Тема 6. Аналіз надійності технічних систем методом простору можливих станів.

План

1. Експлуатація систем які відновлюються

2. Диференційні рівняння ймовірностей станів систем (рівняння Колмогорова). Правила складання рівнянь.

3. Функції готовності і простою. Фінальні ймовірності.

1. Експлуатація систем які відновлюються

Готовність машин (технічних систем технічного сервісу) до роботи як відмічалось в загальному курсі „Надійності ТС” є комплексний показник який характеризує дві властивості:

- безвідмовність;
- ремонтоздатність.

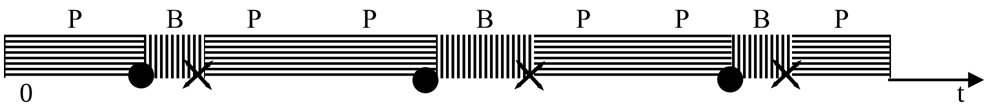
$$K_Г = \frac{\overline{T_P}}{\overline{T_P} + \overline{T_{від}}}$$

(це ймовірність робото здатного стану об’єкта в довільний момент часу.

Таким чином оцінка надійності машини не буде повною без урахування часу на відновлення роботоздатності.

<u>Модель експлуатації з кінцевим часом відновлення.</u>

Урахуємо інтервали роботи і відновлення. Виходячи з загальної часової діаграми виключивши періоди ТО і перерв в роботі залишаються тільки періоди роботи і періоди відновлень.



Напрацювання між сусідніми відмовами є випадкова величина, яка експоненціально розподілена з постійною інтенсивністю $\lambda=\omega$ в період нормальної експлуатації.

Час відновлення описується також експоненціальним розподілом з постійною інтенсивністю μ.

Роботоздатність об’єкта після відмов відновлюється до початкового рівня.

<u>Процес експлуатації відновлюємої системи</u> полягає в тому. що об’єкт стрибком переходить з роботоздатного в неработоздатний стан в наслідок відмови в випадковий момент. Потім система навпаки з неработоздатного

стану стрибком переходить в роботоздатний в результаті відновлення теж в випадковий момент часу. Цей процес може продовжуватись скільки завгодно напротязі експлуатації системи.

Таким чином, система може бути у двох можливих станах:

- роботоздатному;
- неработоздатному.

Хоча в принципі можливі і інші, проміжні якщо це пов'язано з частковою втратою роботоздатності внаслідок формування функціональних відмов.

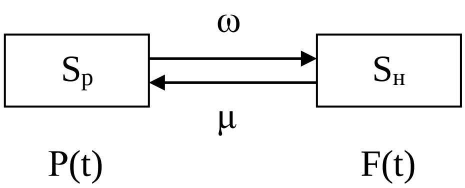
Процес експлуатації відновлюємої системи можна трактувати як випадковий процес з:

а) дискретними станами;

б) і безперервним часом.

в якому переходи із одного стану в інший можна розглядати як такі, які виконуються під впливом потоку відмов і відновлень роботоздатності.

Графічно можливі стани системи можуть бути представлені у вигляді графів станів.



$S_р$ – роботоздатний стан.
$S_н$ – неработоздатний стан

Якщо маємо експоненціальні закони розподілу часу роботи системи між відмовами і часу її відновлення роботоздатності, то для визначення ймовірностей роботоздатного і неработоздатного станів можна застосувать апарат Марківських випадкових процесів (МВП).

Як відомо МВП притаманна властивість відсутності післядії, яка полягає в тому, що ймовірність любого стану системи в кожен момент часу в майбутньому, залежить тільки від теперішнього стану системи і не залежить від того коли і яким чином система прийшла в теперішній стан. Тобто майбутнє залежить від попереднього тільки через теперішнє.

Потоки подій, які переводять систему із одного стану в інший в МВП є пуассонівськими з постійною або залежною від часу інтенсивністю.

МВП з дискретними станами і безперервним часом при постійній інтенсивності ω=const; μ= const називається однорідними.

Таким чином експоненціальний розподіл часу безвідмовної роботи і експоненціальний розподіл часу відновлень – суттєві умови того, що процес експлуатації є Марківським.

Завдяки експоненціальному закону розподілу часу появ подій майбутнє не залежить від минулого. При любому іншому розподілі час появи події залежить від попередньої історії і випадковий процес не буде Марківським.

МВП в фізичних системах з (лічильною) множиною дискретних станів і безперервним часом можна описати диференціальними рівняннями в яких невідомими функціями є ймовірності станів.

Ймовірність станів системи є найважливішою характеристикою поведінки системи.

Система S з лічильною множиною станів S_1, S_2, …, S_i, …, S_j, …, S_n в любий момент часу t може бути в одному із цих станів з ймовірністю

$$P_1(t),\ P_2(t),\ \ldots,\ P_i(t),\ \ldots,\ P_j(t),\ \ldots,\ P_n(t) \qquad (1)$$

які називають ймовірностями станів системи.

Тут $P_i(t)$ i=1,2,3...n – ймовірність того, що системи S знаходиться в стані S_i в момент часу t тобто:

$$P_i(t) = P\{S(t) = S_i\}$$

Сума всіх ймовірностей станів системи для любого моменту часу дорівнює одиниці.

$$P_1(t)+P_2(t)+\ldots+P_i(t)+\ldots+P_j(t)+\ldots+P_n(t)=1 \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1$$

Сукупність ймовірностей станів (1) не є вичерпною характеристикою випадкового процесу. Повне уявлення про випадковий процес в системі дають <u>залежності від часу ймовірностей станів</u> системи, які можуть бути отримані із рішення системи лінійних диференціальних рівнянь.

2. Диференційні рівняння ймовірностей станів систем (рівняння Колмогорова). Правила складання рівнянь.

Диференційні рівняння ймовірностей станів системи (рівняння Колмогорова)в загальному вигляді мають вид:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji}(t) P_j(t) - P_i(t) \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}(t)$$

j=1,2,3,…
i=1,2,3,…

Інтенсивність $\lambda_{ij}(t)$ потоків можуть бути як залежними від часу, так і не залежними.

Диференційне рівняння зручно отримувати із розміченого графу станів системи виходячи з правила:

<u>Похідна ймовірності кожного стану дорівнює сумі всіх потоків ймовірностей, яки приходять з інших станів в дане, мінус сума всіх потоків ймовірностей, які їдуть із даного стану в інші.</u>

Потоком ймовірності переходу системи із стану S_i в стан S_j називають величину $\lambda_{ij}(t)\cdot P_i(t)$.

Диференційне рівняння ймовірності роботздатного К(t) і неработоздатного к(t) станів для розміченого графа (рис.) мають вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dP(t)}{dt} = \mu \cdot F(t) - \omega \cdot P(t) \\ \dfrac{dF(t)}{dt} = \omega \cdot P(t) - \mu \cdot F(t) \end{cases} \qquad (2)$$

Сума всіх ймовірностей станів для любого моменту часу дорівнює:

P(t)+F(t)=1 (нормувальна умова) (3)

Підставивши нормувальну умову в F(t)=1-P(t) в систему рівнянь (2) отримаємо:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \mu(1 - P(t)) - \omega P(t).$$

Звідкіля

$$\frac{dP(t)}{dt} = \mu - \mu P(t) - \omega P(t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = \mu - P(t)[\mu + \omega]$$

Розділимо все μ+ω:

$$\frac{1}{\mu+\omega} \cdot \frac{dP(t)}{dt} = \frac{\mu}{\mu+\omega} - P(t) \qquad \frac{dP(t)}{dt} + P(t)(\omega + \mu) = \mu$$

$$P' + aP = C$$

або

$$\frac{1}{\omega+\mu} \cdot \frac{dP(t)}{dt} + P(t) = \frac{\mu}{\omega+\mu}$$

по аналогії для другого рівняння системи (2) маємо

$$\frac{1}{\omega+\mu} \cdot \frac{dF(t)}{dt} + F(t) = \frac{\varpi}{\omega+\mu} \qquad (4)$$

Таким чином ймовірності станів системи описуються звичайними лінійними диференційними рівняннями першого порядку з постійними коефіцієнтами. Ймовірності станів F(t) і P(t) визначаються рішенням рівнянь (4).

Як відомо загальне рішення неоднорідного диференційного рівняння складається із загального рішення однорідного (при правій частині = 0); часного рішення неоднорідного диференційного рівняння при заданій правій частині.

3. Функції готовності і простою. Фінальні ймовірності.

Можливо розкласти рівняння:

Загальні рішення рівнянь будуть:

Функція готовності $P(t) = C\exp[-(\omega+\mu)t] + \frac{\mu}{\omega+\mu}$ ймовірність роботоздатного стану.

Функція простою $F(t) = C\exp[-(\omega+\mu)t] + \frac{\varpi}{\omega+\mu}$ ймовірність неработоздатног стану.

Фінальні ймовірності характеризують систему в граничному стаціонарному режимі.

В багатьох випадках коли процес в системі продовжується довго виникає питання про граничну поведінку ймовірностей $P_i(t)$ при $t\to\infty$. Якщо всі потоки, які переводять систему із стану в стан простіші (стаціонарні, пуассонівські з постійними λ_{ij}), то в деяких випадках існують фінальні (граничні) ймовірності станів.

$$P_i = \lim_{t\to\infty} P_i(t) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

не залежні від того в якому стані система S знаходилась в початковий момент часу. Це говорить про те, що в системі S установлюється стаціонарний режим при якому вона переходить із стана в стан, але ймовірності станів вже не міняються.

В цьому граничному режимі кожна фінальна ймовірність може бути представлена як середній відносний час знаходження системи в даному стані.

Представлені наукові підходи ефективно можуть використовуватись для аналізу машин та обладнання технічного сервісу та галузевому машинобудуванні:

- пункт технічного обслуговування;
- ремонтна майстерня;
- шино монтажна дільниця;
- мийна дільниця.

$$P_1(t),\ P_2(t),\ \ldots,\ P_i(t),\ \ldots,\ P_j(t),\ \ldots,\ P_n(t) \qquad (1)$$

Диференційні рівняння ймовірностей станів системи (рівняння Колмогорова)в загальному вигляді мають вид:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji}(t) P_j(t) - P_i(t) \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}(t) \qquad (2)$$

j=1,2,3,…

i=1,2,3,…

$$\begin{cases} \dfrac{dP(t)}{dt} = \mu \cdot F(t) - \omega \cdot P(t) \\ \dfrac{dF(t)}{dt} = \omega \cdot P(t) - \mu \cdot F(t) \end{cases} \tag{3}$$

F(t)=1-P(t)

$$\frac{dP(t)}{dt} = \mu(1 - P(t)) - \omega P(t).$$

Звідкіля

$$\frac{dP(t)}{dt} = \mu - \mu P(t) - \omega P(t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = \mu - P(t)[\mu + \omega]$$

Розділимо все μ+ω:

$$\frac{1}{\mu + \omega} \cdot \frac{dP(t)}{dt} = \frac{\mu}{\mu + \omega} - P(t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} + P(t)(\omega + \mu) = \mu$$

$$P' + aP = C$$

або

$$\frac{1}{\omega + \mu} \cdot \frac{dP(t)}{dt} + P(t) = \frac{\mu}{\omega + \mu}$$

по аналогії для другого рівняння системи (2) маємо

$$\frac{1}{\omega + \mu} \cdot \frac{dF(t)}{dt} + F(t) = \frac{\varpi}{\omega + \mu} \tag{4}$$

<u>Функція готовності</u> $P(t) = C\exp[-(\omega + \mu)t] + \dfrac{\mu}{\omega + \mu}$ ймовірність роботоздатного стану.

<u>Функція простою</u> $F(t) = C\exp[-(\omega + \mu)t] + \dfrac{\varpi}{\omega + \mu}$ ймовірність неработоздатног стану.