Лекція 5. ***Інтерполяція функцій***.

ПЛАН

1. Задача інтерполяції.
2. Інтерполяційний многочлен Лагранжа.
3. Залишковий член інтерполяційної формули.
4. Інтерполяційний многочлен Ньютона із скінченними різницями.
5. Схема Ейткіна обчислення значення інтерполяційного многочлена.
6. Інтерполяційний многочлен Ньютона з поділеними різницями.

5.1. Задача інтерполяції

При розв'язуванні багатьох задач інженерно-науково характеру доводиться використовувати таблично чи графічно задані функції. Крім того, бувають випадки, коли аналітичний вираз функції $f(x)$ відомий, проте є занадто складним і незручним для обчислень. У таких випадках вихідну функцію замінюють на більш просту, яка в деякому сенсі близька до даної. Інтерполювання – це один із способів знаходження таких наближених функцій.

В загальному вигляді задача інтерполювання формулюється наступним чином. Нехай деяка функція $y=f(x)$ задана таблично, тобто в $n+1$ точках $x_0, x_1, ..., x_n$ відомі значення цієї функції: $f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, ..., f(x_n)=y_n$. Потрібно підібрати таку функцію $p(x)$, яка:

1) в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ набуває таких же значень, що й $f(x)$;

2) при інших значеннях $x \neq x_j$, $(j=0,1,...,n)$

$f(x) \approx p(x),\ \ x \in [x_0;\ x_n]$.

Функцію $p(x)$ називають *інтерполюючою функцією,* процес її побудови – *інтерполяцією,* а точки $x_0, x_1, ..., x_n$ - *вузлами інтерполяції.* Зауважимо, що коли аргумент *x* знаходиться поза межами проміжку інтерполювання $[x_0;\ x_n]$, то задача побудови функції $p(x)$ називається *екстраполяцією.*

Очевидно, що через задані точки (x_i, y_i), $i=\overline{0,n}$ можна провести безліч кривих $y=p(x)$, тому задача інтерполяції в її загальному вигляді не є однозначною. Якщо інтерполюючу функцію $p(x)$ вибирати з класу многочленів, то в цьому випадку інтерполяцію називають *поліноміальною* або *параболічною.* Параболічне інтерполювання найзручніше, оскільки многочлени прості за формою, їх легко обчислювати, диференціювати та інтегрувати, вони не мають особливих точок і можуть набувати довільних значень. Інколи зручно використовувати інші класи функцій. Якщо, наприклад, функція $f(x)$ періодична, то інтерполюючу функцію доцільно вибирати з класу тригонометричних функцій. У випадках, коли функція набуває нескінченно великих значень в околі деякої точки, функцію $p(x)$ вибирають з класу дробово-раціональних функцій.

Ми розглядатимемо лише задачу параболічного інтерполювання. Треба побудувати многочлен степеня *n*

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \equiv a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n \tag{5.1}$$

який задовольняв би умови

$$\bullet P_n(x_i)=y_i,\ i=\overline{0,n}, \tag{5.2}$$

де $y_i=f(x_i)$. За рівностями (5.2) складемо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $a_0,a_1,\ldots,a_n$ многочлена (5.1) .

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+\ldots+a_{n-1}x_0^{n-1}+a_nx_0^n=y_{0,} \\ a_0+a_1x_1+\ldots+a_{n-1}x_1^{n-1}+a_nx_1^n=y_{1,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0+a_1x_n+\ldots+a_{n-1}x_n^{n-1}+a_nx_n^n=y_{n.} \end{cases} \tag{5.3}$$

Це є система n+1 лінійних рівнянь з n+1 невідомими; вона має єдиний розв'язок, оскільки її визначник є визначником Вандермонда. Останній відмінний від нуля, бо за умовою задачі всі вузли інтерполювання різні. Таким чином, існує єдиний многочлен виду (5.1), що задовольняє умови (5.2).

Многочлен $P_n(x)$ називають *інтерполяційним многочленом,* наближену рівність $f(x)\approx P_n(x)$ - *інтерполяційною формулою.* Спосіб побудови інтерполяційного многочлена, за яким коефіцієнти a_i визначаються безпосереднім розв'язанням системи (5.3), називається способом невизначених коефіцієнтів, а зображення інтерполяційного многочлена у формі (5.1) – степеневим зображенням.

Зауважимо, що хоч інтерполяційний многочлен, що задовольняє умови (5.2), єдиний, проте можливі різні форми його запису.

Як правило, інтерполяційний многочлен будують в одному з наступних випадків:

- функція задана таблично, а треба знайти її значення для тих значень аргументу, яких в таблиці немає;
- функція задана графічно, а треба знайти її наближений аналітичний вираз;
- функція задана аналітично, але її вираз досить складний і незручний для подальших математичних розрахунків.

5.2. Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Найбільш загальною формою представлення інтерполяційного многочлена є *інтерполяційна формула Лагранжа*. У цьому випадку інтерполяційний многочлен $L_n(x)$ шукатимемо у вигляді

$$\begin{aligned} L_n(x)=&a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)+a_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)+\cdots+ \\ &+a_i(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)+\cdots+ \\ &+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Видно, що кожен доданок цього виразу є многочленом степеня n, причому при кожному з коефіцієнтів a_i, немає множника $(x-x_i),\ i=\overline{0,n}$.

Для того, щоб знайти ці коефіцієнти, підставимо в (5.4) почергово $x = x_i$, $i = \overline{0, n}$ і використаємо умови (5.2); дістанемо

$$L_n(x_i) \equiv a_i(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n) = y_i,$$

звідки визначаємо

$$a_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Тепер, підставивши ці вирази коефіцієнтів a_i у формулу (4.4), отримаємо інтерполяційний многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}. \tag{5.5}$$

Інтерполяційний многочлен Лагранжа зображують також у вигляді

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_i)(x - x_i)}, \tag{5.6}$$

де

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} \left(x - x_j \right) \equiv (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

Многочлени

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_i)(x - x_i)}, i = 0, 1, \dots, n, \tag{5.7}$$

називають *множниками Лагранжа*. Очевидно, що

$$l_i\left(x_j\right) = \begin{cases} 0, & \text{коли } i \neq j, \\ 1, & \text{коли } i = j. \end{cases}$$

Обчислення можна організувати економно, якщо записати (5.6) у вигляді

$$L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{Y_i}{x - x_i}, \tag{4.8}$$

де

$$Y_i = \frac{y_i}{\prod\limits_{j=0, j \neq i}^{n} (x_i - x_j)}, i = 0, 1, \dots, n. \tag{5.9}$$

Досить поширеними є випадки лінійного і квадратичного інтерполювання. Відповідні формули дістанемо із загальної, якщо в (5.5) приймемо $n = 1$ і $n = 2$.

Нехай $n = 1$, тобто значення функції $f(x)$ задано в двох вузлах x_0 і x_1. Тоді з формули (5.5) отримаємо *формулу лінійної інтерполяції*

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1. \tag{5.10}$$

Многочлен $L_1(x)$ визначає пряму, що проходить через точки (x_0, y_0) і (x_1, y_1)

Поклавши у формулі (5.5) $n=2$, прийдемо до *формули квадратичної інтерполяції*

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2.$$

Функція $y = L_2(x)$ задає параболу, що проходить через три задані точки.

5.3. Залишковий член інтерполяційної формули

Припускаючи вузли інтерполяції різними, а функцію $f(x)$ такою, що має неперервну похідну порядку $n+1$ на проміжку $[a,b]$, де розміщені вузли інтерполяції, можна записати залишковий член

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

інтерполяційної формули на цьому проміжку у вигляді

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \tag{5.11}$$

де $\xi \in [\alpha_1, \alpha_2]$, $\alpha_1 = \min(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$, $\alpha_2 = \max(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$. Тоді маємо оцінку

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \tag{5.12}$$

тут

$$M_{n+1} = \max_{x \in [\alpha_1, \alpha_2]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|.$$

Приклад 5. 1. Розглянемо фрагмент таблиці функції $y = x + \sin x$

x_i	1,4	1,5	1,7	1,8
y_i	2,38545	2,49749	2,69166	2,77385

Запишемо многочлен Лагранжа, використовуючи всю наявну інформацію (тобто, покладаючи $n=3$), у вигляді

$$L_3(x) = 2,38548 \cdot \frac{(x-1,5)\cdot(x-1,7)\cdot(x-1,8)}{(1,4-1,5)\cdot(1,4-1,7)\cdot(1,4-1,8)} +$$

$$+2,49749 \cdot \frac{(x-1,4)\cdot(x-1,7)\cdot(x-1,8)}{(1,5-1,4)\cdot(1,5-1,7)\cdot(1,5-1,8)} +$$

$$+2,69166 \cdot \frac{(x-1,4)\cdot(x-1,5)\cdot(x-1,8)}{(1,7-1,4)\cdot(1,7-1,5)\cdot(1,7-1,8)} +$$

$$+2,77385 \cdot \frac{(x-1,4)\cdot(x-1,5)\cdot(x-1,7)}{(1,8-1,4)\cdot(1,8-1,5)\cdot(1,8-1,7)}.$$

Обчислимо значення $L_3(x)$ в точці $x=1,6$, оцінивши спочатку $R_n(x)$ відповідно до формули (5.12). Оскільки

$$\omega_4(1,6)=0,2\cdot 0,1\cdot(-0,1)\cdot(-0,2)=0,0004,$$

$$y^{(4)}(x)=\sin x;\ |\sin x|\le 1,$$

то маємо оцінку

$$|R_3(1,6)|\le\frac{1}{4!}\cdot 4\cdot 10^{-4}\le 0,2\cdot 10^{-4}.$$

Скористаємось формою (5.8) запису інтерполяційного многочлена. Усі обчислення розташуємо в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1

i	$x-x_i$	$x_i-x_j,\ i\ne j$			$\prod(x_i-x_j),\ i\ne j$	$f(x_i)$	$\frac{Y_i}{(x-x_i)}$
0	0,2	– 0,1	– 0,3	– 0,4	– 0,012	2,38545	– 993,938
1	0,1	0,1	– 0,2	– 0,3	0,006	2,49749	4162,48
2	– 0,1	0,3	0,2	– 0,1	– 0,006	2,69166	4486,10
3	– 0,2	0,4	0,3	0,1	0,012	2,77385	– 1155,77

$$L_3(1,6)=\omega_4(1,6)\cdot\sum_{i=0}^{3}\frac{Y_i}{(1,6-x_i)},$$

$$L_3(1,6)=2,59955.$$

Для порівняння наведемо значення функції $y=x+\sin x$ для $x=1,6$ з п’ятьма точними десятковими знаками: $y(1,6)=2,59957$.

5.4. Інтерполяційний многочлен Ньютона із скінченними різницями

За звичай таблиці $\{x_i, f(x_i)\}$, $(i=0,1,...,n)$ мають рівновіддалені вузли: $x_i=x_0+ih$, де h – крок інтерполювання. При цьому доцільно розглядати величини, які називаються *скінченними різницями*. Скінченні різниці першого порядку – це різниці між сусідніми табличними значеннями:

$$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i,\ i=0,\ 1,\dots,\ n-1.$$

Різниці другого порядку:

$$\Delta^2 y_i=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i,\ i=0,\ 1,\dots,\ n-2 \text{ і т.д.}$$

Формула для скінченних різниць *к*-го порядку (*к*> 1) буде такою:

$$\Delta^k y_i=\Delta^{k-1}y_{i+1}-\Delta^{k-1}y_i,\ i=0,\ 1,\dots,\ n-k. \tag{5.13}$$

Скінченні різниці зручно представляти у вигляді таблиць (табл. 5.2).

Таблиця 5.2

x	$f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\cdots$	$\Delta^n y$
x_0 x_1 $\vdots$	y_0 y_1 $\vdots$	Δy_0 Δy_1 $\vdots$	$\Delta^2 y_0$ $\Delta^2 y_1$ $\vdots$	$\cdots$ $\cdots$ $\vdots$	$\Delta^n y_0$

x_{n-2} x_{n-1} x_n	y_{n-2} y_{n-1} y_n	Δy_{n-2} Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-2}$		

Будемо шукати інтерполяційний многочлен *n*-го степеня у вигляді $P_n^{(1)}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$

Враховуючи, що $P_n^{(1)}(x_i) = y_i$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$, визначаємо коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$. Після підстановки значень коефіцієнтів в попередню формулу, маємо

$$P_n^{(1)}(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \qquad (5.14)$$

Многочлен (5.14) називається *першим інтерполяційним многочленом Ньютона (або у формі Ньютона)*, а наближена рівність $f(x) \approx P_n^{(1)}(x),\ x \in [a;\ b]$ – першою інтерполяційною формулою Ньютона.

Скориставшись заміною змінної $\frac{x - x_0}{h} = t$ або $x = x_0 + th$, з (5.14) одержимо

$$P_n^{(1)}(x) = y_0 + \Delta y_0\, t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \ldots + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1). \qquad (5.15)$$

Похибка інтерполяції при цьому буде такою

$$R_n^{(1)}(x) \equiv f(x) - P_n^{(1)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t-1)(t-2)\ldots(t-n) \cdot h^{n+1}, \quad \xi \in (a,b). \qquad (5.16)$$

Многочлен (5.15) називають інтерполяційним многочленом Ньютона *інтерполяції вперед*. При *n=1* і *n=2* із формули (5.15) одержимо частинні випадки відповідно лінійної і квадратичної інтерполяції.

При обчисленні значень функції для *x* близьких до кінця таблиці, тобто близьких до x_n ,застосовувати першу інтерполяційну формулу Ньютона недоцільно. У цьому випадку користуються *другою інтерполяційною формулою Ньютона* (*інтерполяції назад*), загальний вигляд якої такий:

$$P_n^{(2)}(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_n)\cdots(x - x_1).$$

Визначивши коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ аналогічно до попереднього, матимемо *другий інтерполяційний многочлен Ньютона*

$$P_n^{(2)}(x) = y_n + \Delta y_{n-1}\, t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} t(t+1) + \ldots +$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t+1)(t+2)\ldots(t+n-1) \tag{5.17}$$

і відповідно залишковий член

$$R_n^{(2)} \equiv f(x) - P_n^{(2)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t+1)(t+2)\ldots(t+n) \cdot h^{n+1}, \ \ \xi \in (a,b). \tag{5.18}$$

Зауваження. Розглянемо $|\omega_{n+1}(x)| = \prod_{j=0}^{n} |x - x_j|$, тобто модуль добутку відстаней від точки x до вузлів інтерполяції. Ця величина буде мінімальною, якщо використати $(n+1)$ вузлів, найближчих до x. Тому формули Ньютона (5.15) і (5.17) зручно використовувати при інтерполяції відповідно на початку і в кінці таблиці.

Приклад 5. 2. Розглянемо таблицю функції $y = x^2 e^{-x}$ на проміжку $[2, 3]$ за умов $x_0 = 2$, $x_i = x_0 + ih$, $h = 0{,}2$, $i = \overline{0, 5}$ (табл. 5.3) і поставимо задачу: обчислити за даною таблицею з використанням інтерполяційного многочлена третього степеня значення функції $y = x^2 e^{-x}$ в точках $x = 2{,}1;\ 2{,}5;\ 2{,}9$ і оцінити відповідні похибки інтерполяції.

Розв'язання. Складемо таблицю скінченних різниць. Оскільки степінь інтерполяційного многочлена дорівнює трьом, то таблицю складемо до різниць третього порядку включно.

Таблиця 5.3

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	2,0	0,541341			
1	2,2	0,536287	– 0,005054		
2	2,4	0,522535	– 0,013752	– 0,008698	
3	2,6	0,502089	– 0,020446	– 0,006694	0,002004
4	2,8	0,476751	– 0,025338	– 0,004892	0,001802
5	3,0	0,448084	– 0,028667	– 0,003329	0,001563

Для розв'язання задачі скористаємося формулами (5.15) – (5.16) і (5.17) – (5.18).

1. $x = 2{,}1;\ x_0 = 2;\ t = \dfrac{x - x_0}{h} = 0{,}5$.

$$P_3^{(1)}(2{,}1) = 0{,}541341 + (-0{,}005054) \cdot 0{,}5 + \frac{1}{2!}(-0{,}008698) \cdot 0{,}5 \cdot (-0{,}5) +$$
$$+ \frac{1}{3!} 0{,}002004 \cdot 0{,}5 \cdot (-0{,}5) \cdot (-1{,}5) = 0{,}540056.$$

$$y^{(\mathrm{IV})}(x)=e^{-x}\left(x^2-8x+12\right),$$

$$\max_{x\in[2,3]}\left|y^{(\mathrm{IV})}(x)\right|<0,2,$$

$$\left|R_3(2,1)\right|=\left|y(2,1)-P_3^{(1)}(2,1)\right|\le$$

$$\le\frac{\max\limits_{x\in[2,3]}\left|y^{(\mathrm{IV})}(x)\right|}{4!}\cdot(0,2)^4\cdot\left|0,5\cdot(-0,5)\cdot(-1,5)\cdot(-2,5)\right|<0,2\cdot10^{-4}.$$

2. $x=2,9;\, x_0=3;\, t=\dfrac{x-x_n}{h}=-0,5.$

$$P_3^{(2)}(2,9)=0,448084+(-0,028667)\cdot(-0,5)+\frac{1}{2!}(-0,003329)\cdot(-0,5)\cdot0,5+$$

$$+\frac{1}{3!}0,001563\cdot(-0,5)\cdot0,5\cdot1,5=0,462736.$$

$$\left|R_3(2,9)\right|\le\frac{0,2}{4!}(0,2)^4\cdot\left|(-0,5)\cdot0,5\cdot1,5\cdot2,5\right|<0,2\cdot10^{-4}.$$

3. $x=2,5$. Враховуючи попереднє зауваження, слід вибрати вузли інтерполяції $x_0=2,2$; $x_1=2,4$; $x_2=2,6$; $x_3=2,8$. При цьому $t=\dfrac{x-x_0}{h}=1,5$. Отже, якщо використати знову формулу (5.15), будемо мати

$$P_3^{(1)}(2,5)=0,536287+(-0,013752)\cdot1,5+\frac{1}{2!}(-0,006694)\cdot1,5\cdot0,5+$$

$$+\frac{1}{3!}0,001802\cdot1,5\cdot0,5\cdot(-0,5)=0,513036.$$

$$\left|R_3(2,9)\right|\le\frac{0,2}{4!}(0,2)^4\cdot\left|1,5\cdot0,5\cdot(-0,5)\cdot(-1,5)\right|<0,8\cdot10^{-5}.$$

5.5. Схема Ейткіна обчислення значення інтерполяційного многочлена

У випадку, коли немає потреби знати наближений аналітичний вираз таблично заданої функції, а треба лише обчислити її значення в деякій точці, яка не співпадає з жодним з вузлів інтерполяції, зручно використовувати *інтерполювання за схемою Ейткіна,* особливістю якої є однотипність обчислень. Перевага цієї схеми над вище описаним методом полягає в тому, що при залученні нових вузлів не потрібно перераховувати все спочатку, а варто лише скористатися попередніми обчисленнями для підвищення степеня многочлена Лагранжа.

Обчислення значення функції в точці, яка не належить до вузлів інтерполяції, починається із використання двох вузлів інтерполяції з послідовним залученням нових аж до досягнення потрібної точності. Скористаємось формулою Лагранжа (5.10) для випадку лінійної інтерполяції.

На відрізку $\left[x_0, x_1\right]$ інтерполяційне значення функції, яке позначимо через $P_{0,1}(x)$, можна подати у рівносильному до (5.10) вигляді

$$P_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix},$$

на відрізку $\left[x_1, x_2\right]$ – у вигляді $P_{1,2}(x) = \dfrac{1}{x_2 - x_1}\begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}$

і нарешті, на відрізку $\left[x_0, x_2\right]$ у вигляді $P_{0,2}(x) = \dfrac{1}{x_2 - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}.$

Замінимо тепер y_0 і y_2 в останній формулі відповідно на $P_{0,1}(x)$ і $P_{1,2}(x)$; отримаємо наступний вираз

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_0}\begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}.$$

Якщо в цьому виразі розкрити визначник, то можна переконатися, що $P_{0,1,2}(x)$ – інтерполяційний многочлен Лагранжа другого порядку, для якого виконуються рівності

$$P_{0,1,2}(x_0) = y_0, \; P_{0,1,2}(x_1) = y_1, \; P_{0,1,2}(x_2) = y_2.$$

Отже, застосовуючи лінійну інтерполяцію до многочленів $P_{0,1}(x)$ і $P_{1,2}(x)$, отримали інтерполяційний многочлен другого степеня $P_{0,1,2}(x)$.

Ця схема узагальнюється па інтерполяційні многочлени вищих степенів. Методом математичної індукції можна довести, що інтерполяційний многочлен *n*-го степеня, побудований за *n* + 1 вузлом, отримується шляхом лінійної інтерполяції, застосованої до двох різних інтерполяційних поліномів *(n* - 1)-го степеня, кожен з яких побудований за певними *n* вузлами інтерполяції. Значення інтерполяційного многочлена степеня *n* можна обчислити за формулою

$$P_{0,1,\ldots,n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0}\begin{vmatrix} P_{0,1,\ldots,n-1}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2,\ldots,n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}.$$

Можна переконатися, що виконуються умови $P_{0,1,\ldots,n}(x_i) = y_i, \; i = \overline{0,n}$ і $P_{0,1,\ldots,n}(x)$ співпадає з інтерполяційним многочленом Лагранжа *n*-го степеня.

В обчисленнях за цією схемою нові вузли x_i залучають доти, поки результати обчислень не покажуть, що досягнуто необхідної точності. Іншими словами, потреби в залученні нових вузлів немає, якщо для деякого натурального *к* > 1 виконується умова

$$\left|P_{0,1,\ldots,k-1}(x) - P_{0,1,\ldots,k}(x)\right| \le \varepsilon,$$

де ε - точність обчислень.

Схема Ейткіна обчислення $P_{0,1,...,n}(x)$ полягає в послідовному обчисленні елементів таблиці 5.4, що містить значення інтерполяційних многочленів, побудованих за відповідними вузлами.

Таблиця 5.4

$x-x_0$	x_0	$H_{(0)}(x)$			
$x-x_1$	x_1	$H_{(1)}(x)$	$H_{(0,1)}(x)$		
$x-x_2$	x_2	$H_{(2)}(x)$	$H_{(1,2)}(x)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$x-x_n$	x_n	$H_{(n)}(x)$	$H_{(n-1,n)}(x)$	$\dots$	$H_{(0,1,...,n)}(x)$

5.6. Інтерполяційний многочлен Ньютона з поділеними різницями

Розглянемо форму запису інтерполяційного многочлена, яка використовує поняття поділеної різниці. За означенням, значення функції $f(x_s)$, $s=0,1,...,n$ називають поділеними різницями нульового порядку. Поділені різниці першого порядку визначаються співвідношеннями

$$f(x_s;x_{s+1})=\frac{f(x_{s+1})-f(x_s)}{x_{s+1}-x_s},\ s=0,1,...,n-1.$$

Різниці k–го порядку $(k\le n)$ визначаються через різниці $(k-1)$–го порядку співвідношеннями

$$f(x_s;x_{s+1};...;x_{s+k})=\frac{f(x_{s+1};x_{s+2};...;x_{s+k})-f(x_s;x_{s+1};...;x_{s+k-1})}{x_{s+k}-x_s},\quad (5.19)$$

$$s=0,1,...,n-k.$$

Методом математичної індукції можна показати, що для поділених різниць k–го порядку справедлива формула

$$f(x_s;x_{s+1};...;x_{s+k})=\sum_{i=0}^{s+k}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{j=0,\ j\ne i}^{s+k}(x_i-x_j)},\quad (5.20)$$

з якої випливає, що поділена різниця є лінійна функція відносно функції f:

$$(\alpha_1f_1+\alpha_2f_2)(x_s;x_{s+1};...;x_{s+k})=\alpha_1f_1(x_s;x_{s+1};...;x_{s+k})+\alpha_2f_2(x_s;x_{s+1};...;x_{s+k}),$$

де α_1, α_2 – деякі числа, і що поділена різниця є симетрична функція своїх аргументів (тобто не змінюється при довільній їх перестановці).

Для практичного застосування важливою є властивість поділеної різниці, яка показує її зв'язок з похідною:

$$f(x;x_0;x_1;...;x_n)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\quad (5.21)$$

де $x\in[a,b]$ і не співпадає з жодним вузлом інтерполяції x_i $\left(x_i\in[a,b]\right)$,

$i = 0,1,...,n$, $\xi \in [\alpha_1, \alpha_2]$, $\alpha_1 = \min(x, x_0, x_1, ..., x_n)$, $\alpha_2 = \max(x, x_0, x_1, ..., x_n)$.

Зауваження. З (5.17) випливає, що поділені різниці k–го порядку від многочлена k–го степеня сталі, а різниці $(k+1)$–го і вищого порядку дорівнюють нулю. Отже, спостерігаючи за поведінкою поділених різниць великої таблиці функцій, можна зробити висновок про те, який степінь інтерполяційного многочлена доцільно використовувати для наближення цієї функції.

Інтерполяційним многочленом Ньютона з поділеними різницями називають таку форму запису інтерполяційного многочлена

$$H_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f(x_0; x_1) + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot f(x_0; x_1; x_2) + \\ + ... + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1}) \cdot f(x_0; x_1; ...; x_n). \tag{5.22}$$

Будемо називати її у подальшому формою Ньютона.

З (5.22) бачимо, що додавання одного або декількох вузлів з відповідним підвищенням степеня інтерполяційного многочлена потребує додавання до правої частини цієї формули відповідного числа доданків. Зазначена особливість надає формулі Ньютона переваги у порівнянні з формулою Лагранжа.

Зупинимось на питанні обчислень для запису форми Ньютона. Коефіцієнти форми Ньютона (5.22) розміщені на “головній діагоналі” таблиці 5.5 поділених різниць.

Для обчислення форми Ньютона (5.22) скористаємося позначенням $f(x_0; x_1; ...; x_n) = A_i$ для усіх i та зобразимо її у вигляді

$$H_n(x) = A_0 + (x - x_0) \cdot (A_1 + (x - x_1) \cdot (A_2 + ... + (x - x_{n-1}) \cdot A_n) ...), \tag{5.23}$$

який є узагальненням схеми Горнера (5.22).

Таблиця 5.5

x_i	0–го пор.	1–го пор.	2–го пор.		$(n-1)$–го пор.	n–го пор.
x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0; x_1)$				
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1; x_2)$	$f(x_0; x_1; x_2)$			
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2; x_3)$	$f(x_1; x_2; x_3)$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f(x_{n-2}; x_{n-1})$	$f(x_{n-3}; x_{n-2}; x_{n-1})$	$\vdots$	$f(x_0; ...; x_{n-1})$	
x_n	$f(x_n)$	$f(x_{n-1}; x_n)$	$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n)$		$f(x_1; ...; x_n)$	$f(x_0; x_1; ...; x_n)$

Наведемо ще одну форму запису інтерполяційного многочлена Ньютона з поділеними різницями

$$H_n(x) = f(x_n) + (x - x_n) \cdot f(x_{n-1}; x_n) + (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n) \cdot f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) + \\ + ... + (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n) \cdot f(x_0; x_1; ...; x_n). \tag{5.24}$$

Припустимо тепер, що степінь інтерполяційного многочлена зафіксована, дорівнює n і задана таблиця $\{x_i, f(x_i)\}$, $i = 0,1,...,m$, де $m \gg n$. Якщо вузли інтерполяції вибрати поблизу точки x, для якої наближено обчислюються значення функції $f(x)$, то проміжна точка ξ в виразі для похибки інтерполяції (11) також буде поблизу точки x, при цьому величина $f^{(n+1)}(\xi)$ змінюється не дуже суттєво. На величину похибки суттєво впливає співмножник $\omega_{n+1}(x)$.

Зауваження . Формулу Ньютона (5.22) використовують в околі точки x_0, а формулу (5.24) в околі точки x_n.

Звернемося до прикладу 1 і розглянемо таблицю поділених різниць для функції $y = x + \sin x$ (табл. 5.6).

Таблиця 5.6

i	x_i	$f(x_i)$	$f(x_i; x_{i+1})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2})$	$f(x_i; ...; x_{i+3})$
0	1,4	2,38545			
1	1,5	2,49749	1,1204		
2	1,7	2,69166	0,97085	– 0,4985	
3	1,8	2,77385	0,8219	– 0,4965	0,005

Обчислимо $H_3(1,6)$ за формулою Ньютона (5.22):

$$H_3(1,6) = 2,38545 + 0,2 \cdot 1,1204 + 0,2 \cdot 0,1 \cdot (-0,4985) +$$
$$+ 0,2 \cdot 0,1 \cdot (-0,1) \cdot 0,005 = 2,59955.$$

Обчислимо тепер $H_3(x)$ для $x = 1,45$:

$$H_3(1,45) = 2,38545 + 0,05 \cdot 1,1204 + 0,05 \cdot (-0,05) \cdot (-0,4985) +$$
$$+ 0,05 \cdot (-0,05) \cdot (-0,25) \cdot 0,005 = 2,44272.$$

Оцінимо $R_3(x)$ для $x = 1,45$. Маємо

$$|R_3(1,45)| \le \frac{1}{4!} |\omega_4(1,45)| < 0,1 \cdot 10^{-4}.$$

Обчислимо $H_3(x)$ для $x = 1,75$, використовуючи формулу (5.24):

$$H_3(1,75) = 2,77385 + (-0,05) \cdot 0,8219 + (-0,05) \cdot 0,05 \cdot (-0,4985) +$$
$$+ (-0,05) \cdot 0,05 \cdot 0,25 \cdot 0,005 = 2,73400.$$

Оцінюючи похибку наближення $f(1,75) \approx H_3(1,75)$, отримуємо

$$|R_3(1,75)| \le \frac{1}{4!} |\omega_4(1,75)| < 0,1 \cdot 10^{-4}.$$