Лекція 4. Методи розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь.

ПЛАН

1. Метод простих ітерацій

2. Метод Ньютона

3. Модифікований метод Ньютона

5 Система нелінійних рівнянь

Система нелінійних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots x_n)=0 \\ \dots \\ f_n(x_1,\dots x_n)=0 \end{cases} \qquad (4.1)$$

Тут $x_1,\dots,x_n$ - невідомі змінні, а система (4.1) називається звичайною системою порядку n, якщо хоча б одна із функцій $f_i(x_1,...,x_n)$ нелінійна.

Розв'язання систем нелінійних рівнянь – одна із складних задач обчислювальної математики. Складність полягає у тому, щоб з'ясувати: чи має система розв'язок, і, якщо – так, то скільки. Уточнення розв'зків у заданій області – більш проста задача.

Нехай функції f_i визначені в областях $\Omega_i, i=\overline{1,n}$. Тоді область $\Omega=\bigcap_{i=1}^{n}\Omega_i$ і буде тією областю, де можна знайти розв'язок. Найбільш відомими методами уточнення розв'язків є метод простих ітерацій та метод Ньютона.

4.1 Метод простих ітерацій

Система нелінійних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots x_n)=0 \\ \dots \\ f_n(x_1,\dots x_n)=0 \end{cases} \qquad (4.1)$$

Тут $x_1,\dots,x_n$ - невідомі змінні, а система (5.1) називається звичайною

системою порядку n, якщо хоча б одна із функцій $f_i(x_1,...,x_n)$ нелінійна.

Із вихідної системи (4.1) шляхом еквівалентних перетворень переходимо до системи виду:

$$\begin{cases} x_1 = \Phi_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \ldots \\ x_n = \Phi_n(x_1,\ldots,x_n) \end{cases} \qquad (4.2)$$

Метод простих ітерацій є найбільш універсальним і простим для реалізації на ЭОМ. Якщо система має великий порядок, то застосування даного метода, який має повільну швидкість збіжності, не рекомендується. В цьому випадку, використовують метод Ньютона, який має швидшу збіжність.

4.2. Метод Ньютона

Нехай (A_k) — деяка послідовність невироджених n-матриць. Тоді, очевидно, послідовність задач

$x = x - A_k F(x)$, k = 0,1,2,...

маємо ті ж розв'язки, що і вихідне рівняння F(x)=0, і для приближеного знаходження цих розв'язків можна формально записати ітераційний процес

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - A_k F(x^{(k)})$, k = 0,1,2,... (4.3)

Який має вигляд метода простих ітерацій (4.2) при $\Phi(x) := \Phi_k(x) := x - A_k F(x)$. У випадку $A_k = A$ - це дійсно МПІ з лінійною збіжністю послідовності ($x^{(k)}$) Якщо же A_k різні за різних k, то формула (4.3) визначає велику кількість ітераційних методів з матричними параметрами A_k. Розглянемо деякі з цих методів.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[F'(x^{(k)})\right]^{-1} F(x^{(k)}), \qquad (4.4)$$

Цю формулу, що вимагає перетворення матриць на кожній ітерації, можна переписати в неявному вигляді:

$$F'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -F(x^{(k)}). \qquad (4.5)$$

Використання (4.5) припускає при кожному k = 0,1,2,... розв' язок лінійної алгебраїчної системи $F'(x^{(k)})p^{(k)} = -F(x^{(k)})$

відносно векторній поправці $p^{(k)} = \left(p_1{}^{(k)}, p_2{}^{(k)}, ..., p_n{}^{(k)}\right)^T$, а потім добавлення цієї поправки до поточного наближення для отримання наступного:

$$x^{(k+1)} = x^k + p^{(k)}.$$

До розв'язку таких лінійних систем можна використовувати найрізноманітніші методи як прямі, так і ітераційні в залежності від розмірності n розв'язуваної задачі і специфіки матриць Якобі $J(x^{(k)})$.

Порівнюючи (4.5) з формальним розкладом F(x) в ряд Тейлера

$$F(x) = F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2!}F''(x^{(k)})(x - x^{(k)})^2 + ...,$$

бачимо, що послідовність (x_k) в методі Ньютона отримується в результаті заміни при кожному k=0,1,2,... нелінійного рівняння F(x) = 0 чи, при допустимій гладкості F(x)), рівняння

$$F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2!}F''(x^{(k)})(x - x^{(k)})^2 + ... = 0$$

лінійним рівняння

$$F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0,$$

тобто з покроковою лінеаризацією. Як наслідок цього факту, можна полягати, що при допустимій гладкості F(x) і достатньо гарному початковому наближенні $x^{(0)}$ збіжність, яка виникає методом Ньютона послідовності (x_k) до розв'язку x^* буде квадратичною і в багаторазовому випадку.

Новим, порівняно з скалярним випадком, фактором, який ускладнює використання метода Ньютона до розв'язання n-вимірних систем, є необхідність розв'язання n-вимірних лінійних задач на кожній ітерації, обчислення яких збільшується зі збільшенням n, тобто кажучи, непропорційно швидко. Зменшення таких затрат є одним з напрямків модифікації метода Ньютона.

4.3 Модифікований метод Ньютона

Модифікований метод Ньютона облегшує першу задачу. Модифікація полягає в том, що матриця обчислюється не в кожній точці, а лише в початковій.

Якщо матрицю Якобі F'(x) обчислювати і перетворити лише один раз — в початковій точці $x^{(0)}$, то від метода Ньютона перейдемо до модифікованого методу Ньютона

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[F'(x^{(0)})\right]^{-1} F(x^{(k)}) \qquad (4.6)$$

Компромісний варіант — це обчислення і перетворення матриць Якобі не на кожному ітераційному кроці, а через декілька кроків (інколи такі методи називаються рекурсивними).

Наприклад, просте чергування основного і модифікованого методів Ньютона приводить до ітераційної формули

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[F'(x^{(k)})\right]^{-1} F(x^{(k)}) \qquad (4.7)$$

де $A_k := \left[F'(x^{(k)})\right]^{-1}$ k = 0,1,2,… За $x^{(k)}$ тут приймається результат останнього прийому одного кроку основного, а потім одного кроку модифікованого метода, тобто

$$\begin{cases} z^{(k)} = x^{(k)} - A_k F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} = z^{(k)} - A_k F(z^{(k)}). \end{cases} \qquad (4.8).$$