Лекція 3. ***Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.***

ПЛАН

3.1. Метод Гаусса і вибір головного елемента.
3.2. Метод Халецького.
3.3. Метод простих ітерацій.
3.4. Метод Зейделя.

3.1. Метод Гаусса і вибір головного елемента.

Розглянемо систему *n* алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Нехай $a_{11} \neq 0$. Розділимо коефіцієнти першого рівняння на a_{11} і запишемо його у вигляді

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \tag{3.2}$$

де позначено $a_{1j}^{(1)} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad j > 1.$ Верхній індекс в дужках вказує, що коефіцієнти системи змінені один раз. За допомогою цього рівняння вилучимо змінну x_1 із решти рівнянь системи (3.1). Для цього помножимо рівняння (3.2) на $-a_{21}$ і додамо до другого рівняння системи (3.1); потім помножимо рівняння (3.2) на $-a_{31}$ і додамо до третього і т. д. Внаслідок таких перетворень прийдемо до системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}, \end{cases} \tag{3.3}$$

коефіцієнти якої обчислюються за формулами

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}^{(1)}, \quad (i=\overline{2,\ n};\ j = \overline{2,\ n}).$$

На наступному кроці вибираємо діагональний елемент $a_{22}^{(1)} \neq 0$ і в системі (3.3) вилучаємо змінну x_2 із рівнянь від третього до *n*-го. Одержимо еквівалентну систему, яка міститиме коефіцієнти $b_2^{(2)}$ та $a_{ij}^{(2)}$, ($i=\overline{3,\ n}$; $j=\overline{3,\ n}$). Повторюючи послідовно подібну процедуру до решти рядків системи, остаточно матимемо:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}, \end{cases} \tag{3.4}$$

Цим завершився *прямий хід* методу Гаусса. Якщо позначити $a_{ij} = a_{ij}^{(0)}$, то загальну формулу методу виключень Гаусса можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned} &a_{rj}^{(r)} = \frac{a_{rj}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}}, \qquad \mathrm{b}_r^{(r)} = \frac{b_r^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}}; \\ &a_{ij}^{(r)} = a_{ij}^{(r-1)} - a_{ir}^{(r-1)}a_{rj}^{(r)}, \qquad \mathrm{b}_i^{(r)} = b_i^{(r-1)} - a_{ir}^{(r-1)}b_r^{(r)}; \\ &r = \overline{1,\ n};\ \ i = \overline{r+1,\ n};\ \ i = \overline{r+1, n}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Тепер, починаючи з останнього рівняння системи (3.4), послідовно обчислюємо значення невідомих:

$$\begin{aligned} &x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &x_2 = b_2^{(2)} - a_{23}^{(2)}x_3 - \cdots - a_{2n}^{(2)}x_n, \\ &x_1 = b_1^{(1)} - a_{12}^{(1)}x_2 - a_{13}^{(1)}x_3 - \cdots - a_{1n}^{(1)}x_n. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Це був *зворотній хід* методу Гаусса.

Зауваження. Якщо $a_{rr}^{(r)} = 0$, то *r*-тий рядок неможливо використати для вилучення змінної x_r із рівнянь системи від (*r+1*)-го до *n*-го. В цьому випадку потрібно *r*-тий рядок поміняти місцями з одним із наступних, в якому коефіцієнт при змінній x_r відмінний від нуля.

Приклад 3.1. Розв’язати методом Гаусса систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + \qquad 4x_3 = 14, \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$$

(*Відповідь*: $x_1 = 3,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$)

При виконанні комп'ютером арифметичних операцій можлива поява похибок обчислень. Ці похибки накопичуються в процесі методу Гаусса, що може привести до суттєвої помилки в розв'язку системи рівнянь. Щоб уникнути цього, доцільно в методі Гаусса серед елементів r-того стовпця, які лежать на головній діагоналі або нижче неї, вибрати найбільший за абсолютною величиною. Потім поміняти відповідний рядок із r-тим; вибраний елемент стане розв'язувальним, його називають *головним*. Зауважимо, головний елемент можна вибирати серед усіх коефіцієнтів при невідомих системи, що ускладнює алгоритм.

4.2. Метод Халецького.

Одним із поширених методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод Халецького. Суть його полягає в розкладанні матриці коефіцієнтів системи на дві трикутні матриці.

Запишемо систему рівнянь (3.1) в матричному вигляді:

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{3.7}$$

де позначено $A_{n\times n} = (a_{ij}),\ \vec{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n)^T,\ \vec{b} = (b_1,\ b_2,\ \ldots\ ,\ b_n)^T$. Припустимо, що матрицю A можна представити у вигляді добутку нижньої трикутної матриці $C_{n\times n} = (c_{ij})$ та верхньої трикутної матриці $U_{n\times n} = (u_{ij})$:

$$A = CU, \tag{3.8}$$

де

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Відомо, що для не виродженої матриці A існує єдине представлення виду (3.9) і елементи c_{ij} та u_{ij} визначаються за формулами:

$$\begin{cases} c_{i1} = a_{i1}, \\ c_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} u_{kj}, \quad (i \geq j = \overline{2,\ n}); \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} u_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{c_{11}}, \\ u_{ij} = \dfrac{1}{c_{ii}} (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} u_{kj}), \quad (1 < i < j). \end{cases} \tag{3.11}$$

Отже система (3.7) набуде вигляду

$$CU\vec{x} = \vec{b}.$$

Позначимо

$$U\vec{x} = \vec{y}, \tag{3.12}$$

тоді попереднє рівняння запишеться так:

$$C\vec{y} = \vec{b}. \tag{3.13}$$

Враховуючи вигляд (3.9) матриці *C*, рівнянню (3.13) відповідає система

$$\begin{cases} c_{11} y_1 = b_1, \\ c_{21} y_1 + c_{22} y_2 = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n1} y_1 + c_{n2} y_2 + \cdots + c_{nn} y_n = b_n; \end{cases}$$

звідки послідовно визначаємо:

$$y_1 = b_1 / c_{11}, \quad y_2 = (b_2 - c_{21}\, b_1 / c_{11}) / c_{22}, \quad \dots$$

або в загальному вигляді

$$\begin{cases} y_1 = b_1 / c_{11}, \\ y_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} y_j) \Big/ c_{ii}, \quad (i = \overline{2,\ n}). \end{cases} \tag{3.14}$$

Після цього з рівняння (3.12), яке має вигляд

$$\begin{cases} x_1 + u_{12} x_2 + u_{13} x_3 + \cdots + u_{1n} x_n = y_1, \\ x_2 + u_{23} x_3 + \cdots + u_{2n} x_n = y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = y_n, \end{cases} \tag{3.15}$$

знаходимо невідомі x_i:

$$\begin{cases} x_n = y_n, \\ x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j, \quad (i=n-1, n-2, \ldots, 1). \end{cases} \tag{3.16}$$

Приклад 3.2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 21, \\ 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 52, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 79, \\ 4x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 6x_4 = 82, \end{cases}$$

методом розкладання матриці коефіцієнтів на дві трикутні матриці.

Розв'язання. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 & 8 \\ 4 & 12 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

маємо представлення (3.8), яке за правилом добутку матриць C на U набуває вигляду

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{11}u_{12} & c_{11}u_{13} & c_{11}u_{14} \\ c_{21} & c_{21}u_{12} + c_{22} & c_{21}u_{13} + c_{22}u_{23} & c_{21}u_{14} + c_{22}u_{24} \\ c_{31} & c_{31}u_{12} + c_{32} & c_{31}u_{13} + c_{32}u_{23} + c_{33} & c_{31}u_{14} + c_{32}u_{24} + c_{33}u_{34} \\ c_{41} & c_{41}u_{12} + c_{42} & c_{41}u_{13} + c_{42}u_{23} + c_{43} & c_{41}u_{14} + c_{42}u_{24} + c_{43}u_{34} + c_{44} \end{pmatrix}.$$

З рівності двох матриць A та CU визначаємо елементи матриць C і U.

1. Прирівнюючи елементи перших стовпців матриць A та CU, маємо: $c_{11}=a_{11}$, $c_{21}=a_{21}$, $c_{31}=a_{31}$, $c_{41}=a_{41}$, тобто $c_{11}=1$, $c_{21}=2$, $c_{31}=3$, $c_{41}=4$.

2. З першого рядка визначаємо елементи u_{12}, u_{13}, u_{14}: $c_{11}u_{12} = 2$, $c_{11}u_{13} = 4$, $c_{11}u_{14} = 1$, тобто $u_{12} = 2$, $u_{13} = 4$, $u_{14} = 1$.

3. За другим стовпцем знаходимо елементи c_{22}, c_{32} і c_{42}: $c_{22}=a_{22} - c_{21}u_{12}=8 - 4=4$, $c_{32}=a_{32} - c_{31}u_{12}=10 - 6=4$, $c_{42}=a_{42} - c_{41}u_{12}=12 - 8=4$.

4. Тепер за другим рядком обчислюємо:

$$u_{23} = \frac{a_{23} - c_{21}u_{13}}{c_{22}} = \frac{6 - 2 \cdot 4}{4} = -\frac{1}{2}, \quad u_{24} = \frac{a_{24} - c_{21}u_{14}}{c_{22}} = \frac{4 - 2 \cdot 1}{4} = \frac{1}{2}.$$

5. За третім стовпцем визначаємо:

$$c_{33}=a_{33}-c_{31}u_{13}-c_{32}u_{23}=8-3\cdot 4+2=-2,$$

$$c_{43}=a_{43}-c_{41}u_{13}-c_{42}u_{23}=10-4\cdot 4+2=-4$$

6. Тепер послідовно обчислюємо u_{34} і c_{44}:

$$u_{34}=\frac{a_{34}-c_{31}u_{14}-c_{32}u_{24}}{c_{33}}=\frac{8-3\cdot 1-2}{-2}=-\frac{3}{2},$$
$$c_{44}=a_{44}-c_{41}u_{14}-c_{42}u_{24}-c_{43}u_{34}=6-4-2-6=-6.$$

Отже, матриці C та U будуть такими:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & -4 & -6 \end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему (3.10):

$$\begin{cases} y_1=21, \\ 2y_1+4y_2=52, \\ 3y_1+4y_2-2y_3=79, \\ 4y_1+4y_2-4y_3-6y_4=82, \end{cases}$$

з якої знаходимо значення $y_1=21$, $y_2=5/2$, $y_3=-3$, $y_4=4$.

Тепер із системи (3.12):

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+x_4=21, \\ x_2-x_3/2+x_4/2=5/2, \\ x_3-3x_4/2=-3, \\ x_4=4 \end{cases}$$

обчислюємо $x_3=-3+6=3$, $x_2=5/2+3/2-2=2$,. $x_1=21-4-12-4=1$.

Отже, розв’язок заданої системи знайдено: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$.

3.3. Метод простої ітерації.

В ряді випадків прямі методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь стають неефективними, зокрема, при великій кількості змінних. В таких випадках для знаходження коренів використовують ітераційні методи.

Розглянемо систему рівнянь (3.1). Представимо її в еквівалентному *нормальному* вигляді

$$\vec{x} = B\vec{x} + \vec{d}, \tag{3.17}$$

де B і $\vec{d}$ – деякі нові матриця і вектор відповідно. Систему (3.1) можна привести до виду (3.17) двома способами.

Спосіб 1. Вважаючи, що $a_{ii} \neq 0,\ (i = \overline{1,\ n})$, розв'яжемо перше рівняння системи (3.1) відносно x_1, друге – відносно x_2 і т.д.; одержимо еквівалентну систему виду (3.17):

$$\begin{cases} x_1 = (-a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n + b_1)/a_{11}, \\ x_2 = (-a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n + b_2)/a_{22}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = (-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1} + b_n)/a_{nn}. \end{cases}$$

Тут необхідно позначити $b_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$ при $i \neq j$ і $b_{ii} = 0$; $d_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}\quad (i, j = \overline{1,\ n})$.

Спосіб 2. Виділимо одиницю з кожного діагонального коефіцієнта системи (3.1) і виразимо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідно із 1-го, 2-го, …, n-го рівнянь. В цьому випадку $b_{ij} = -a_{ij}$ при $i \neq j$ і $b_{ii} = -a_{ii} + 1$; $d_i = b_i\quad (i, j = \overline{1,\ n})$.

Систему рівнянь (3.17) будемо розв'язувати методом послідовних наближень. За нульове наближення приймемо деяке значення $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^T$, наприклад, $\vec{x}^{(0)} = \vec{d}$. Наближений розв'язок $\vec{x}^{(k+1)}$ знаходимо за наступною рекурентною формулою

$$\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + \vec{d},\ \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{3.18}$$

Ітераційний процес виду (3.18) називають методом *простої ітерації*.

Формула (3.18) в координатній формі має вигляд:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + \cdots + b_{1n}x_n^{(k)} + d_1, \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k)} + b_{22}x_2^{(k)} + \cdots + b_{2n}x_n^{(k)} + d_2, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k)} + b_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + b_{nn}x_n^{(k)} + d_n; \end{cases} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots). \qquad (3.19)$$

Отже, задавшись яким-небудь початковим наближенням, за рекурентною формулою (3.18) або (3.19) одержимо ітераційну послідовність $\vec{x}^{(0)}, \vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots \vec{x}^{(k)}, \cdots$ для системи (3.17). Якщо ця послідовність має границю $\lim\limits_{k \to \infty} \vec{x}^{(k)} = \vec{x}$, то така границя буде розв'язком системи рівнянь (3.17).

Зауваження. Для швидшої збіжності ітераційного процесу доцільно за початкове наближенняв вибирати наближений розв'язок системи, знайдений грубою прикидкою.

Приклад 3.3. Знайти три члени ітераційної послідовності для системи

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 = -21, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 15, \end{cases}$$

при $\vec{x}^{(0)} = (1,\ 1,\ 1)^T$.

Розвязання. Запишемо систему рівнянь у вигляді (3.17):

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(7 + x_2 - x_3), \\ x_2 = \frac{1}{8}(21 + 4x_1 + x_3), \\ x_3 = \frac{1}{5}(15 + 2x_1 - x_2). \end{cases}$$

Підставимо координати вектора $\vec{x}^{(0)}$ в праву частину кожного рівняння цієї системи і обчислимо $\vec{x}^{(1)} = (1,75;\ 3,25;\ 3,2)^T$. Тепер підставимо туди ж координати вектора $\vec{x}^{(1)}$ і знайдемо $\vec{x}^{(2)} = (1,7625;\ 3,9;\ 3,05)^T$. Якщо продовжувати дальше, то одержимо ітераційну послідовність $\left\{ \vec{x}^{(k)} \right\}$, збіжну до розв'язку $\vec{x} = (2,\ 4,\ 3)^T$.

Праву частину рівності (3.17) можна розглядати як задання деякого оператора φ, який відображає вектор $\vec{x} = (x_1, x_2 ... x_n)$ *n*-вимірного векторного простору у вектор $\vec{y}$ цього самого простору. При цьому

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j + d_i,\ i = 1,2,\dots n.$$

Тому знаходження розв'язку системи (3.17) зводиться до відшукання нерухомої точки відображення φ, яке визначається формулою

$$\varphi(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{d}.$$

Якщо відображення φ є стискуючим, то розв'язок рівняння $\vec{x} = \varphi(\vec{x})$, тобто рівняння (3.17), можна знайти методом послідовних наближень за формулами (3.18), починаючи з довільного вектора $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$.

Метод простої ітерації збігається до шуканого розв'язку, якщо виконуються достатні умови збіжності ітераційного процесу.

Теорема 3.1. Якщо для діагональних елементів матриці *A* системи (3.7) виконується умова

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} |a_{ij}|, \tag{3.20}$$

то ітераційний процес збігається до єдиного розв'язку цієї системи, не залежно від вибору початкового наближення.

Враховуючи, що розв'язком системи рівнянь на *к*-й ітерації є вектор $\vec{x}^{(k)}$, то для визначення умови закінчення ітераційного процесу скористаємось поняттям відстані між двома векторами. Відстань (або метрику) $\rho(\vec{x}, \vec{y})$ між векторами $\vec{x},\ \vec{y} \in R^n$ можна визначати кількома способами, а саме:

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \tag{3.21}$$

або

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.22}$$

Тоді умова закінчення ітераційного процесу матиме вигляд $\rho(\vec{x}^{(k+1)},\vec{x}^{(k)}) < \varepsilon$, де метрика $\rho(\vec{x},\vec{y})$ визначається за формулою (3.21) або (3.22).

Теорема 3.2. Якщо матриця *B* коефіцієнтів при невідомих в правій частині системи (3.17) задовольняє умові

$$q = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right| < 1 , \tag{3.23}$$

то дана система має єдиний розв'язок $\vec{x}$, а знайдена за формулами (3.19) послідовність $\left\{ \vec{x}^{(k)} \right\}$ збігається до $\vec{x}$ при будь-якому початковому наближенні $\vec{x}^{(0)}$. Для оцінки похибки наближень справедливі формули:

$$\rho(\vec{x}^{(k)},\vec{x}) \le \frac{q^n}{1-q} \max_{1\le i\le n} \left| x_i^{(1)} - x_i^{(0)} \right| , \tag{3.24}$$

або

$$\rho(\vec{x}^{(k)},\vec{x}) \le \frac{q}{1-q} \max_{1\le i\le n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \tag{3.25}$$

Умова (3.23) означає, що найбільша із сум модулів коефіцієнтів при невідомих в правій частині системи (3.17), обчислених для кожного рядка, має бути менше за одиницю. Зрозуміло, що це можливо лише тоді, коли всі елементи матриці *B* є достатньо малими за абсолютною величиною.

Обчислюючи послідовно наближення $\vec{x}^{(k)}$ до точного розв'язку $\vec{x}$ системи (3.17), на кожному кроці можна знайти їх абсолютну похибку за правими частинам нерівностей (3.24) і (3.25), наприклад:

$$\Delta_{\vec{x}^{(k)}} = \frac{q}{1-q} \max_{1\le i\le n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| .$$

Звідси можна одержати умови закінчення ітераційного процесу знаходження розвязку з точністю до ε>0.

3.4. *Метод Зейделя.*

М*етод Зейделя* є модифікацією методу простих ітерацій розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь виду (3.17). Ідея цього методу полягає в тому, що при знаходженні компоненти $x_i^{(k+1)}$ (*к*+1)-го наближення до шуканого розв'язку $\vec{x}$ використовуються вже знайдені на цьому ж кроці нові значення i-1 компонент $x_1^{(k+1)},\ x_2^{(k+1)},\ \ldots,\ x_{i-1}^{(k+1)}$. Отже, ітераційний процес методу Зейделя для системи (3.17) можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + \cdots + b_{1n}x_n^{(k)} + d_1, \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k+1)} + b_{22}x_2^{(k)} + \cdots + b_{2n}x_n^{(k)} + d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i^{(k+1)} = \sum\limits_{j=1}^{i-1} b_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum\limits_{j=i}^{n} b_{ij}x_j^{(k)} + d_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k+1)} + b_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + b_{nn}x_n^{(k)} + d_n; \end{cases} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ldots). \qquad (3.26)$$

За звичай метод Зейделя має кращу збіжність, ніж метод простої ітерації.

Приклад 3.4. Методом Зейделя знайти три члени ітераційної послідовності для системи

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 = -21, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 15, \end{cases}$$

при $\vec{x}^{(0)} = (1,\ 1,\ 1)^T$.

Розвязання. Представимо систему рівнянь у вигляді (3.17) (див. приклад 3.3) і запишемо формули (3.26) ітераційного процесу:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}\left(7 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right), \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}\left(21 + 4x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right), \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{5}\left(15 + 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}\right). \end{cases}$$

Підставимо координати вектора $\vec{x}^{(0)}$ в праву частину першого рівняння цієї системи і обчислимо $x_1^{(1)} = 1,75$. В праву частину другого рівняння підставимо $x_1^{(1)} = 1,75$, $x_3^{(0)} = 1$ і знаходимо $x_2^{(1)} = 3,625$. Тепер за відомими $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ із третього рівняння визначаємо $x_3^{(1)} = 2,975$. Отже, одержали наближення $\vec{x}^{(1)} = (1,75;\ 3,625;\ 2,975)^T$. Аналогічно, при $k = 1$ із попередньої системи послідовно знаходимо координати наступного наближення

$\vec{x}^{(2)} = (1{,}9125;\ 3{,}953125;\ 2{,}974375)^T$. Видно, що одержана ітераційна послідовність ближча до розв'язку $\vec{x} = (2,\ 4,\ 3)^T$, ніж послідовність, знайдена в попередньому прикладі методом простої ітерації.

Метод ітерації легко алгоритмізується і реалізується на комп'ютері.