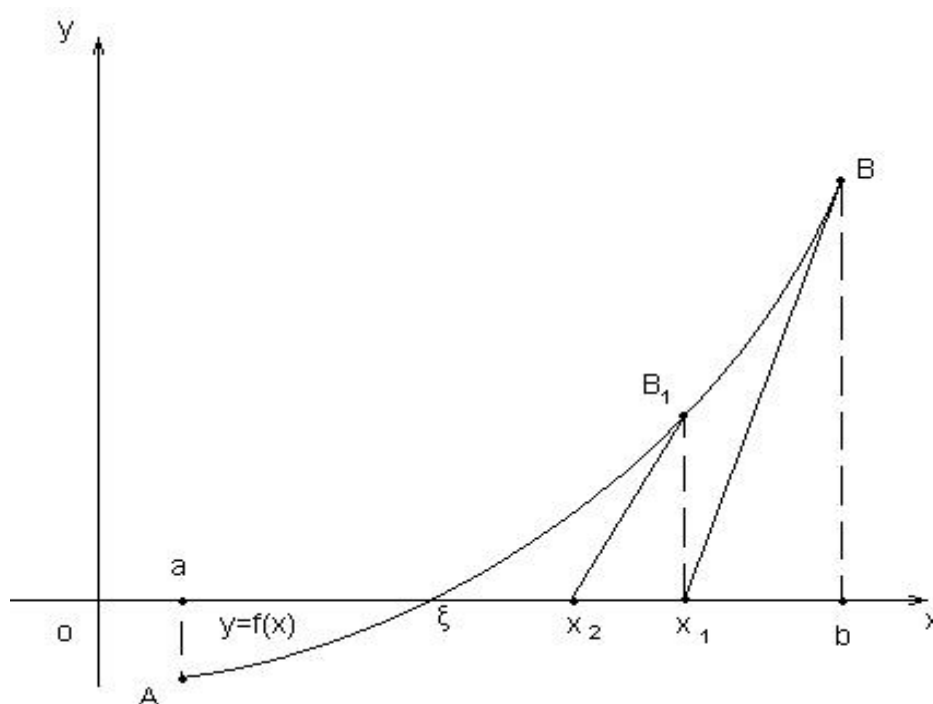


Рис. 1.5

Тут важливим є питання про вибір початкового наближення  $x_0 \in [a; b]$ . Неважко переконатись графічно в загальному правилі вибору початкового наближення для методу Ньютона: якщо похідні  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  мають однакові знаки на відрізку  $[a; b]$ , то слід брати  $x_0 = b$  (правий кінець відрізка), а якщо вони різних знаків, то  $x_0 = a$  (лівий кінець відрізка).

**Приклад 1.3.** Знайти методом дотичних наближення  $x_1$  до кореня  $\xi \in [1; 2]$  рівняння  $x^3 - x - 1 = 0$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$ ,  $f''(x) = 6x > 0$  на відрізку  $[1; 2]$ , то вибираємо  $x_0 = 2$ . Рекурентна формула (1.8) набуває вигляду

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}.$$

Підставимо  $x_0$  в праву частину цієї формули і після заокруглення результату до трьох значущих цифр отримаємо  $x_1 = 1,55$ .

Покажемо, що послідовність наближень (1.8) є збіжною.

**Теорема 1.4.** Нехай корінь  $\xi$  рівняння (1.3) відокремлений на відріжку  $[a, b]$ ,  $f(a)f(b) < 0$  і похідні  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  неперервні і зберігають постійний знак при всіх  $x \in [a, b]$ . Тоді ітераційна послідовність  $\{x_n\}$ , яка визначається формулою (1.8) з відповідним початковим наближенням  $x_0 \in [a, b]$ , є збіжною до кореня  $\xi$ .

Наведемо ще одну формулу для оцінки точності наближень  $x_n$ .

**Теорема 1.5.** Нехай перша і друга похідні функції  $f(x)$  неперервні і мають сталий знак на відріжку  $[a; b]$  ізоляції кореня  $\xi$  рівняння  $f(x) = 0$ .

Нехай також  $f(a)f(b) < 0$ , а додатні числа  $m$  і  $M_2$  такі, що  $|f'(x)| \geq m$ ,  $|f''(x)| \leq M_2$ ,  $x \in [a; b]$ . Тоді похибка наближень до  $\xi$ , знайдених методом дотичних, оцінюються формулою

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m} (x_n - x_{n-1})^2, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.9)$$

Співвідношення (1.9) дозволяє знайти абсолютну похибку наближення  $x_n$  і виявити умову закінчення ітераційного процесу методу дотичних при обчисленні кореня з точністю до  $\varepsilon > 0$ .

*Зауваження.* Якщо відрізок  $[a; b]$  настільки малий, що на ньому виконується нерівність  $M_2 \leq 2m$ , то похибка наближень  $x_n$  оцінюються за формулою

$$|\xi - x_n| \leq (x_n - x_{n-1})^2, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.10)$$