

Лекція 2. Наближені методи пошуку коренів алгебраїчного рівняння.

ПЛАН

1. Метод хорд (січних)
2. Комбінований метод хорд та дотичних
3. Метод простої ітерації
4. Достатня умова збіжності ітераційного процесу.

2.1. Метод хорд (січних)

Розглянемо більш швидкі методи знаходження коренів рівняння (1.3).

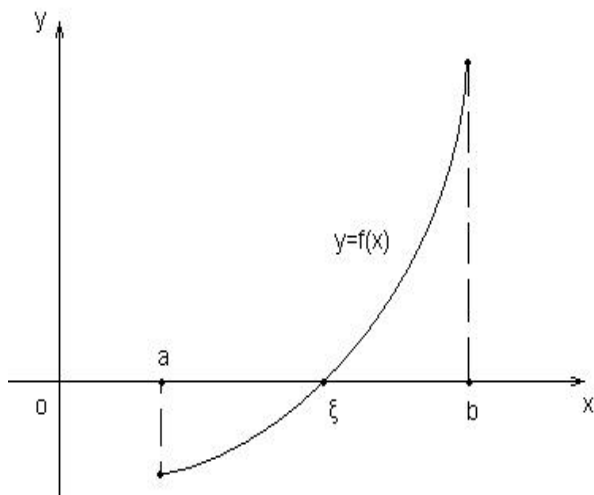
До таких належать методи хорд і дотичних. Ці методи ґрунтуються на послідовних наближеннях.

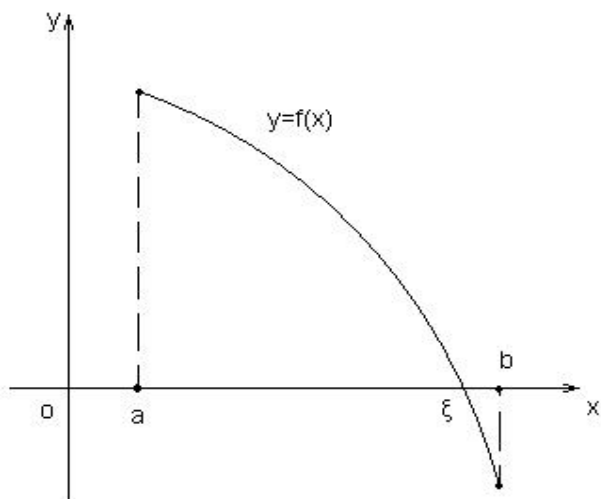
Наближення до кореня знаходяться так: якщо відоме попереднє наближення x_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), то наступне наближення x_{n+1} обчислюється за формулою

$$x_{n+1} = P(x_n), \quad (2.1)$$

де P - деякий вираз, що встановлює зв'язок між попереднім і наступним наближеннями. Починається процес з деякого числа x_0 із відрізка ізоляції кореня - *початкового наближення*. Формула виду (2.1) називається *рекурентною*, а одержану за її допомогою послідовність наближень називають *ітераційною послідовністю*.

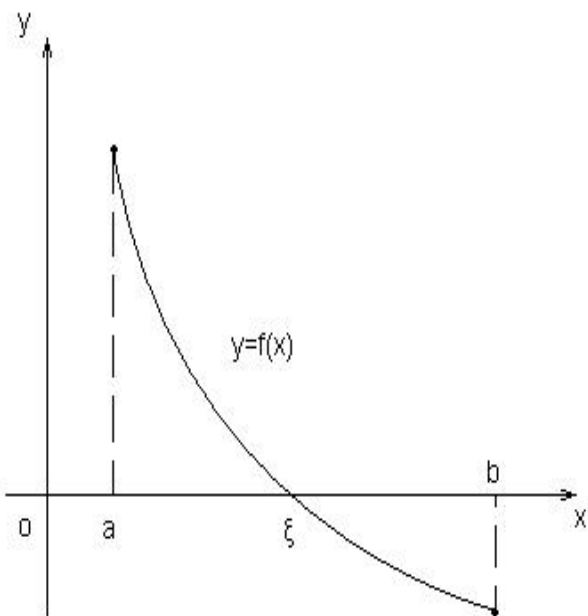
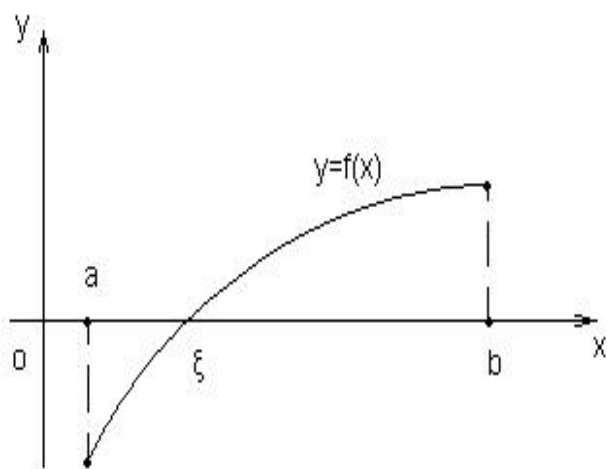
Нехай задано рівняння (1.3): $f(x) = 0$, корінь ξ якого відокремлений на відрізку $[a, b]$. При уточненні кореня вважатимемо, що на кінцях відрізка значення функції $f(x)$ мають різні знаки: $f(a)f(b) < 0$ і, крім того, дана функція має неперервні похідні $f'(x)$, $f''(x)$, які є відмінними від нуля і зберігають сталий знак при всіх $x \in [a, b]$.





a)

б)



в)

г)

Рис. 2.1

З курсу вищої математики відомо, що за умови $f'(x) > 0$ при $x \in [a, b]$ функція зростає на цьому відрізку; при $f'(x) < 0$ - спадає; за умови

$f''(x) > 0$ графік функції буде вгнутий, а при $f''(x) < 0$ - опуклий на відрізку $[a, b]$. При цьому можливі наступні чотири випадки розміщення дуги кривої $y = f(x)$ на даному відрізку (рис. 2.1):

- а) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$; б) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$;
 в) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$; г) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$.

Припустимо, що похідні $f'(x), f''(x)$ не дорівнюють нулю і зберігають знак, наприклад, $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ при всіх $x \in [a, b]$. Тоді $f(a) < 0, f(b) > 0$. Побудуємо ітераційну послідовність, взявши за x_0 лівий кінець відрізка - число a . З'єднаємо точки $A(x_0; f(x_0))$ і $B(b; f(b))$ відрізком (хордою) (рис. 2.2).

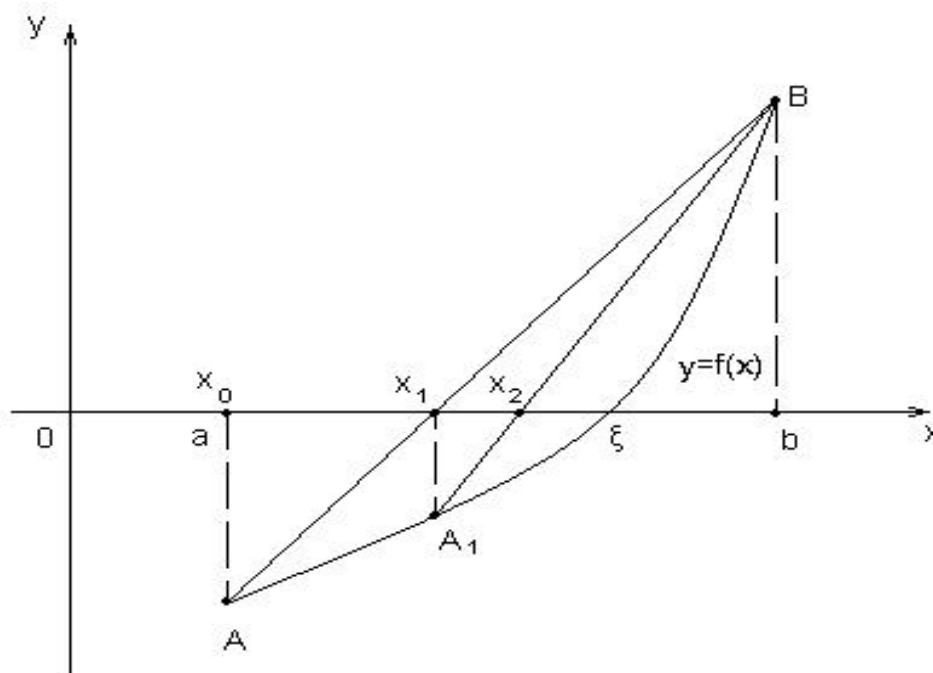


Рис.2.2

Абсцису точки перетину хорди AB з віссю Ox візьмемо за x_1 . Рівнянням хорди AB буде: $\frac{x-x_0}{b-x_0} = \frac{y-f(x_0)}{f(b)-f(x_0)}$. Звідси, прийнявши $y = 0$, знаходимо

$x=x_1$:

$$x_1 = x_0 - \frac{b-x_0}{f(b)-f(x_0)} f(x_0).$$

Далі запишемо рівняння хорди, що сполучає точки $A_1(x_1; f(x_1))$ та $B(b; f(b))$;

при $y = 0$ одержимо $x=x_2$ - абсцису точки перетину хорди A_1B з віссю Ox :

$$x_2 = x_1 - \frac{b-x_1}{f(b)-f(x_1)} f(x_1).$$

Продовжуючи аналогічно, приходимо до ітераційної послідовності, яка обчислюється за рекурентною формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.2)$$

де за x_0 взято лівий кінець a відрізка $[a, b]$, а правий кінець b цього відрізка залишається нерухомим.

Зауваження. Якщо похідні $f'(x)$, $f''(x)$ набувають різних знаків на відріжку $[a, b]$, то рекурентна формула для рівняння (1.2) матиме вигляд

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} f(x_n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.3)$$

тут береться $x_0 = b$ (лівий кінець a нерухомий).

Переконаємось в збіжності ітераційної послідовності методу хорд за припущення, що $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ на $[a, b]$, проте це неважко зробити і за інших припущень щодо знаків похідних.

Теорема 2.1. Нехай корінь ξ рівняння (1.3) відокремлений на відріжку $[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$, а похідні $f'(x)$, $f''(x)$ неперервні і мають додатні значення при всіх $x \in [a, b]$. Тоді послідовність $\{x_n\}$, яка визначається формулою (2.2) при початковому наближенні $x_0 = a$, є збіжною до кореня ξ .

Для оцінки точності послідовних наближень скористаємось наступною теоремою.

Теорема 2.2. Нехай корінь ξ рівняння (1.3) відокремлений на відріжку $[a, b]$, і всі члени деякої послідовності $\{x_n\}$ наближень до ξ розташовані на цьому відріжку. Якщо похідна $f'(x)$ є скінченною на $[a, b]$ і існує таке число $m > 0$, що $|f'(x)| \geq m$ для всіх $x \in [a, b]$, то справедлива нерівність:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

Теорема 2.3. Нехай $f'(x)$ і $f''(x)$ неперервні і зберігають сталий знак на відріжку $[a, b]$ ізоляції кореня ξ рівняння (1.3), $f(a)$ і $f(b)$ мають протилежні знаки, а числа m і M такі, що $0 < m \leq |f'(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$. Тоді похибки наближень до ξ , знайдених методом хорд, оцінюються за формулою

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M - m}{m} |x_n - x_{n-1}|, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.5)$$

Формули (2.4) і (2.5) дають можливість визначати закінчення процесу наближень і знаходити абсолютні похибки кожного наближеного кореня. Якщо задана абсолютна похибка $\varepsilon > 0$, то процес зупиняється при виконанні однієї з нерівностей:

$$\frac{|f(x_n)|}{m} \leq \varepsilon \quad \text{або} \quad \frac{M - m}{m} |x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon.$$

Якщо процес ітерацій зупинено на якомусь кроці $n \geq 1$ і прийнято $\xi \approx x_n$, то абсолютну похибку наближення x_n можна визначити, використовуючи нерівності (2.4) і (2.5).

Зауваження. Якщо відрізок $[a, b]$ достатньо малий ($M \leq 2m$), то

нерівність (2.5) можна замінити простішим співвідношенням

$$|\xi - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|, \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2.6)$$

Приклад 2.1. Методом хорд знайти корінь ξ рівняння $x^3 - x - 1 = 0$ з точністю до $\varepsilon = 0,02$.

Розв'язання. Корінь даного рівняння є ізольований на відрізку $[1; 2]$. Оскільки функція $f(x) = x^3 - x - 1$ неперервна на цьому відрізку і на його кінцях приймає значення різних знаків ($f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 5 > 0$) і $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$, $f''(x) = 6x > 0$, $x \in [1; 2]$ (одного знаку), то скористаємось формулою (2.2) при $x_0 = 1$. Враховуючи, що $b = 2$, $f(x_n) = x_n^3 - x_n - 1$, $f(b) = 5$, рекурентна формула (2.2) в даному випадку матиме вигляд

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2 - x_n}{5 - f(x_n)} f(x_n).$$

Послідовно виконуючи обчислення за даною формулою при $n = 0, 1, 2, \dots$, знаходимо:

$$x_1 = 1 - \frac{2-1}{5+1}(-1) = 1 + 1/6 \approx 1,167, \quad f(x_1) \approx -0,578;$$

$$x_2 = 1,167 - \frac{2-1,167}{5+0,578}(-0,578) \approx 1,253, \quad f(x_2) \approx -0,286;$$

$$x_3 = 1,253 - \frac{2-1,253}{5+0,286}(-0,286) \approx 1,293, \quad f(x_3) \approx -0,131;$$

$$x_4 = 1,293 - \frac{2-1,293}{5+0,131}(-0,131) \approx 1,311, \quad f(x_4) \approx -0,058;$$

$$x_5 = 1,311 - \frac{2-1,311}{5+0,058}(-0,058) \approx 1,319, \quad f(x_5) \approx -0,024;$$

$$x_6 = 1,319 - \frac{2-1,319}{5+0,024}(-0,024) \approx 1,322, \quad f(x_6) \approx -0,01.$$

Скористаємось формулою (2.4) для визначення наближеного значення кореня із заданою точністю. Видно, що $\frac{|f(x_5)|}{m} = \frac{0,024}{2} \approx 0,01 < 0,02$, тому

$$|\xi - x_5| \leq 0,01, \text{ тобто } \xi \approx x_5 = 1,319 \approx 1,32.$$

Згідно з формулою (2.5) маємо

$$\frac{M-m}{m}|x_n - x_{n-1}| = \frac{11-2}{2}|x_6 - x_5| = 4,5(1,322 - 1,319) = 0,014 < 0,02,$$

тобто, $|\xi - x_6| \leq 0,01$ або $\xi \approx x_6 = 1,322 \approx 1,32$.

2.2. Комбінований метод хорд та дотичних

У кожному з можливих випадків щодо знаків $f'(x)$ і $f''(x)$ послідовні наближення методів хорд і дотичних лежать по різні боки від кореня ξ . Якщо позначити наближення методу хорд через x_n , наближення методу дотичних через y_n , то завжди виконуються нерівності. $x_n < \xi < y_n$ або $y_n < \xi < x_n$, причому

$x_n \rightarrow \xi$, $y_n \rightarrow \xi$ при $n \rightarrow \infty$. Відрізки з кінцями x_n , y_n стягуються до кореня ξ , тому процес уточнення з точністю до $\varepsilon > 0$ можна зупинити відразу ж, як тільки виявиться $|x_n - y_n| \leq 2\varepsilon$; за наближене значення кореня доцільно взяти середину відрізка між x_n і y_n : $\xi \approx \xi_n = \frac{x_n + y_n}{2}$.

Коли обчислення виконуються без заданої точності і на деякому кроці n за наближення до кореня вибрана середнє значення $\xi \approx \xi_n$, тоді абсолютна похибка становить $\Delta_n = \frac{|x_n - y_n|}{2}$.

Процес уточнення буде швидшим, якщо для обчислення x_{n+1} методом хорд замість відповідного нерухомого кінця відрізка $[a; b]$ використовувати знайдене методом дотичних наближення y_n , тобто коли хорди проводяться через точки графіка функції з абсцисами x_n і y_n . Саме при такому способі обчислень є сенс говорити про комбінований метод хорд і дотичних.

Обчислення пари чисел x_{n+1} , y_{n+1} потрібно починати з y_{n+1} , яке визначається за формулою методу дотичних:

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.7)$$

при початковому наближенні $y_0 = b$. Потім обчислюється x_{n+1} :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{y_n - x_n}{f(y_n) - f(x_n)} f(x_n), \quad (n=0, 1, 2, \dots); \quad (2.8)$$

При цьому, якщо $f'(x)$ і $f''(x)$ мають однаковий знак, то $x_0 = a$; якщо ж $f'(x)$, $f''(x)$ різних знаків, то $x_0 = b$.

Приклад 2.2. Після трьох кроків комбінованого методу знайти наближене значення кореня $\xi \in [1; 2]$ рівняння $x^3 - x - 1 = 0$ і визначити абсолютну похибку.

Розв'язання. В даному випадку $f(x) = x^3 - x - 1$ і $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$, $f''(x) = 6x > 0$ на відрізку $[1; 2]$, тому приймаємо $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Оскільки

$$f(x_0) = f(1) = -1, \quad f(y_0) = f(2) = 5, \quad f'(y_0) = f'(2) = 11,$$

то за формулами (2.7) і (2.8) маємо:

$$x_1 = x_0 - \frac{y_0 - x_0}{f(y_0) - f(x_0)} f(x_0) = 1 + \frac{2-1}{5+1} = \frac{7}{6} \approx 1,167,$$

$$y_1 = y_0 - \frac{f(y_0)}{f'(y_0)} = 2 - \frac{5}{11} = \frac{17}{11} \approx 1,545;$$

$$f(x_1) = f(1,167) \approx -0,578, \quad f(y_1) = f(1,545) \approx 1,143, \quad f'(y_1) = f'(1,545) \approx 6,161,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{y_1 - x_1}{f(y_1) - f(x_1)} f(x_1) = 1,167 + \frac{1,545 - 1,167}{1,143 + 0,578} 0,578 \approx 1,294,$$

$$y_2 = y_1 - \frac{f(y_1)}{f'(y_1)} = 1,545 - \frac{1,143}{6,161} \approx 1,359;$$

$$f(x_2) = f(1,294) \approx -0,127, \quad f(y_2) = f(1,359) \approx 0,151, \quad f'(y_2) = f'(1,359) \approx 4,541,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{y_2 - x_2}{f(y_2) - f(x_2)} f(x_2) = 1,294 + \frac{1,359 - 1,294}{4,541 + 0,127} 0,127 \approx 1,296,$$

$$y_3 = y_2 - \frac{f(y_2)}{f'(y_2)} = 1,359 - \frac{0,151}{4,541} \approx 1,326.$$

Отже, наближеним значенням кореня буде

$$\xi \approx \frac{x_3 + y_3}{2} = \frac{1,296 + 1,326}{2} = 1,311$$

з абсолютною похибкою $\Delta_3 = \frac{|x_3 - y_3|}{2} = \frac{|1,296 - 1,326|}{2} = 0,015$.

2.3. Метод простої ітерації

Нехай рівняння $f(x) = 0$ має корінь ξ , відокремлений на відрізку $[a; b]$. Замінімо це рівняння рівносильним рівнянням виду

$$x = g(x). \quad (2.9)$$

Функція $g(x)$ вважається неперервною на відрізку $[a; b]$. Рівняння (2.9) можна одержати з рівняння $f(x) = 0$ шляхом еквівалентних перетворень. Наприклад, рівняння $x^3 - 3x + 1 = 0$ можна представити у вигляді (2.9) різними способами: 1) $x = (x^3 + 1)/3$; 2) $x = x^3 - 2x + 1$; 3) $x = \sqrt[3]{3x - 1}$.

Метод простої ітерації є одним з найбільш зручних і ефективних методів наближеного розв'язування рівнянь. Рекурентна формула визначається на основі самого рівняння (2.9). Якщо відоме яке-небудь значення x_n кореня, то внаслідок підстановки його в праву частину рівняння (2.9) обчислимо наступне значення $x_{n+1} = g(x_n)$. Отже, вибравши початкове значення $x_0 \in [a, b]$, одержимо рекурентну формулу для знаходження послідовності чисел $\{x_n\}$:

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.10)$$

Якщо існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ і функція $g(x)$ є неперервною в точці ξ , то граничним переходом в рівнянні (2.10) знаходимо $\xi = g(\xi)$. Отже, число ξ є коренем рівняння (2.9) і може бути обчисленим за формулою (2.10) із будь-якою точністю.

Обчислення за формулою (2.10) проілюструємо графічно (рис. 2.3). Побудуємо графіки функцій лівої і правої частин рівняння (2.9), тобто лінії $y = x$ і $y = g(x)$. Вони повинні перетинатися в точці $(\xi; \xi)$. Взевши деяке число x_0 , обчислимо $g(x_0)$ і отримаємо на кривій $y = g(x)$ точку A_1 . Лінія проєкції цієї точки на вісь Oy перетне пряму $y = x$ в точці B_1 . Проєкція точки B_1 на вісь Ox дає значення x_1 : $x_1 = g(x_0)$. Обчисливши $g(x_1)$ і спроектувавши точку A_1 графіка функції $y = g(x)$ на вісь Oy , знайдемо точку B_2 на прямій $y = x$ і її проєкцію x_2 на вісь Ox ($x_2 = g(x_1)$) і т.д.

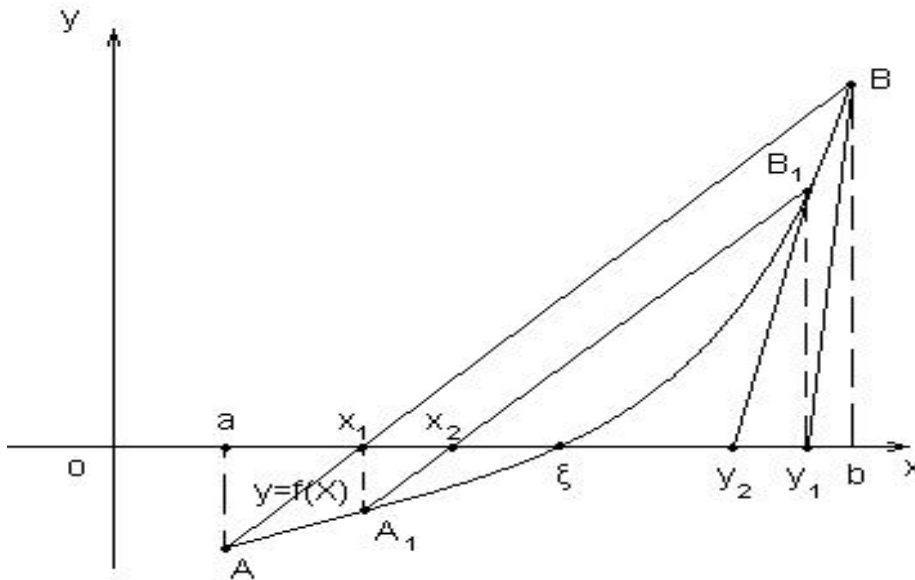


Рис. 2.3

1.4. Достатня умова збіжності ітераційного процесу.

З'ясуємо питання про умови збіжності ітераційної послідовності до кореня ξ .

Теорема 2.4 (достатня умова збіжності ітераційної послідовності). Нехай корінь ξ рівняння (2.9) відокремлений на відрізку $[a; b]$ і всі послідовні наближення x_{n+1} , одержані за рекурентною формулою (2.10), не виходять за межі $(a; b)$. Якщо функція $g(x)$ диференційовна і знайдеться число $0 \leq q < 1$ таке, що

$$|g'(x)| \leq q \quad (2.11)$$

при всіх $x \in [a; b]$, то ітераційна послідовність, породжена формулою (2.10), збігається до кореня ξ при будь-якому виборі початкового наближення $x_0 \in [a; b]$.

Зауважимо, що метод простої ітерації є самовиправним. Якщо якийсь наближення x_n знайдено з помилкою, але при цьому помилка не вивела його за межі відрізка $[a; b]$, то подальші члени послідовності все одно наближатимуться до кореня.

Теорема 2.5. Якщо на відрізку $[a; b]$ функція $g(x)$ диференційовна і

$$|g'(x)| \geq 1 \text{ при всіх } x \in [a; b], \quad (2.12)$$

то ітераційна послідовність, породжена рекурентною формулою (2.10), не буде збігатися до кореня $\xi \in [a; b]$ ні при якому $x_0 \neq \xi$ з цього відрізка.

Приклад 2.3. З'ясувати можливість уточнення методом простої ітерації кореня $\xi \in [0, 2; 0, 5]$ рівняння $x^3 - 3x + 1 = 0$, представленого у вигляді:

$$1) x = (x^3 + 1)/3; \quad 2) x = x^3 - 2x + 1.$$

Розв'язання. 1. Розглянемо рівняння $x = (x^3 + 1)/3$, де $g(x) = (x^3 + 1)/3$

Очевидно, що $|g'(x)| = x^2$ приймає найбільше значення в точці $c = 0,5$ відрізка

$[a; b] = [0, 2; 0, 5]$, тому $|g'(x)| \leq 0,25$ при всіх $x \in [a; b]$, тобто $q = 0,25 < 1$.

За теоремою 2.4 послідовність, отримана за формулою $x_{n+1} = (x_n^3 + 1)/3$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), збігається до кореня при будь-якому початковому наближенні $x_0 \in [0, 2; 0, 5]$. Наприклад, взявши $x_0 = 0,2$, отримаємо наближення $x_1 = 0,336$, $x_2 = 0,346$, $x_3 = 0,347, \dots$.

2. Функція $g(x) = x^3 - 2x + 1$ (рівняння 2) є такою, що модуль її похідної $|g'(x)| = |3x^2 - 2| = 2 - 3x^2$ на відрізку $[0, 2; 0, 5]$ приймає значення від 1,25 до 1,88, тобто $|g'(x)| > 1$. Отже, за теоремою 2.10 побудована для рівняння 2) ітераційна послідовність не збігається до шуканого кореня ні при якому $x_0 \in [0, 2; 0, 5]$.

Наведені в теоремах 2.4 і 2.5 показують, що для методу простої ітерації суттєвою є форма запису рівняння (2.9). Вкажемо універсальний спосіб одержання цього рівняння з такою функцією $g(x)$, для якої в околі кореня виконується умова (2.10).

Нехай рівняння $f(x) = 0$ має єдиний корінь на відрізку $[a; b]$ і $f'(x) > 0$. Якщо $m \leq f'(x) \leq M$ на відрізку $[a; b]$, то візьмемо $\lambda = \frac{1}{M}$ і рівняння $f(x) = 0$ замінимо еквівалентним виду (2.9):

$$x = x - \lambda f(x). \quad (2.13)$$

В цьому разі для функції $g(x) = x - \lambda f(x)$ матимемо

$$|g'(x)| = \left| (x - \lambda f(x))' \right| = \left| 1 - \frac{f'(x)}{M} \right| \leq 1 - \frac{m}{M} = q < 1.$$

Зауважимо, що у випадку $f'(x) < 0$ замість рівняння (1.3) розглядається рівносильне рівняння $-f(x) = 0$.

Література

1. Демидович Б.П., Марон И.А., Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1970. - 664 с.
2. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. - М.: Наука, 1972. - 368 с.
3. Мэтьюз Д. Г., Финк К. Д. Численные методы. Использование MATLAB. - М.: ИД "Вильямс", 2001. - 720 с.
4. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. - М.: Наука, 1989. - 432 с.
5. Суліма І.М., Мейш В.Ф. Чисельні методи із застосуванням MATLAB. - К.: Вид-во НАУ, 2003. - 320 с.