

## Лекція 7. Наближене розв'язування диференціальних рівнянь.

### ПЛАН

1. Постановка задачі числового розв'язування задачі Коші.
2. Метод Ейлера
3. Удосконалений метод Ейлера
4. Удосконалений метод Ейлера-Коші
5. Удосконалений метод Ейлера з ітераційною обробкою
6. збіжність методу Ейлера і його модифікацій.
7. Методи Рунге-Кута.

#### 7.1. Постановка задачі числового розв'язування задачі Коші.

Часто задачі техніки та і природознавства зводяться до відшукування розв'язку певного диференціального рівняння (або системи таких рівнянь), який задовольняє певні початкові умови. Проінтегрувати таке рівняння в скінченному вигляді вдається досить рідко. При цьому дістають здебільшого такий вираз, до якого шукана функція входить неявно, а тому користуватися ним незручно.

На практиці застосовують здебільшого наближене інтегрування диференціальних рівнянь. Воно дає змогу знайти наближений розв'язок задачі Коші або у вигляді певного аналітичного виразу, або у вигляді деякої таблиці значень.

Розглянемо окремі методи чисельного розв'язування задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної. Наближений розв'язок задачі Коші записують у вигляді певної таблиці значень.

Задача Коші полягає у тому, щоб знайти розв'язок  $y(x)$  диференціального рівняння

$$y' = f(x, y), \quad (7.1)$$

який задовольняє початкову умову

$$y(x)|_{x=x_0} = y_0. \quad (7.2)$$

Геометрично це означає, що треба знайти ту інтегральну криву  $y(x)$  рівняння (7.1), яка проходить через точку  $(x_0, y_0)$ .

Задача Коші (7.1)-(7.2) має єдиний розв'язок, наприклад при виконанні такої теореми.

**Теорема (Пікара).** Якщо функція  $f(x, y)$  двох змінних  $x$  і  $y$  неперервна в замкнутому прямокутнику

$$\bar{\Delta} = \{(x, y) : |x - x_0| \leq l, |y - y_0| \leq b\}$$

з центром у точці  $(x_0, y_0)$  і задовольняє в ньому умову Ліпшиця по змінній  $y$ , тобто існує число  $K > 0$ , яке не залежить від  $x$  і  $y$  таке, що

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

$$(7.3)$$

для будь-яких точок  $(x_1, y_1) \in \bar{\Delta}$  і  $(x_2, y_2) \in \bar{\Delta}$ , то існує єдина диференційовна функція  $y = \varphi(x)$ , яка є розв'язком диференціального рівняння (7.1), що

задовольняє початкову умову (7.2). Цей розв'язок визначений і неперервно диференційований принаймні на відрізку  $[x_0-h; x_0+h]$ ,

$$h = \min\left\{l, \frac{b}{M}\right\}, M = \max_{(x,y) \in \Delta} |f(x,y)|$$

Розглянемо так звані однокрокові чисельні методи розв'язування задачі Коші (7.1)-(7.2), в яких, щоб знайти її розв'язок достатньо знати розв'язок у точці  $x_k$ . І оскільки розв'язок задачі в точці  $x_0$  відомий з початкових умов, то ці методи дають змогу обчислити послідовно значення розв'язку в наступних точках  $x_1=x_0+h, x_2=x_1+h, \dots$ . З однокрокових чисельних методів розглянемо метод Ейлера.

Надалі припустимо, що функція  $f(x,y)$  рівняння (7.1) задовольняє умови теореми Пікара.

### 7.2. Метод Ейлера

Нехай на відрізку  $[x_0; x_0+l]$ , треба знайти чисельний розв'язок задачі Коші (7.1)-(7.2). Для цього відрізок  $[x_0; x_0+l]$  поділимо на  $n$  рівних частин точками  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n=x_0+l$ , де

$$x_k = x_0 + kh \quad (k=0, 1, 2, \dots, n), \quad h = \frac{l}{n}$$

Величину  $h$  називають кроком чисельного інтегрування диференціального рівняння (7.1).

Розв'язати задачу (7.1)-(7.2) чисельно – це означає для заданої послідовності  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n=b=x_0+h$  незалежної змінної  $x$  і числа  $y_0$  знайти числову послідовність  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ , тобто для заданої послідовності значень незалежних значень шуканого розв'язку задачі Коші.

Якщо наближений розв'язок задачі (7.1)-(7.2) в точці  $x_k$  відомий, то, про інтегрувавши рівняння (7.1) в межах від  $x_k$  до  $x_{k+1}$ , знайдемо його розв'язок в точці  $x_{k+1}$  за формулою

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx \quad (7.5)$$

Саме ця формула є вихідною для побудови багатьох чисельних методів розв'язування задачі (7.1)-(7.2).

*Метод Ейлера.* Якщо інтеграл у правій частині формули (7.5) обчислити за формулою лівих прямокутників, то знайдемо

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + O(h^2) \quad (7.6)$$

Відкинувши в цій рівності доданок порядку  $O(h^2)$ , дістанемо розрахункову формулу

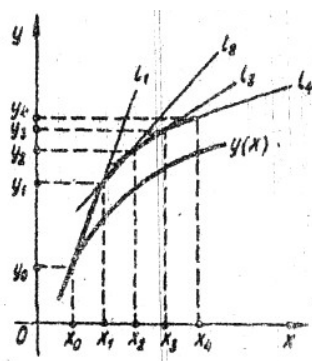
$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1), \quad h = x_{k+1} - x_k, \quad (7.7)$$

яку називають формулою Ейлера. Тут і далі скрізь  $y_k$  і  $y(x_k)$  – відповідно, наближене і точне значення шуканого розв'язку задачі (7.1)-(7.2) у точці  $x_k$ . Різницю  $y_k - y(x_k)$  називають похибкою наближеного значення в  $y_k$  точці  $x_k$ .

Оскільки дотична до графіка функції  $y(x)$  в точці  $(x_k, y_k)$  має кутовий коефіцієнт  $k$ , який дорівнює значенню похідної  $y'_k = f(x_k, y_k)$ , то рівняння

дотичної до інтегральної кривої  $y(x)$  задачі (7.1)-(7.2) в точці  $(x_k, y_k)$  має вигляд

$$y - y_k = y'_k (x - x_k) \text{ або } y - y_k = f(x_k, y_k)(x - x_k).$$



Звідси для ординати точки  $y_{k+1}$  перетину цієї дотичної з прямою  $x = x_{k+1}$  дістанемо формулу (7.7). А це означає, що на кожному з відрізків  $[x_k; x_{k+1}]$ ,  $(k=0,1,\dots,n-1)$  інтегральна крива наближено замінюється відрізком дотичної до неї в точці  $(x_k, y_k)$ .

Якщо в площині  $Oxy$  позначити точки  $M_k(x_k, y_k)$ ,  $k=0,1,\dots,n$  і сполучити їх по порядку відрізками, то дістанемо ламану (її називають ламаною Ейлера), яка наближено зображує графік шуканого розв'язку задачі

(7.1)-(7.2). У цьому полягає геометричний зміст методу Ейлера (рис. 1).

Зазначимо, що похибка методу Ейлера на кожному кроці є величина порядку  $O(h^2)$ . Точність методу досить мала і з переходом від точки  $x_k$  до точки  $x_{k+1}$  її похибка систематично зростає.

### 7.3. Удосконалений метод Ейлера

Якщо інтеграл у правій частині формули (7.5) обчислити за формулою середніх прямокутників, тобто значення підінтегральної функції  $f(x, y(x))$

обчислити в точці  $x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{1}{2}h$ , то знайдемо

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf \left( x_{k+\frac{1}{2}}, y \left( x_{k+\frac{1}{2}} \right) \right) + O(h^3) \quad (7.8)$$

Величину невідомого значення функції  $y \left( x_{k+\frac{1}{2}} \right)$  обчислимо за формулою (7.6) з кроком  $\frac{1}{2}h$ . Матимемо

$$y \left( x_{k+\frac{1}{2}} \right) = y(x_k) + \frac{1}{2} hf(x_k, y(x_k)) + O(h^2).$$

Підставивши це значення  $y \left( x_{k+\frac{1}{2}} \right)$  в (7.8), отримаємо

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf \left( x_{k+\frac{1}{2}}, y(x_k) + \frac{1}{2} hf(x_k, y(x_k)) + O(h^2) \right) + O(h^3) =$$

$$y(x_k) + hf \left( x_{k+\frac{1}{2}}, y(x_k) + \frac{1}{2} hf(x_k, y(x_k)) + O(h^2) \right) + O(h^3).$$

Відкинувши тут доданок, пропорційний  $h^3$ , матимемо

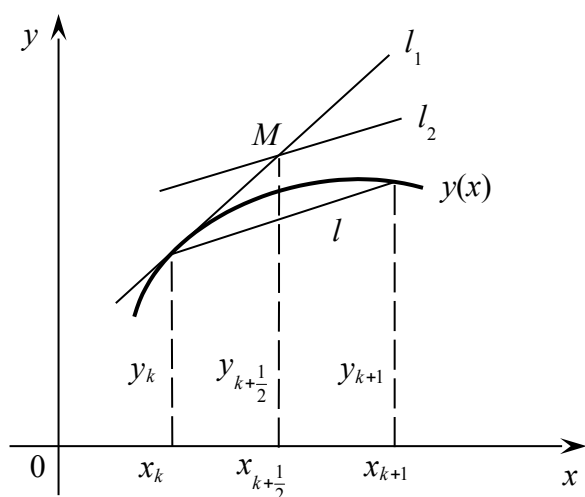
$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+\frac{1}{2}}, y_k) + \frac{1}{2} hf(x_k, y_k).$$

Розрахункові формули вдосконаленого методу Ейлера можна записати у вигляді

$$y_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \frac{1}{2} hf(x_k, y_k), \quad (7.9)$$

$$y_{k+1} = y_k + hf \left( x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}} \right). \quad (7.10)$$

Отже, в удосконаленому методі Ейлера спочатку за методом Ейлера (формула (7.9)) обчислюють наближений розв'язок  $y_{k+\frac{1}{2}}$  задачі (7.1)-(7.2) в точці  $x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{1}{2}h$ , а потім за формулою (7.10) – наближений розв'язок  $y_{k+1}$  у точці  $x_{k+1}$ ; на кожному кроці інтегрування праву частину рівняння (7.1) обчислюють двічі ( у точках  $(x_k, y_k)$  і  $(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}})$  ).



Геометрично це означає, що на відрізку  $[x_k, x_{k+1}]$  графік інтегральної кривої задачі (7.1)-(7.2) замінюється відрізком прямої, яка проходить через точку  $(x_k, y_k)$  і має кутовий коефіцієнт  $k=f(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}})$ . Іншими словами, ця пряма (рис.2) утворює з додатним напрямом осі  $Ox$  кут  $\varphi = \arctg f(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}})$ . Що ж до точки  $(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}})$ , то це точка перетину дотичної до інтегральної кривої задачі (7.1)-(7.2) в точці  $(x_k, y_k)$  з прямою  $x = x_k + \frac{1}{2}h$ . Похибка вдосконалено

методу Ейлера на кожному кроці має порядок  $O(h^3)$ .

Рис. 2

#### 7.4. Удосконалений метод Ейлера-Коші

Якщо інтеграл у правій частині формули (7.5) обчислити за формулою трапецій, то матимемо

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \frac{h}{2}(f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))) + O(h^3). \quad (7.11)$$

Невідоме значення  $y(x_{k+1})$ , що входить до правої частини цієї рівності, можна обчислити за формулою (7.7). Підставивши його в праву частину рівності (7.11), дістанемо рівність

$$\begin{aligned} y(x_{k+1}) &= y(x_k) + \frac{h}{2}(f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + O(h^2))) + O(h^3) = \\ &= y(x_k) + \frac{h}{2}(f(x_k, y(x_k)) + (f(x_{k+1}, y(x_k)) + hf(x_k, y(x_k)))) + O(h^3). \end{aligned}$$

Звідси для удосконалення методу Ейлера-Коші матимемо такі розрахункові формули:

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad (7.12)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})). \quad (7.13)$$

Отже, і в цьому методі на кожному кроці інтегрування праву частину рівняння (7.1) обчислюють двічі: спочатку за методом Ейлера (формула (7.12)) обчислюють наближене значення шуканого розв'язку  $\tilde{y}_{k+1}$  у точці  $x_{k+1}$ , яке потім уточнюють за формулою (7.13). Похибка методу на кожному кроці має порядок  $O(h^3)$ .

Така побудова наближеного розв'язку задачі (7.1)-(7.2) з геометричної точки зору означає, що на відрізку  $[x_k, x_{k+1}]$  графік інтегральної кривої наближають відрізком прямої, яка проходить через точку  $(x_k, y_k)$  і має кутовий коефіцієнт  $k = \frac{1}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}))$ . Тобто ця пряма утворює з додатним напрямом осі Ох кут  $\varphi = \arctg \frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})}{2}$ .

Координати точки  $(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})$  визначають як точку перетину дотичної  $y = y_k + f(x_k, y_k)(x - x_k)$  до графіка інтегральної кривої задачі (7.1)-(7.2) в точці  $(x_k, y_k)$  з прямою  $x = x_{k+1}$  (рис. 3).

### 7.5. Удосконалений метод Ейлера з ітераційною обробкою

Якщо в рівності (7.11) відкинути доданок, пропорційний  $h^3$ , то для знаходження значення невідомого розв'язку  $y_{k+1}$  в точці  $x_{k+1}$ , дістанемо формулу:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})). \quad (7.14)$$

Невідома  $y_{k+1}$  входить до обох частин рівності (7.14). Тому метод, що визначається формулою (7.14), належить до *неявних методів* чисельного інтегрування задачі (7.1)-(7.2). Формули (7.12)-(7.13) саме й пропонують один із способів наближеного розв'язування рівняння (7.14). Проте його розв'язок завжди можна обчислити із наперед заданою точністю  $\varepsilon > 0$ , якщо скористатися методом ітерацій. Послідовні наближення можна обчислити за формулою:

$$y_{k+1}^{(i+1)} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(i)})) \quad (i=0,1,2,\dots) \quad (7.15)$$

За нульове наближення  $y_{k+1}^{(0)}$  можна взяти значення  $y_k$  або значення  $y_{k+1}$ , обчислене за формулою Ейлера (7.7).

Процес ітерацій за формулою (7.15) припиняють з виконанням умови

$$|y_{k+1}^{(i+1)} - y_{k+1}^{(i)}| < \varepsilon,$$

тобто коли модуль різниці двох послідовних наближень до шуканого значення величини  $y_{k+1}$  буде меншим за наперед задану точність  $\varepsilon > 0$ .

За наближене значення величини  $y_{k+1}$  в точці  $x_{k+1}$  беруть значення  $y_{k+1}^{(i+1)}$ .

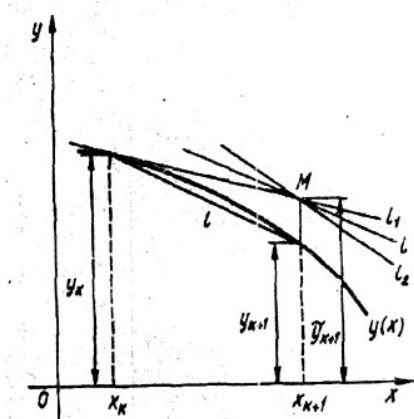


Рис. 3

Легко встановити умови, в разі виконання яких ітераційний процес, що задається формулою (7.15), збігається. Для цього від рівності (7.14) віднімемо почленно рівність (7.15). Дістанемо

$$y_{k+1} - y^{(i+1)}_{k+1} = \frac{h}{2}(f(x_{k+1}, y_{k+1}) - f(x_{k+1}, y^{(i)}_{k+1})).$$

Звідси, користуючись умовою Ліпшиця (7.3), знаходимо

$$|y_{k+1} - y^{(i+1)}_{k+1}| \leq \frac{h}{2}|f(x_{k+1}, y_{k+1}) - f(x_{k+1}, y^{(i)}_{k+1})| \leq \frac{h}{2}K|y_{k+1} - y^{(i)}_{k+1}|, \quad \text{або}$$

$$|y_{k+1} - y^{(i+1)}_{k+1}| \leq \left(\frac{h}{2}K\right)^{i+1}|y_{k+1} - y^{(0)}_{k+1}|.$$

Отже, ітераційний процес (7.15) збігається, тобто  $y^{(i+1)}_{k+1} \rightarrow y_{k+1}$ , коли  $i \rightarrow \infty$ , якщо крок інтегрування  $h$  вибрано так, щоб виконувалась нерівність  $\frac{1}{2}hK < 1$ . При цьому збіжність буде тим швидшою, чим меншою буде величина  $\frac{1}{2}hK$ .

Якщо алгоритм уточнення числового значення шуканого розв'язку після виконання кількох ітерацій не веде до рівності відповідної кількості десяткових знаків у двох послідовних наближеннях або розбігається, то крок інтегрування зменшують.

Неявний метод чисельного інтегрування задачі (7.1)-(7.2) використовується також тоді, коли інтеграл у правій частині рівності (7.5) обчислюють за формулою правих прямокутників

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_{k+1}, y_{k+1}) + O(h^2).$$

Відкинувши член, пропорційний  $h^2$ , дістають

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}). \quad (7.16)$$

Для обчислення невідомого значення величини  $y_{k+1}$  використовують метод ітерацій. Якщо, наприклад, функція  $f(x, y)$  при фіксованому значенні  $x$  має частинну похідну по  $y$  і якщо ця похідна в деякому околі точки  $(x_{k+1}, y_k)$  задовольняє умову  $|f'_y(x_{k+1}, y)| \leq q < 1$ , то процес ітерацій, що визначається формулою  $y^{(i+1)}_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y^{(i)}_{k+1})$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ),  $y^0_{k+1} = y_k$  збігається, причому тим швидше, чим менше  $q$ .

Оскільки похибка методу (7.16) на кожному кроці інтегрування має порядок  $O(h^2)$ , а для розв'язування рівнянь (7.16) на кожному кроці треба будувати певну ітераційну процедуру, то в практиці обчислень цей метод використовується дуже рідко.

## 7.6. Збіжність методу Ейлера

Нехай функція  $f(x, y)$  з рівняння (1) задовольняє умови теореми Пікара і, крім того, нерівність

$$\left| \frac{df(x, y)}{dx} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq N_1, (x, y) \in \bar{\Delta}. \quad (7.17)$$

Якщо  $u(x_k)$  і  $y_k$  відповідно точний і наближений розв'язки задачі (7.1)-(7.2) в точці  $x_k$ , то різницю

$$\varepsilon_k = y_k - y(x_k), (k = 1, 2, \dots, n, \varepsilon_0 = 0) \quad (7.18)$$

називають похибкою наближеного значення  $y_k$  в точці  $x_k$ , або похибкою чисельного методу.

Оскільки значення точного розв'язку  $y(x_k)$  задачі (7.1)-(7.2) в точці  $x_k$  невідоме, то й похибку  $\varepsilon_k$  наближеного розв'язку  $y_k$  в цій точці обчислити не можна. Проте оцінити зверху модуль цієї похибки можна. З цієї оцінки можна зробити висновок про збіжність методу Ейлера в кожній точці  $x_k$ :  $y_k \rightarrow y(x_k)$ , якщо  $h \rightarrow 0$ .

Для цього від рівності (7.7) віднімають почленно рівність (7.5). Врахувавши (7.18), знаходимо

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &= \varepsilon_k + hf(x_k, y_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx, \text{ або після тотожного перетворення,} \\ \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k &= h(f(x_k, y_k) - f(x_k, y(x_k))) + hf(x_k, y(x_k)) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Інтеграл цієї рівності про інтегруємо частинами. Матимемо

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx &= (x - x_{k+1}) f(x, y(x)) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_{k+1}) \frac{df(x, y(x))}{dx} dx = \\ &= hf(x_k, y(x_k)) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_{k+1}) \frac{df(x, y(x))}{dx} dx \end{aligned}$$

Підставивши значення інтеграла в (19), дістанемо

$$\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k = h(f(x_k, y_k) - f(x_k, y(x_k))) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_{k+1}) \frac{df(x, y(x))}{dx} dx.$$

Звідси, використавши умову Лїпшиця (3) і нерівність (7.17), послїдовно знаходимо

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k| &\leq h|f(x_k, y_k) - f(x_k, y(x_k))| + \int_{x_k}^{x_{k+1}} |(x - x_{k+1})| \left| \frac{df(x, y(x))}{dx} \right| dx \leq hK|y_k - y(x_k)| + \\ &+ N_1 \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - x) dx = hK|\varepsilon_k| + \frac{h^2}{2} N_1 \end{aligned}$$

Але

$$|\varepsilon_{k+1}| - |\varepsilon_k| \leq |\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k|,$$

тому з попередньої нерівності дістаємо  $|\varepsilon_{k+1}| - |\varepsilon_k| \leq hK|\varepsilon_k| + \frac{h^2}{2} N_1$ , або

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq (1 + hK)|\varepsilon_k| + \frac{h^2}{2} N_1 \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (7.20)$$

Отже, якщо значення величини модуля похибки наближеного розв'язку  $y_k$  в точці  $x_k$  відоме, тобто відоме  $|\varepsilon_k|$  (а  $\varepsilon_0 = 0$ ), то нерівність (7.20) дає змогу оцінити зверху величину модуля похибки  $|\varepsilon_{k+1}|$  наближеного розв'язку  $y_{k+1}$  в точці  $x_{k+1}$ .

Проте з нерівності (7.20), яка дає рекурентну оцінку похибки, можна дістати й незалежну оцінку величини модуля похибки наближеного розв'язку

задачі (7.1)-(7.2) методом Ейлера в будь-якій точці  $x_k$ . Щоб упевнитись у цьому, введемо позначення

$$a = 1 + hK; b = \frac{1}{2} h^2 N_1, a > 0, b > 0, \varepsilon_0 = y_0 - y(x_0) = 0 \quad (7.21)$$

і подамо нерівність (20) в такому вигляді

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq a|\varepsilon_k| + b \quad (k=0,1,2,\dots,n-1). \quad (7.22)$$

Звідси дістанемо

$$|\varepsilon_1| \leq b,$$

$$|\varepsilon_2| \leq a|\varepsilon_1| + b \leq ab + b = b(1 + a),$$

$$|\varepsilon_3| \leq a|\varepsilon_2| + b \leq ab(1 + a) + b = b(1 + a + a^2),$$

Припустимо, що справедлива нерівність:

$$|\varepsilon_{k-1}| \leq b(1 + a + a^2 + \dots + a^{k-2})$$

і доведемо, що

$$|\varepsilon_k| \leq b(1 + a + a^2 + \dots + a^{k-1}).$$

Справді, за нерівністю (7.22) маємо:

$$|\varepsilon_k| \leq a|\varepsilon_{k-1}| + b \leq ab(1 + a + a^2 + \dots + a^{k-2}) + b = b(1 + a + a^2 + \dots + a^{k-1}).$$

Оскільки,  $a = 1 + hK \neq 1$ , то  $1 + a + a^2 + \dots + a^{k-1} = \frac{a^k - 1}{a - 1}$

$$|\varepsilon_k| \leq \frac{b(a^k - 1)}{a - 1} \quad (k=0,1,2,\dots,n).$$

Підставивши в цю формулу значення  $a$  і  $b$  з (7.21), знайдемо незалежну оцінку похибки в точці  $x_k$ :

$$|\varepsilon_k| \leq \frac{hN_1}{2K} ((1 + hK)^k - 1) \quad (k=0,1,2,\dots,n).$$

Скориставшись нерівностями  $1 + u \leq l^u$  ( $u > 0$ ) і  $kh \leq nh = l$ , незалежну оцінку для величини модуля похибки наближеного розв'язку в точці  $x_k$  ( $k=0,1,2,\dots,n$ ) можна записати остаточно в такому вигляді

$$|\varepsilon_k| \leq \frac{hN_1}{2K} (l^{lk} - 1) \quad (k=0,1,2,\dots,n). \quad (7.23)$$

Права частина цієї нерівності пропорційна кроку інтегрування  $h$  і тому на будь-якому скінченному відрізку похибка наближеного розв'язку прямуватиме до нуля, коли  $h \rightarrow 0$ , тобто метод Ейлера збігається.

Слід зазначити, що в практичних обчисленнях похибки наближеного розв'язку задачі (7.1)-(7.2) за допомогою формули (7.23) оцінювати часто незручно й недоцільно. Незручно тому, що треба спочатку обчислити сталі  $K$  і  $N_1$ , а недоцільно, бо ця оцінка значно завищена. З розвитком і використанням сучасних ЕОМ для оцінки похибки наближеного розв'язку задачі (7.1)-(7.2) здебільшого вдаються до подвійного перерахунку і правила Рунне. Аналогічними міркуваннями, хоча і дещо складнішими, можна оцінити величини похибки наближеного розв'язку задачі (7.1)-(7.2) удосконаленими методами Ейлера і Ейлера-Коші. З цих оцінок впливатиме збіжність згаданих методів.

Справедливі такі твердження.

**Теорема 7.1.** *Якщо права частина рівняння (7.1) задовольняє умови теореми Пікара і нерівності*

$$\left| \frac{df(x, y(x))}{dx} \right| \leq N_1, \left| \frac{d^2 f(x, y(x))}{dx^2} \right| \leq N_2, (x, y) \in \bar{\Delta},$$

то для похибки  $\varepsilon_k$  наближеного значення  $y_k$  удосконаленого методу Ейлера справедлива оцінка

$$|\varepsilon_k| \leq \frac{1}{8} h^2 \left( N_1 + \frac{N_2}{3K} \right) \frac{(1 + hK + \frac{1}{2} h^2 K^2)^n - 1}{1 + \frac{1}{2} hK} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

З цієї нерівності випливає, що  $|\varepsilon_k| = |y_k - y(x_k)| \rightarrow 0$ , коли  $h \rightarrow 0$ , тобто удосконалений метод Ейлера збігається, якщо  $h \rightarrow 0$ , причому порядок збіжності дорівнює двом.

**Теорема 7.2.** *Якщо права частина рівняння (1) задовольняє умови теореми Пікара і, крім того, нерівності*

$$|f'_x(x, y)| \leq M_1, |f'_y(x, y)| \leq M_2, \left| \frac{d^2 f(x, y(x))}{dx^2} \right| \leq N_2, (x, y) \in \bar{\Delta},$$

а крок інтегрування  $h$  задовольняє нерівність  $\frac{1}{2} hK < 1$ , то для похибки  $\varepsilon_k$  наближеного розв'язку  $y_k$  в точці  $x_k$  удосконаленого методу Ейлера-Коші справедлива оцінка

$$|\varepsilon_k| \leq \frac{h^2}{12} \left( \frac{N_2}{K} + 3(M_1 + MM_2) \left( \frac{1 + \frac{1}{2} hK}{1 - \frac{1}{2} hK} \right)^n - 1 \right),$$

з якої випливає збіжність методу, причому порядок збіжності дорівнює двом.