

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ
І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

Кафедра комп'ютерних наук

О.М. Нецадим

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

**Методичні вказівки для студентів денної форми навчання
ОС "Бакалавр" спеціальності 122 "Комп'ютерні науки"**

Київ 2017

Дискретна математика: Методичні вказівки для студентів денної форми навчання ОС "Бакалавр" спеціальності 122 "Комп'ютерні науки"/Уклад.: О.М. Нещадим – К.: ЦП "КОМПРИНТ", 2017. – 146 с.

*Рекомендовано Вченою радою факультету інформаційних технологій Національного університету біоресурсів і природокористування України
(Протокол № 4 від 16.11.2017 року)*

Рецензенти: Ю.Б. Гнучій, доктор фіз.-мат. наук, професор (НУБіП)
О.М. Ткаченко, кандидат техн. наук, доцент (НУБіП)

Методичні вказівки розроблено згідно з робочою програмою дисципліни "Дискретна математика" і призначені для якісної організації аудиторної та самостійної роботи студентів денної форми навчання ОС "Бакалавр" спеціальності 122 "Комп'ютерні науки". У навчально-методичному посібнику викладено теоретичні основи розділів дискретної математики, наведено детальні розв'язки типових прикладів і задач, подано достатню кількість завдань для проведення аудиторних занять та самостійної роботи.

Нещадим Олександр Михайлович

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки для студентів денної форми навчання
ОС "Бакалавр" спеціальності 122 "Комп'ютерні науки"

ВСТУП

Згідно з робочою програмою матеріал дисципліни “Дискретна математика” подається у вигляді трьох змістовних модулів:

Модуль №1 " Множини. Відношення. Комбінаторика ",

Модуль №2 „ Алгебраїчні системи, булеві алгебри”,

Модуль №3 „ Теорія графів”.

Мета пропонованих методичних вказівок – допомогти студентам спеціальності 122 “Комп’ютерні науки” денної та заочної форм навчання опанувати модулі дискретної математики.

Тут викладено теоретичні основи розділів, наведено розв’язання типових прикладів, список рекомендованої літератури, подано достатню кількість завдань для проведення аудиторних занять та індивідуальні завдання для самостійної роботи. Для кращого засвоєння змісту кожного із модулів студенти повинні опрацювати теоретичний матеріал, набути навичок розв’язування типових прикладів і задач, самостійно виконати індивідуальні завдання і написати модульну контрольну роботу.

Модуль №1 " Множини. Відношення. Комбінаторика "

Тема 1. Множини

Поняття "*множина*" належить до первинних не означуваних понять (як “число”, “нескінченність” в алгебрі, “точка”, “пряма” в геометрії тощо). Це поняття не може бути означено через інші простіші терміни або об’єкти, воно є настільки широким та загальним, що не входить як частина в жодне інше, ще загальніше поняття. Його пояснюють на прикладах, апелюючи до нашої уяви чи інтуїції.

За звичай приймається формулювання інтуїтивного поняття множини основоположника цієї теорії Г. Кантора: „Довільне зібрання певних предметів нашої інтуїції чи інтелекту, які можна відрізнити один від одного і які уявляються як єдине ціле, називається *множиною*. Предмети, які входять до складу множини, називають її *елементами*”. Істотним тут є те, що множини

розуміють як єдине ціле і елементи множини можна відрізнити один від одного; на природу об'єктів, що складають множини, ніяких обмежень не накладається.

Елементами множини можуть бути найрізноманітніші об'єкти: числа, літери, люди, автомобілі на стоянці, певні множини тощо.

Множини, як правило, позначають великими латинськими літерами: A , B , C , ..., а елементи множин – малими: a , b , c , Записують:

$A = \{a, b, c, \dots, x, y, \dots\}$ (перелічивши всі елементи у фігурних дужках, якщо множина складається з невеликої кількості елементів), або $A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots\}$ (використовуючи змінні з індексами).

При цьому слід розрізняти загальний елемент множини x , довільний – a_i чи конкретний – a , b , c ,

Для деяких найважливіших множин у математиці вживаються загальноприйняті позначення:

- \mathbb{N} – множина натуральних чисел;
- \mathbb{Z} – множина цілих чисел;
- \mathbb{Q} – множина раціональних чисел;
- \mathbb{R} – множина дійсних чисел;
- \mathbb{C} – множина комплексних чисел;
- $[a; b]$ – числовий проміжок (відрізок);
- $(a; b)$ – числовий інтервал тощо.

Якщо A – деяка числова множина, то через A_+ позначають множину її додатних елементів, а через A_- – від'ємних.

Те, що об'єкт a є елементом множини M записують так: $a \in M$ (читають: “ a належить множині M ”, “ a є елементом множини M ”, “множина M містить елемент a ”, “ a входить до множини M ”). Символ “ \in ” – знак належності елемента множині. Для того, щоб підкреслити, що деякий елемент a не належить множині M , вживають позначення $a \notin M$ або $a \bar{\in} M$.

Запис $a, b, c, \dots \in M$ використовують для скорочення запису $a \in M, b \in M, c \in M, \dots$

Множину вважають заданою, якщо про кожен її об'єкт можна сказати є він елементом даної множини чи ні. Це дає змогу сформулювати *інтуїтивний принцип абстракції (аксіома згортання)*: елементами множини A є лише ті і тільки ті об'єкти a , які мають певну характеристичну властивість P .

Іноді може не існувати об'єктів, які мають характеристичну властивість для складання множини. Тоді кажуть, що ця властивість визначає порожню множину; її позначають символом " \emptyset ".

Множину називають *скінченною*, якщо кількість її елементів скінчена, тобто існує натуральне число k , що є кількістю елементів цієї множини. У протилежному разі множина є *нескінченною*.

Для *задання множини*, утвореної з будь-яких елементів, будемо використовувати такі способи. В основі всіх способів лежить позначення множини за допомогою фігурних дужок.

1. (*Списком*). Якщо a_1, a_2, \dots, a_n – деякі об'єкти, то множину A цих об'єктів можна позначити через $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, де у фігурних дужках перелічують всі елементи відповідної множини. Таким способом переважно задають скінченні множини, які мають невелику кількість елементів. Порядок запису елементів множини при цьому позначенні є неістотним і однакові елементи у фігурних дужках не повторюються (записуються лише один раз).

Наприклад, множина десяткових цифр записують $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, множина основних арифметичних операцій – $B = \{+, -, *, /\}$, множина розв'язків нерівності $x^2 + 1 \leq 1 - \emptyset = \{0\}$.

2. (*Описом характеристичної властивості*). Цей спосіб задання множин ґрунтується на описі загальної характеристичної властивості (умови) $P(x)$ для всіх об'єктів, що утворюють множину; в цьому випадку задання множини M має вигляд:

$$M = \{a \mid P(a)\}.$$

Цей вираз читається так: "множина M – це множина всіх таких елементів a , для яких виконується властивість P ", де через $P(a)$ позначено властивість, яку мають елементи множини M і тільки вони. Іноді замість вертикальної риски

записують двокрапку.

Наприклад,

$$S = \{ n \mid n - \text{непарне}, n \in \mathbb{N} \}$$

$$X = \{ x \mid x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \},$$

$$A = \{ x \mid x^3 - 4x = 0 \}.$$

Порожню множину можна визначити за допомогою будь-якої суперечливої властивості, наприклад: $\emptyset = \{ x \mid x \neq x \}$ тощо. Твердження “множина M – не порожня” можна замінювати рівносильним йому твердженням “існують елементи, які належать множині M ”.

3. (*Породжуючою процедурою*). Елементи множини можна задати за допомогою елементів вже відомих множин із застосуванням для них деякого правила чи операцій над вже відомими множинами. При цьому задання множини повинно обов’язково містити опис допоміжних (вже відомих) множин.

Наприклад, множину всіх цілих чисел, які є степенем двійки

M_{2^n} , $n \in \mathbb{N}$ можна представити породжуючою процедурою, заданою двома правилами, які називають *рекурсивними* або *індуктивними*:

$$\text{а) } 1 \in M_{2^0}; \quad \text{б) якщо } t \in M_{2^n}, \text{ то } 2t \in M_{2^{n+1}}.$$

4. (*Графічно*). Множини, як скінченні, так і нескінченні, можна задати геометрично за допомогою кругів Ейлера (діаграм Венна).

Елементами множини можуть бути ще й інші множини. Наприклад, нехай множина $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ – множина студентів деякої групи, які склали іспит. Цю множину можна означити й по-іншому: $S = \{S_2, S_3, S_4, S_5\}$, де S_2 – множина студентів, які склали іспит на оцінку “2”, відповідно S_3, S_4, S_5 – на “3”, “4” і “5”. У цьому випадку множини S_2, S_3, S_4, S_5 називають *підмножинами* множини S .

Необхідно розрізняти такі два різні об’єкти, як елемент a і множина $\{a\}$, яка складається з єдиного елемента a .

Приклад 1. Записати множину $A = \{x \mid (x^2 - 4)(x^2 + 3x - 10) = 0\}$ списком її

елементів.

Розв'язання. Елементами даної множини є лише ті значення x , які задовольняють рівняння $(x^2 - 4)(x^2 + 3x - 10) = 0$. Знаходимо його корені:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x^2 + 3x - 10 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2, x_2 = 2, \\ x_3 = -5, x_4 = 2. \end{cases}$$

Отже, маємо множину $A = \{-5, -2, 2\}$.

Означення 1. Множини A і B називають *рівними*, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A є елементом множини B і навпаки; записують: $A = B$.

$$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B \text{ і } x \in B \Rightarrow x \in A) \text{ або } A = B \Leftrightarrow (x \notin A \Rightarrow x \notin B \text{ і } x \notin B \Rightarrow x \notin A)$$

Означення. Множину A називають *підмножиною* множини B тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини A належить і множині B .

Позначають $A \subseteq B$ або $B \supseteq A$. Читають: “множина A міститься у множині B ”, “множина B містить множину A ”. Знаки \subseteq і \supseteq називаються *знаками включення* або *нестрогого включення*.

Якщо $A \subseteq B$, однак $A \neq B$, то пишуть $A \subset B$ і називають множину A *власною* (або *строгою*) *підмножиною* множини B . Символ \subset (або \supset), на відміну від знака \subseteq (або \supseteq), називається знаком *строгого включення*.

Очевидно, що для будь-якої множини A виконується $A \subseteq A$. Крім того, прийнято вважати, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини A , тобто $\emptyset \subseteq A$ (зокрема, $\emptyset \subseteq \emptyset$). Множини A і \emptyset називають *невласними підмножинами* множини A , всі інші – *власні*.

Слід чітко розуміти різницю між знаками \in і \subseteq та не плутати ситуації їхнього вживання. Для будь-якого об'єкта x виконується $x \notin \emptyset$.

Наприклад,

$$\{a, b\} \subseteq \{\{a, b\}, \{b, c\}\}, a \in \{a, b\}, \{c\} \notin \{a, c\}, \{a\} \subseteq \{a, b\}.$$

Означення 2. Множини A і B називають *рівними*, якщо виконуються включення $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, тобто

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ і } B \subseteq A).$$

Разом з множиною A іноді доводиться мати справу з множиною всіх її підмножин, яку називають *булеаном* множини A і позначають $\beta(A)$. Отже, за означенням:

$$\beta(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$

Наприклад, якщо $A = \{a, b, c\}$, то $\beta(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Зауважимо, що якщо множина A має n елементів, то булеан $\beta(A)$ міститиме 2^n елементів, через що його називають *множиною-степенем* множини A .

У конкретній математичній теорії буває зручно вважати, що всі розглядувані множини є підмножинами деякої фіксованої множини, яку називають *універсальною множиною* або *універсумом* і позначають через U (або E). Наприклад, в елементарній алгебрі такою універсальною множиною можна вважати множину дійсних чисел R , у вищій алгебрі – множину комплексних чисел C .

У процесі вивчення множин зручно застосовувати так звані діаграми Ейлера-Венна. На них універсальну множину схематично зображують у вигляді прямокутника, а різні її підмножини – у вигляді кругів чи інших фігур всередині цього прямокутника. Наприклад, на даному рисунку (рис.1) зображено універсальну множину U та її підмножини A , B і C , причому $C \subset B$.

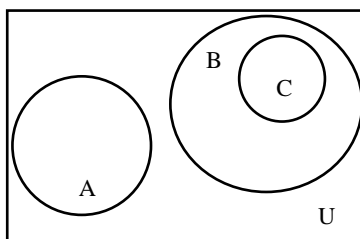


Рис. 1

Для множин можна ввести ряд операцій (теоретико-множинних операцій), результатом виконання яких будуть також множини. За допомогою цих операцій можна конструювати із заданих множин нові множини.

Нехай A і B – деякі множини.

Означення. Об'єднанням множин A і B (позначають $A \cup B$) називають

множину тих елементів, які належать хоча б одній з множин A чи B . Символічно операція об'єднання множин записується так

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\} \text{ або } x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \in B \end{cases}.$$

Наприклад, $\{a,b,c\} \cup \{a,c,d,e\} = \{a,b,c,d,e\}$.

Властивості об'єднання множин:

- 1) комутативність: $A \cup B = B \cup A$;
- 2) асоціативність: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
- 3) ідемпотентність $A \cup A = A$;
- 4) $A \cup \emptyset = A$;
- 5) $A \cup E = E$.

Означення. Перетином (перерізом) множин A і B (позначають $A \cap B$) називають множину, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать множинам A і B одночасно. Тобто

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\} \text{ або } x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \in B \end{cases}.$$

Наприклад, $\{a,b,c\} \cap \{a,c,d,e\} = \{a,c\}$,

$$\{a,b,c\} \cap \{d,e\} = \emptyset.$$

Кажуть, що множини A і B не перетинаються, якщо $A \cap B = \emptyset$.

Операції об'єднання та перетину множин можуть бути поширені на випадок довільної сукупності множин $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Так об'єднання множин A_i (записується $\bigcup_{i \in I} A_i$) складається з тих елементів, які належать хоча б одній з множин A_i даної сукупності. А перетин множин A (записується $\bigcap_{i \in I} A_i$) містить тільки ті елементи, які одночасно належать кожній з множин A_i .

Властивості перерізу множин:

- 1) комутативність: $A \cap B = B \cap A$;
- 2) асоціативність: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- 3) дистрибутивність операції \cap відносно операції \cup :
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- 4) дистрибутивність операції \cup відносно операції \cap :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

5) ідемпотентність: $A \cap A = A$;

6) $A \cap \emptyset = \emptyset$;

7) $A \cap E = A$;

8) закони поглинання

a) $A \cap (A \cup B) = A$,

б) $A \cup (A \cap B) = A$.

Означення. Різницею множин A і B (записується $A \setminus B$) називають множину тих елементів, які належать множині A і не належать множині B .
Отже,

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ і } x \notin B \} \text{ або } x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \notin B. \end{cases}$$

Наприклад, $\{a, b, c\} \setminus \{a, d, c\} = \{b\}$,

$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_-$,

$\{a, b\} \setminus \{a, b, c, d\} = \emptyset$.

Властивості різниці множин:

1) $A \setminus A = \emptyset$;

2) $A \setminus \emptyset = A$;

3) $A \setminus E = \emptyset$;

4) $A \setminus B \neq B \setminus A$ – різниця не комутативна;

5) $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$ – різниця не асоціативна;

6) $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$ – правий закон дистрибутивності

операції \setminus відносно операції \cup ;

7) $(B \cap C) \setminus A = (B \setminus A) \cap (C \setminus A)$ – правий закон дистрибутивності

операції \setminus відносно операції \cap .

Означення. Симетричною різницею множин A і B (записують $A \Delta B$, $A \oplus B$ або $A \div B$) називають множину, що складається з усіх елементів множини A , які не містяться в B , а також усіх елементів множини B , які не містяться в A . Тобто

$$A \oplus B = \{ x \mid (x \in A \text{ і } x \notin B) \text{ або } (x \in B \text{ і } x \notin A) \} \text{ або } x \in A \oplus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \notin B \\ x \notin A, \\ x \in B \end{cases}.$$

Наприклад, $\{a,b,c\} \oplus \{a,c,d,e\} = \{b,d,e\}$,

$$\{a,b\} \oplus \{a,b\} = \emptyset.$$

Властивості симетричної різниці:

- 1) комутативність: $A \oplus B = B \oplus A$;
- 2) асоціативність: $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$;
- 3) дистрибутивність операції \cap відносно операції \oplus :

$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C);$$

- 4) $A \oplus A = \emptyset$;
- 5) $A \oplus \emptyset = A$;
- 6) $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Введені теоретико-множинні операції можна проілюструвати діаграмою (рис.2).

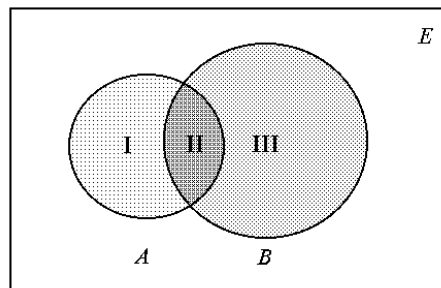


Рис. 2

Тут множини A і B – це множини точок двох кругів.

Тоді $A \cup B$ – складається з точок областей I, II, III,

$A \cap B$ – це область II,

$A \setminus B$ – область I,

$B \setminus A$ – область III,

$A \oplus B$ – області I і III.

Означення. Якщо зафіксована універсальна множина E , то доповненням множини A (яке є підмножиною універсальної множини E) називають множину

всіх елементів універсальної множини, які не належать множині A ; позначають \bar{A} .

Тобто

$$\bar{A} = \{ x \mid x \in E \text{ і } x \notin A \} \text{ або } x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A.$$

Неважко помітити, що $\bar{\bar{A}} = A$.

Наприклад, якщо за універсальну множину прийняти множину N всіх натуральних чисел, то доповненням \bar{N}_2 множини N_2 всіх парних натуральних чисел буде множина всіх непарних натуральних чисел.

Властивості доповнення:

- 1) $A \cup \bar{A} = E$;
- 2)
- 3) $A \cap \bar{A} = \emptyset$;
- 4) $\bar{E} = \emptyset$;
- 5) $\bar{\emptyset} = E$;
- 6) *інволютивність*: $\bar{\bar{A}} = A$;
- 7) $\bar{A} \setminus B = A \cap B$;
- 8) якщо $A = B$, то $\bar{A} = \bar{B}$;
- 9) якщо $A \subset B$, то $\bar{B} \subset \bar{A}$;
- 10) *правила (закони) де Моргана*
 - а) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;
 - б) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Зазначимо, що правила де Моргана припускають узагальнення для сукупності множин:

$$\overline{\bigcup_{i \in \mathbf{N}} A_i} = \bigcap_{i \in \mathbf{N}} \bar{A}_i; \quad \overline{\bigcap_{i \in \mathbf{N}} A_i} = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \bar{A}_i.$$

Приклад 2. Покажемо істинність однієї з наведених тотожностей – правила де Моргана.

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Доведемо спочатку, що $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$.

Нехай елемент $x \in \overline{A \cup B}$, тоді $x \in E \setminus (A \cup B)$, тобто $x \notin A$ і $x \notin B$, звідси $x \in \bar{A}$ і

$x \in \bar{B}$, отже, $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. Отже, за означенням підмножин: $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$.

Доведемо обернене включення: $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Припустимо $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$, це означає, що $x \in \bar{A}$ і $x \in \bar{B}$, тобто $x \notin A$ і $x \notin B$, тому $x \notin A \cup B$, отже $x \in \overline{A \cup B}$. Зі справедливості обох включень $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ і $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ за законом антисиметричності для підмножин випливає істинність рівності $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. Твердження доведено.

Аналогічно можуть бути доведені всі інші наведені теоретико-множинні тотожності. Ці тотожності дають змогу спрощувати різні складні вирази над множинами.

Приклад 3. $(A \cap B \cap C \cap \bar{D}) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) \cup (C \cap D) = (A \cap B \cap C \cap \bar{D}) \cup ((\bar{A} \cup \bar{B} \cup D) \cap C) = ((A \cap B \cap \bar{D}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{D})) \cap C = E \cap C = C$.

Приклад 4. Дано множини $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 8, 9\}$, $C = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, $D = \{5, 6, 7, 8, 10\}$. Записати універсальну множину і знайти елементи множини $(A \cap B) \cup (\bar{C} \div D)$.

Розв'язання. Універсальною буде множина, яка містить всі елементи заданих множин: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Виконуємо операції над даними числовими множинами:

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6, 8, 9\} = \{3, 4\}, \quad \bar{C} = \{1, 5, 9, 10\},$$

$$\bar{C} \div D = \{1, 5, 9, 10\} \div \{5, 6, 7, 8, 10\} = \{1, 9\} \cup \{6, 7, 8\} = \{1, 6, 7, 8, 9\}.$$

$$\text{Отже, маємо } (A \cap B) \cup (\bar{C} \div D) = \{3, 4\} \cup \{1, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}.$$

Приклад 5. Довести тотожність $\overline{A \cap B} \cup B = \bar{A} \cup B$: а) використовуючи відношення належності елемента множині; б) за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

Розв'язання. а) Введемо позначення $S = \overline{A \cap B} \cup B$ і $T = \bar{A} \cup B$.

Рівність $S = T$ еквівалентна двом співвідношенням $S \subset T$ і $S \supset T$.

1. Покажемо, що $S \subset T$. Нехай $x \in S$, тоді $x \in \overline{A \cap B}$ або $x \in B$.

(а) Якщо $x \in B$, тоді $x \in \bar{A} \cup B$.

(б) Якщо $x \notin B$, тоді $x \in \overline{A \cap \bar{B}}$.

З цих співвідношень випливає, що $x \in \bar{B}$ і $x \notin A \cap \bar{B}$ і тому $x \notin A$, отже $x \in \bar{A}$. Звідси отримуємо, що $x \in \bar{A} \cup B$. Ми показали, що $S \subset T$.

2. Тепер показуємо, що $S \supset T$. Нехай $x \in T$, тоді $x \in \bar{A}$ або $x \in B$. Якщо $x \in B$, то очевидно, що $x \in S$, якщо $x \notin B$ і $x \in \bar{A}$, тоді $x \notin \bar{B}$ і $x \notin A$ і тому $x \notin A \cap \bar{B}$. Звідси отримуємо, що $x \in \overline{A \cap \bar{B}} = S$. Таким чином показано, що $S \supset T$.

Отже, рівність доведена.

б) Проілюструємо на діаграмі Ейлера-Венна ліву частину $\overline{A \cap \bar{B}} \cup B$ тотожності, виконавши спочатку перетин множини A з \bar{B} , а потім об'єднання множин $\overline{A \cap \bar{B}}$ та B (рис.3, а-б).

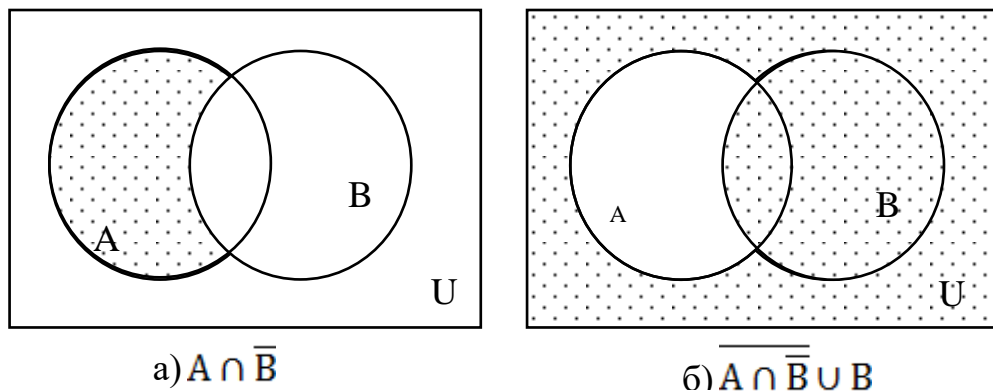
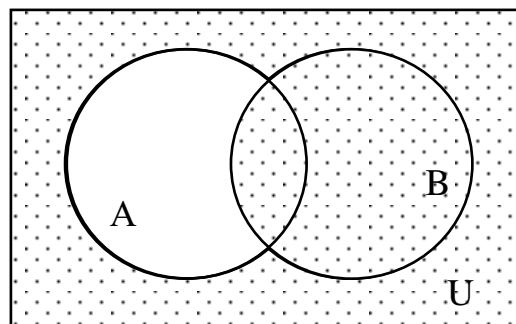


Рис. 3

Тепер побудуємо діаграму (рис. 3) для правої частини $\bar{A} \cup B$ тотожності.



Видно, що діаграми співпадають, тобто тотожність справедлива.

Усі введені вище теоретико-множинні операції та їхні властивості мають місце як для скінченних, так і для нескінченних множин. Суттєва різниця між скінченними та нескінченними множинами виявляється, коли мова заходить про “кількість елементів” та при спробі порівняти такі множини за “кількістю елементів”. Тут слова “кількість елементів” беруться в лапки тому, що зрозуміла умовність та невизначеність цього поняття для нескінченних множин.

Одними з основних досягнень канторівської теорії множин є поширення поняття “кількість елементів” зі скінченних множин на нескінченні та формулювання принципу, за яким можна порівнювати за “кількістю елементів” нескінченні множини. Зокрема, несподіваним та незвичайним виявився той факт, що різні нескінченні множини можуть мати різну “кількість елементів”, тобто для нескінченностей також існує своя ієрархія.

Канторівська ідея ґрунтується на такому спостереженні: для того щоб порівняти за кількістю елементів дві скінченні множини, зовсім необов’язково перелічувати елементи кожної з них. Можна діяти таким чином. Наприклад, необхідно порівняти за кількістю дві множини – множину S студентів та множину M всіх місць в аудиторіях. Запропонуємо кожному студенту зайняти одне місце. Якщо кожен студент отримає місце і при цьому в аудиторіях не залишиться жодного вільного місця, то очевидно, що кількість елементів в обох множинах S і M однакова. У протилежному випадку, множина S містить більше елементів ніж множина M , або навпаки. Очевидно, що запропонована процедура встановлює деяку функціональну відповідність між множинами S і M . У першому випадку ця відповідність виявляється взаємно однозначною, тоді коли у другому і третьому випадках умови взаємної однозначності не виконуються: або порушується умова *повної визначеності* (принаймні один студент не дістав місця), або порушується умова *сюр’єктивності* (хоча б одне місце залишилося вільним).

Кількість елементів множини A прийнято позначати через $|A|$.

Отже, неважко переконатися, що між двома скінченними множинами A і B існує взаємно однозначна відповідність тоді і тільки тоді, коли $|A|=|B|$.

Сформульоване твердження дозволяє розв'язувати задачу обчислення кількості елементів множини A шляхом встановлення взаємно однозначної відповідності між множиною A і деякою множиною B , кількість елементів якої відома або легко може бути визначена.

Означення. Елементи двох множин A і B перебувають у *взаємно однозначній* відповідності, якщо кожному елементу $a \in A$ відповідає єдиний елемент $b \in B$ і, навпаки, кожен елемент $b \in B$ є зіставленим єдиному елементу $a \in A$.

Множини A і B назвемо *еквівалентними* або *рівнопотужними*, якщо існує взаємно однозначна відповідність між множинами A і B .

Якщо еквівалентність множин A і B позначити через $A \sim B$, то безпосередньо з означення випливають такі властивості еквівалентності:

- $A \sim A$ (рефлексивність);
- Якщо $A \sim B$, то $B \sim A$ (симетричність);
- Якщо $A \sim B$ і $B \sim C$, то $A \sim C$ (транзитивність).

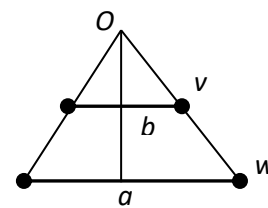
Наведемо декілька *прикладів* еквівалентних нескінченних множин.

1. Множина натуральних чисел \mathbb{N} еквівалентна множині квадратів натуральних чисел $\mathbb{N}^2 = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$. Взаємно однозначна відповідність встановлюється за законом: кожне натуральне число має єдиний квадрат, і навпаки, кожен елемент множини \mathbb{N}^2 має єдиний корінь у множині \mathbb{N} , тобто (n, n^2) , $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \in \mathbb{N}^2$.

2. Множина \mathbb{Z} всіх цілих чисел еквівалентна множині \mathbb{P} всіх парних чисел. Тут взаємно однозначна відповідність встановлюється так: $(n, 2n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $2n \in \mathbb{P}$.

3. Множина точок інтервалу $(-\pi/2, \pi/2)$ еквівалентна множині точок дійсної прямої. Шукана взаємно однозначна відповідність встановлюється за допомогою тригонометричної функції tg : $(x, \text{tg } x)$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\text{tg } x \in (-\infty, \infty)$.

4. Множини точок двох довільних відрізків a і b еквівалентні. Правило, за яким встановлюється взаємно однозначна відповідність між точками відрізків a і b різної довжини, зображено на рисунку. Кожний промінь з точки O , який перетинає відрізки a і b в точках v і w , утворює одну пару (v,w) необхідної взаємно однозначної відповідності.



Множина A еквівалентна множині \mathbb{N} натуральних чисел називається *зліченною* множиною.

Іншими словами, зліченна множина A – це така множина, всі елементи якої можна занумерувати числами $1,2,3,\dots$, тобто можна вказати спосіб, за яким першому елементу множини A ставиться у відповідність число 1, другому – число 2, третьому – число 3 і т.д. Отже, будь-яку зліченну множину A можна подати у вигляді

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}.$$

Неважно переконатись, що множини квадратів натуральних чисел, усіх парних чисел, усіх непарних чисел, чисел кратних деякому числу k , чисел, які закінчуються парою цифр 00 тощо є зліченими множинами.

Теорема (Кантора). Множина всіх дійсних чисел з інтервалу $(0,1)$ незліченна.

Будь-яка множину, еквівалентну множині всіх дійсних чисел з інтервалу $(0,1)$, називають *континуальною*, або множиною *потужності континууму*.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

1.1. Нехай $A=\{1,3,5,6\}$, $B=\{1,2,3,5,7\}$ і $C=\{2,4,7\}$. Обчислити:

- | | |
|--------------------------|---|
| а) $A \cup B$; | д) $A \setminus B$; |
| б) $A \cap B$; | е) $A \Delta B$; |
| в) $(A \cup C) \cap B$; | є) $(A \setminus C) \cup (B \setminus A)$; |
| г) $A \cap B \cap C$; | ж) $(B \setminus C) \cap (A \setminus B)$. |

1.2. Нехай $A=\{2,4,5,7\}$, $B=\{1,2,4,7\}$ і $C=\{2,4,6,7\}$. Перевірити, що

- а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
 б) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
 в) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
 г) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
 д) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

1.3. Зобразити у вигляді діаграм Венна такі множини:

- а) $(A \cup B) \cap C$; г) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$;
 б) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$; д) $(A \Delta B) \cap C$;
 в) $(A \cup B) \setminus (B \cap C)$; е) $A \setminus (B \Delta C)$.

1.4. За допомогою діаграм Венна перевірити такі теоретико-множинні рівності:

- а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
 б) $(A \cap B) \cup A = (A \cup B) \cap A = A$;
 в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
 г) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
 д) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
 е) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;
 є) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1.5. Навести приклад множин A і B , які спростовують рівності

- а) $(A \setminus B) \cup B = A$; б) $(A \cup B) \setminus A = B$.

1.6. Нехай $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 3, 6\}$, $B = \{1, 4, 6, 7\}$ і $C = \{1, 2, 3, 6\}$.

Обчислити

- а) \bar{A} ; г) $\overline{(A \cup C) \cup (A \cup B)}$;
 б) $\overline{B \cup C}$; д) $\overline{(A \cap \bar{B}) \cup B}$;
 в) $A \cap \bar{C}$; е) $(C \setminus B) \cap (A \setminus \bar{c})$.

1.7. За допомогою діаграм Венна перевірити такі теоретико-множинні рівності:

- а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
 б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
 в) $(\overline{A} \cup B) \cap A = A \cap B$;
 г) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$;
 д) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$;
 е) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
 є) $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

1.8. Що можна сказати про множини A і B , якщо

- а) $A \cup B = A \cap B$; д) $A \setminus B = A$;
 б) $A \setminus B = B \setminus A$; е) $A \setminus B = \emptyset$;
 в) $A \subseteq \overline{B}$ і $\overline{A} \subseteq B$; є) $A \setminus B = B$;
 г) $A \cup B = \emptyset$; ж) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

1.9. Довести тотожності:

- а) $(A \cap B) \cup A = (A \cup B) \cap A = A$;
 б) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$;
 в) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$;
 г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
 д) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
 е) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
 є) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$;
 ж) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
 з) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;
 и) $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
 і) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
 ї) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
 й) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
 к) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$;

$$\text{л) } (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A;$$

$$\text{м) } A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B;$$

$$\text{н) } \overline{A \cap B} = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B});$$

$$\text{о) } A \setminus B = (A \cup B) \setminus B;$$

$$\text{п) } (A \cup B) \setminus (B \setminus A) = A;$$

$$\text{р) } A \setminus (B \setminus C) = A \setminus ((A \cap B) \setminus C);$$

$$\text{с) } (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C;$$

$$\text{т) } A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C);$$

$$\text{у) } A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

1.10. Використовуючи основні теоретико-множинні тотожності, довести наведені рівності шляхом рівносильних перетворень

$$\text{а) } (A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C} = E;$$

$$\text{б) } (A \cap B \cap C \cap \bar{D}) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) \cup (C \cap D) = C;$$

$$\text{в) } (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup D) \cap (C \cup D) = (A \cap D) \cup (B \cap C);$$

$$\text{г) } A \cap ((\overline{A \cup \bar{B}}) \cup (\overline{\bar{A} \cup B})) \cup (\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}) = A;$$

$$\text{д) } (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C \cap D) = A \cap B;$$

$$\text{е) } (A \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap \bar{C}) = E;$$

$$\text{є) } (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B.$$

1.11. Довести тотожності:

$$\text{а) } (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C);$$

$$\text{б) } A \Delta B = B \Delta A;$$

$$\text{в) } A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A);$$

$$\text{г) } A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A);$$

$$\text{д) } A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B);$$

$$\text{е) } A \Delta B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)};$$

$$\text{є) } A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B);$$

- ж) $(A \cup B) \Delta B = A \setminus B$;
 з) $(A \Delta B) \Delta (A \cup B) = A \cap B$;
 и) $A \Delta (A \Delta B) = B$;
 і) $A \Delta (A \cap B) = A \setminus B$;
 ї) $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$;
 й) $A \Delta B \Delta (A \cap B) = A \cup B$;
 к) $A \Delta \emptyset = A$, $A \Delta E = \bar{A}$;
 л) $A \Delta A = \emptyset$, $A \Delta \bar{A} = E$;
 м) $A \Delta B = \bar{A} \Delta \bar{B}$.

1.12. Перевірити (довести або спростувати) справедливість таких рівностей, що описують дистрибутивні закони за участю операції симетричної різниці

- а) $A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$; г) $A \Delta (B \cup C) = (A \Delta B) \cup (A \Delta C)$;
 б) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$; д) $A \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$;
 в) $A \setminus (B \Delta C) = (A \setminus B) \Delta (A \setminus C)$; е) $A \Delta (B \setminus C) = (A \Delta B) \setminus (A \Delta C)$.

1.13. Довести тотожності

- а) $A \cup (B \Delta C) = ((A \cup B) \Delta (A \cup C)) \cup A$;
 б) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;
 в) $A \setminus (B \Delta C) = (A \setminus \bar{B}) \Delta (A \setminus C)$;
 г) $A \setminus (B \Delta C) = (A \Delta (B \setminus C)) \setminus ((A \Delta B) \setminus (A \Delta C))$;
 д) $A \Delta (B \cup C) = ((A \Delta B) \cup (A \Delta C)) \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C))$;
 е) $A \Delta (B \cap C) = ((A \Delta B) \cap (A \Delta C)) \cup ((A \cap B) \Delta (A \cap C))$;
 є) $A \Delta (B \setminus C) = ((A \Delta B) \setminus (A \Delta C)) \cup (A \setminus (B \Delta C))$.

1.14. Для яких множин A і B виконується рівність $A \Delta B = A \cap B$?

1.15. Виразити операції \cup , \cap і \setminus через операції

- а) Δ і \cap ; б) Δ і \cup ; в) Δ і \setminus .

1.16. Для заданих множин $A = \{1,2\}$ і $B = \{2,3,4\}$ визначити

- а) $B \times A$; в) $A \times B \times A$;
 б) B^2 ; г) $A \times (A \cup B)$.

1.17. Чи існують скінченні множини A і B , для яких виконується

- а) $|A \cup B| > |A| + |B|$; в) $|A| \geq |A \cup B|$ і $|B| \geq |A \cup B|$;
 б) $|A| > |A \cup B|$ або $|B| > |A \cup B|$; г) $|A \cup B| \leq |A \cap B|$.

1.18. Встановити взаємно однозначну відповідність між:

- а) множиною непарних натуральних чисел і множиною всіх натуральних чисел N ;
 б) множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел Z ;
 в) множиною натуральних чисел N і множиною цілих чисел, кратних числу k , $k \in N$.

1.19. Довести, що

- а) множина Z цілих чисел є зліченною;
 б) множина Q раціональних чисел є зліченною;
 в) множина раціональних чисел сегмента $[a, b]$, $a < b$ є зліченною;
 г) множина пар (x, y) , де x і y - раціональні числа, є зліченною.

1.20. Довести, що множина точок інтервалу $(0; 1)$ є незліченною.

1.21. Довести, що

- а) $[a; b] \sim [c; d]$, де $a < b$, $c < d$; б) $(a; b) \sim R$.

1.22. Встановити взаємно однозначну відповідність між множинами $[0; 1)$ та $[0; 1]$.

Тема 2. Відношення.

Коли порядок розміщення елементів у множині відіграє важливу роль, то говорять про впорядковану сукупність елементів.

Впорядкована n -ка – це сукупність n не обов'язково різних об'єктів із заданим порядком їх розташування. Якщо $n = 2$, то говорять про впорядковану пару, при $n = 3$ – впорядковану трійку. Впорядковану пару елементів позначають $\langle a, b \rangle$ або (a, b) .

Впорядковані n -ки, зокрема пари, трійки, називають ще n -вимірними (відповідно, двовимірними, тривимірними) *векторами* або *кортежами*.

Окремо розглянемо ще одну дуже важливу операцію над множинами.

Означення. *Декартовим (прямим) добутком* множин A і B (записується $A \times B$) називають множину всіх пар $\langle a, b \rangle$, в яких перша компонента належить множині A ($a \in A$), а друга – множині B ($b \in B$):

$$A \times B = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A \text{ і } b \in B \} \text{ або } \langle a, b \rangle \in A \times B \Leftrightarrow \begin{cases} a \in A, \\ b \in B. \end{cases}$$

Декартовий добуток природно узагальнюється на випадок довільної сукупності множин. Якщо A_1, A_2, \dots, A_n – множини, то їхнім декартовим добутком називають множину

$$D = \{ \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n \},$$

яка складається з усіх наборів $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$, в кожному з яких i -й член, що називається i -ю *координатою* або i -ю *компонентою* набору, належить множині A_i , $i=1, 2, \dots, n$. Декартовий добуток позначається через $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Як зазначалося, набір $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$, щоб відрізнити його від множини, яка складається з елементів a_1, a_2, \dots, a_n , записують не у фігурних, а в круглих дужках і називають *кортежем*, *вектором* або *впорядкованим набором*.

Довжиною кортежу називають кількість його координат. Два кортежі $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ і $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ однакової довжини вважаються *рівними* тоді і тільки тоді, коли рівні їхні відповідні координати, тобто $a_i = b_i$, $i=1, 2, \dots, n$.

Декартовий добуток множини A на себе n разів, тобто множину $A \times A \times \dots \times A$ називають n -м *декартовим* (або *прямим*) *степенем* множини A і позначають A^n .

Прийнято вважати, що $A^0 = \emptyset$ ($n=0$) і $A^1 = A$ ($n=1$).

Наприклад, якщо $A = \{a, b\}$ і $B = \{b, c, d\}$, то

$$A \times B = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d)\}, \quad A^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}.$$

Якщо A_1, A_2, \dots, A_n – скінченні множини, то потужність

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

Наслідок. $|A^n| = |A|^n$

Нехай A – алфавіт, тобто скінченна множина, елементами якої є символи (літери, цифри, знаки операцій, розділові знаки тощо). Словом довжиною n в алфавіті A назвемо послідовність n символів із цього алфавіту, записаних один за одним без дужок і ком. За таким означенням слово розуміємо як кортеж із множини A^n . Тоді множина всіх слів у алфавіті A – це множина

$$A^* = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots.$$

Приклад 6. Нехай алфавіт складається із трьох символів: $A = \{a, b, c\}$.

Визначити множину всіх слів довжиною 1, 2, 3, 4 в алфавіті A .

Розв'язання. Множина всіх слів довжини 1 в алфавіті $A = \{a, b, c\}$ - це всі слова із однієї літери цього алфавіту: $A^1 = \{a, b, c\}$, $|A^1| = 3$.

Множина всіх слів довжиною 2 в алфавіті A :

$$A^2 = A \times A = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}, |A^2| = 9 = 3^2.$$

Множина всіх слів довжиною 3 в даному алфавіті:

$$A^3 = A \times A \times A = \{aaa, aab, aac, aba, \dots, ccc\}, |A^3| = 3^3 = 27.$$

Аналогічно, маємо множину всіх слів довжиною 4 в алфавіті A :

$$A^4 = \{aaaa, aaab, aaac, aaba, \dots, cccc\}, |A^4| = 3^4 = 81.$$

Якщо R – множина дійсних чисел або множина точок координатної прямої, то R^2 – це множина пар (a,b) , де $a,b \in R$, або множина точок координатної площини.

Координатне зображення точок площини вперше було запропоновано французьким математиком і філософом Рене Декартом, тому введена теоретико-множинна операція і називається декартовим добутком.

Операція декартового добутку неасоціативна і не комутативна, тобто

множини $(A \times B) \times C$ і $A \times (B \times C)$, а також множини $A \times B$ і $B \times A$, у загальному випадку, не рівні між собою.

Зв'язок декартового добутку з іншими теоретико-множинними операціями встановлюється такими тотожностями:

1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
2. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Означення. Підмножина R декартового степеня M^n деякої множини M називається n -місним або n -арним відношенням на множині M . Кажуть, що елементи $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$ знаходяться у відношенні R , якщо $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \in R$.

При $n=1$ відношення $R \subseteq M$ називають *одномісним* або *унарним*. Таке відношення часто називають також *ознакою* або *характеристичною властивістю* елементів множини M . Кажуть, що елемент $a \in M$ має ознаку R , якщо $a \in R$ і $R \subseteq M$. Наприклад, ознаки “парність” і “кратність 3” виділяють із множини N натуральних чисел унарні відношення $R' = \{2k \mid k \in N\}$ і $R'' = \{3k \mid k \in N\}$, відповідно.

Найбільш популярними в математиці є *двомісні* або *бінарні* відношення ($n=2$), на вивченні властивостей яких ми зупинимось детальніше. Далі скрізь під словом “відношення” розумітимемо бінарне відношення. Якщо елементи $a, b \in M$ знаходяться у відношенні R (тобто $\langle a, b \rangle \in R$), то це часто записують у вигляді aRb . Зауважимо, що бінарні відношення іноді розглядають, як окремий випадок відповідностей, а саме – відповідності між однаковими множинами.

Наприклад, на різних множинах можна задати такі бінарні відношення.

1. Відношення на множині N натуральних чисел:

R_1 - відношення “менше або дорівнює”, тоді $7R_1 9$, $2R_1 2$, $1R_1 m$ для будь-якого $m \in N$;

R_2 - відношення “ділиться на”, тоді $12R_2 3$, $49R_2 7$, $mR_2 1$ для будь-якого

$m \in N$;

R_3 - відношення “складаються з однакових цифр”, тоді $107R_3701$, $123R_33213311$.

2. Відношення на множині точок координатної площини R^2 :

R_4 - відношення "знаходяться на однаковій відстані від початку координат", тоді $(3,2)R_4(\sqrt{5}, -\sqrt{8})$, $(0,0)R_4(0,0)$;

R_5 - відношення “симетричні відносно осі ординат”, тоді $(1,7)R_5(-1,7)$, а в загальному випадку $(a,b)R_5(-a,b)$ для будь-яких $a,b \in R$;

R_6 - відношення “менше або дорівнює”. Вважаємо, що $(a,b)R_6(c,d)$, якщо $a \leq c$ і $b \leq d$. Зокрема, $(1,7)R_6(20,14)$, $(-12,4)R_6(0,17)$.

3. Відношення на множині людей:

R_7 - відношення “є другом”,

R_8 - відношення “є молодшим за віком від”.

Слід звернути увагу на такі основні моменти:

– відношення, яке розглядається, має місце не для всіх пар елементів заданих множин, а лише для деяких з них;

– не завжди якщо елемент x перебуває у відношенні з елементом y , то елемент y перебуває у тому самому відношенні з елементом x ;

– кожне відношення між елементами даної множини можна розглядати як сукупність деяких впорядкованих пар декартового добутку двох однакових або різних множин.

Позначимо символом R_- сукупність лівих координат впорядкованих пар бінарного відношення R , тобто:

$$R_- = \{a \mid \text{існує такий елемент } b, \text{ що } \langle a, b \rangle \in R\}.$$

Множину R_- називають *лівою областю* або *областю визначення* відношення R .

Аналогічно, множину $R_+ = \{b \mid \text{існує такий елемент } a, \text{ що } \langle a, b \rangle \in R\}$

називають *правою областю* або *множиною значень* відношення R .

Наприклад, для відношення $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle c, a \rangle\}$ маємо $R_- = \{a, b, c\}$, а $R_+ = \{a, b, c, d\}$.

Множину $F(R) = R_- \cup R_+$ називають *полем відношення* R . Для розглянутого прикладу $F(R) = \{a, b, c, d\}$.

Якщо будь-який елемент заданої множини перебуває у відношенні з будь-яким елементом цієї множини, то таке відношення називають *універсальним*. Якщо ж жоден елемент заданої множини не перебуває у відношенні з жодним елементом цієї множини, то таке відношення називають *порожнім*.

Відношення $\Delta_A = \{\langle a, a \rangle \mid a \in A\}$ називають *діагональним* або *одиничним*.

Нехай R – деяке відношення у множині $M_1 \times M_2$ ($R \subset M_1 \times M_2$) і $a \in M_1$.

Означення. Сукупність всіх таких елементів $b \in M_2$, для яких $\langle a, b \rangle \in R$, називають *перерізом* відношення R за елементом a ; позначають R_a .

За означенням $R_a = \{b \mid \langle a, b \rangle \in R\}$.

Наприклад, нехай $M_1 = M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ і $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$.

Тоді маємо перерізи: $R_1 = \{2, 3\}$, $R_2 = \{1, 2, 3, 4\}$, $R_3 = \{4\}$, $R_4 = \emptyset$.

Означення. Сукупність всіх перерізів відношення R за елементами множини M_1 називають *фактором* або *фактор-множиною* множини M_2 і позначають M_2 / R , тобто

$$M_2 / R = \{R_a \mid a \in M_1\}.$$

Для розглянутого прикладу $M_2 / R = \{R_1, R_2, R_3, R_4\} = \{\{2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{4\}, \emptyset\}$.

Оскільки за означенням елементами булеана $\beta(M_2)$ є підмножини множини M_2 , то довільна фактор-множина M_2 / R є підмножиною цього булеана: $M_2 / R \subset \beta(M_2)$.

Нехай R – деяке відношення у множині $M_1 \times M_2$ ($R \subset M_1 \times M_2$) і $M_1' \subset M_1$.

Означення. Перерізом відношення R за множиною M_1' називають

об'єднання всіх перерізів відношення R за елементами множини M_1' , тобто

$$R_{M_1'} = \bigcup_{a \in M_1'} R_a.$$

Якщо у розглянутому прикладі покласти $M_1' = \{2,3\}$, то

$$R_{\{2,3\}} = R_2 \cup R_3 = \{1,2,3,4\} \cup \{4\} = \{1,2,3,4\}.$$

Якщо $M_1' = R_-$, то $R_{M_1'} = R_+$.

Приклад 7. Нехай задано відношення

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3)\}, S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}.$$

Визначити результати операцій \bar{R} , \bar{S} , $R \setminus S$, $R \cap S$.

Розв'язання. Випишемо поля бінарних відношень:

$$F(R) = R_- \cup R_+ = \{1, 2, 3\}; F(S) = S_- \cup S_+ = \{1, 2, 3\}. \quad \text{Тоді множина}$$

$C = F(R) \cup F(S) = \{1, 2, 3\}$ і універсальна множина буде такою

$$U = C \times C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}.$$

Тепер знаходимо: $\bar{R} = \{(1,3), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}$,

$$\bar{S} = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\},$$

$$R \setminus S = \{(1,2), (2,3)\}, R \cap S = \{(1,1), (3,3)\}.$$

Можливі наступні способи задання бінарних відношень $R \subset A \times B$, де $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.

1. *Списком пар.* Оскільки відношення є множиною, елементами якої є впорядковані пари, то його можна задати за допомогою способів задання множин.

$$\text{Наприклад, } R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, b \rangle\},$$

$$S = \{\langle x, y \rangle \mid y = kx, x, y \in \mathbb{Z}; k \in \mathbb{N}\}.$$

2. *Графічний спосіб.* Елементи області визначення і множини значень відношення зображують точками площини напроти одна від одної, а

впорядковані пари зображують стрілками, спрямованими від відповідних точок області визначення до точок множини значень.

Наприклад, задамо графічним способом (рис.5) відношення R , одержане вище множинним способом. Спочатку знайдемо його область визначення і множину значень:

$$R_- = \{a, b, c, d\}, R_+ = \{b, c\}.$$

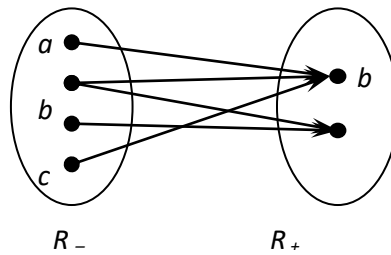


Рис.5

3. Табличний спосіб. Проводять горизонталі, кожна з яких позначають деяким елементом із множини A та вертикалі, позначаючи їх елементами із множини B , а потім жирними точками позначають перетин тих прямих, які задовольняють відношенню R .

Наприклад, зобразимо графічно (рис.6) розглядуване відношення R , знайшовши його поле: $F(R) = R_- \cup R_+ = \{a, b, c, d\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c, d\}$.

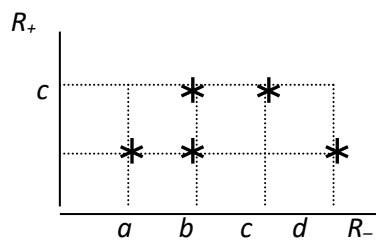


Рис. 6.

4. Матричний спосіб. Матриця відношення має стільки рядків, скільки елементів у області визначення, і стільки стовпців, скільки елементів у множині значень: $C_{m \times n} = (c_{ij})$, де $m = |A|$, $n = |B|$. Елементами матриці відношення є:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (a_i, b_j) \in R, \\ 0, & \text{якщо } (a_i, b_j) \notin R; \end{cases}$$

Наприклад, задамо матричним способом побудоване раніше відношення R .

$$R = \begin{matrix} & b & c \\ a & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ c & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ d & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Для діагонального, універсального та порожнього відношень у множині $M = \{a_1, a_2, a_3\}$ матриці матимуть вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 8. Задати всіма можливими способами бінарне відношення $R = \{(a, b) \mid a - \text{ділиться націло на } b; a \in A, b \in B\}$ на множинах $A = \{10, 13, 15, 20\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Розв'язання. Запишемо дане бінарне відношення списком пар: $R = \{(10, 1), (10, 2), (13, 1), (15, 1), (15, 3), (20, 1), (20, 2), (20, 4)\}$.

Матриця відношення R має вигляд: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Таблиця відношення $R \subset A \times B$ представлена на рис 7.

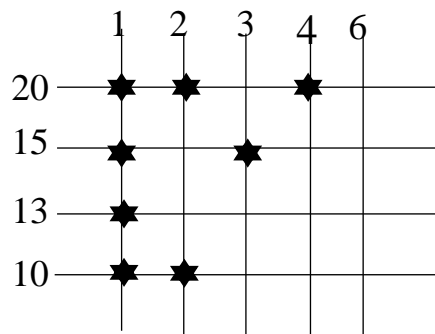


Рис. 6.

Графічно відношення $R \subset A \times B$ зображено на рис 8.

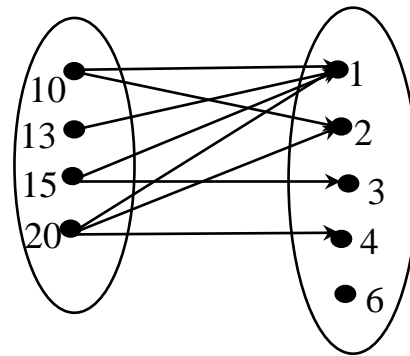


Рис. 8

Оскільки відношення є множинами, елементами яких є впорядковані пари, то над ними можна виконувати всі відомі операції над множинами.

Наприклад, якщо $P = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, d \rangle\}$, а $Q = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, d \rangle\}$, то

$$P \cup Q = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, d \rangle\};$$

$$P \cap Q = \{\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle\};$$

$$P \setminus Q = \{\langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle\};$$

$$P \oplus Q = \{\langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle\}.$$

Якщо відношення “менше”, “більше”, “дорівнює” тощо записати значками для їх позначення у дужках, то операції над цими відношеннями матимуть вигляд:

$$\langle \rangle \cup \langle = \rangle = \langle \leq \rangle, \quad \langle \rangle \cap \langle = \rangle = \emptyset, \quad \langle \geq \rangle \setminus \langle = \rangle = \langle > \rangle, \quad \langle \geq \rangle \oplus \langle > \rangle = \langle = \rangle.$$

Якщо для двох відношень R і S виконується умова $R \subset S$, то S називають розширенням відношення R , а R – звуженням відношення S .

Наприклад, $\langle \leq \rangle$ – розширення відношень $\langle < \rangle$ і $\langle = \rangle$, бо $\langle < \rangle \subset \langle \leq \rangle$ і $\langle = \rangle \subset \langle \leq \rangle$.

Крім теоретико-множинних операцій над відношеннями можна виконувати й інші операції. Однією з них є композиція.

Означення. Композицією відношень R і S називають множину всіх таких впорядкованих пар $\langle a, b \rangle$, для кожної з яких існує деякий елемент c такий, що $\langle a, c \rangle \in R$, $\langle c, b \rangle \in S$; позначають композицію $R \circ S$. Отже, за означенням:

$$R \circ S = \{ \langle a, b \rangle \mid \exists c, \langle a, c \rangle \in R, \langle c, b \rangle \in S \}.$$

Наприклад, якщо $P = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, d \rangle \}$, а $Q = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, d \rangle \}$, то

$$P \circ Q = \{ \langle a, c \rangle, \langle a, a \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, b \rangle \},$$

$$Q \circ R = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, c \rangle \}.$$

Приклад свідчить, що композиція відношень, у загальному випадку, – операція не комутативна, тобто $R \circ S \neq S \circ R$. Однак, композиція має такі властивості:

- 1) асоціативність: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$;
- 2) дистрибутивність \circ відносно \cup : $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$.

Приклад 3.9. Нехай на множинах $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{a, b, c\}$ задано відношення $R \subseteq A \times B$ і $S \subseteq B \times C$: $R = \{(1, x), (1, y), (3, x)\}$,

$S = \{(x, a), (x, b), (y, c)\}$. Визначити відношення $S \circ R$.

Розв'язання. Оскільки:

$$(1, x) \in R \text{ і } (x, a) \in S, \text{ то } (1, a) \in S \circ R;$$

$$(1, x) \in R \text{ і } (x, b) \in S, \text{ то } (1, b) \in S \circ R;$$

$$(1, y) \in R \text{ і } (y, c) \in S, \text{ то } (1, c) \in S \circ R;$$

$$(3, x) \in R \text{ і } (x, a) \in S, \text{ то } (3, a) \in S \circ R;$$

$$(3, x) \in R \text{ і } (x, b) \in S, \text{ то } (3, b) \in S \circ R.$$

Отже, маємо відношення $S \circ R \subseteq A \times C$:

$$S \circ R = \{(1, a), (1, b), (1, c), (3, a), (3, b)\}.$$

Означення. Відношення R^{-1} , задане на множині $M_2 \times M_1$, називають оберненим до відношення R , заданого на $M_1 \times M_2$, якщо

$$R^{-1} = \{ \langle a, b \rangle \mid \langle b, a \rangle \in R \}.$$

Означення. Інверсією називають операцію, яка довільному відношенню R ставить у відповідність відношення R^{-1} .

З означення видно, що область визначення R відношення R є множиною значень R^{-1} для відношення R^{-1} , і навпаки.

Геометричне зображення інверсії R^{-1} графіка R легко утворити за допомогою перетворення симетрії координатної площини відносно бісектриси першого координатного кута. При цьому вісь абсцис і вісь ординат міняються місцями, а точка $\langle x, y \rangle$ переходить у точку $\langle y, x \rangle$.

Зрозуміло, що у випадку універсального, діагонального та порожнього відношень:

$$E^{-1} = E, \quad \Delta^{-1} = \Delta, \quad \emptyset^{-1} = \emptyset.$$

Властивості обернених відношень:

- 1) $(R^{-1})^{-1} = R$;
- 2) якщо $R \subset S$, то $R^{-1} \subset S^{-1}$;
- 3) $\overline{R^{-1}} = \overline{R}^{-1}$;
- 4) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
- 5) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Бінарні відношення мають наступні важливі властивості.

Означення. Бінарне відношення R називають *рефлексивним* у множині $A = F(R)$, якщо будь-який елемент $a \in F(R)$ перебуває у відношенні сам з собою ($\langle a, a \rangle \in R$).

Означення. Бінарне відношення R називають *рефлексивним*, якщо з того, що $\langle a, b \rangle \in R$ слідує, що $\langle a, a \rangle \in R$ і $\langle b, b \rangle \in R$.

Наприклад, відношення $R = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$ рефлексивне у множині $A = \{1,2,3\}$, проте не рефлексивне у множині $A' = \{1,2,3,4\}$.

Рефлексивними є відношення рівності, подільності, паралельності, конгруентності, подібності фігур, універсальне та діагональне відношення.

Означення. Бінарне відношення R називають *антирефлексивним* у множині $A = F(R)$, якщо жоден елемент $a \in F(R)$ не перебуває у відношенні

сам з собою ($\langle a, a \rangle \notin R$).

Наприклад, відношення $S = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle\}$ антирефлексивне у множині $A = \{1,2,3\}$. Антирефлексивними є відношення “не дорівнює”, “менше”, “більше”, перпендикулярності тощо.

Порожнє відношення прийнято вважати як рефлексивним, так і антирефлексивним.

Якщо відношення є ні рефлексивним, ні антирефлексивним, то його називають *не рефлексивним*.

Наприклад, відношення $R = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$ не рефлексивне, оскільки елемент 2, на відміну від всіх інших, не перебуває у відношенні сам з собою ($\langle 2,2 \rangle \notin R$).

При зображенні рефлексивного відношення з допомогою графіка видно, що всі точки діагоналі $A \times A$ належать графіку відношення.

Означення. Бінарне відношення R називають *симетричним*, якщо з того, що $\langle a, b \rangle \in R$ слідує, що $\langle b, a \rangle \in R$.

Наприклад, відношення $R = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle\}$ симетричне. Симетричними є відношення паралельності, перпендикулярності, подібності, конгруентності, універсальне відношення тощо.

Для симетричного відношення його графік симетричний відносно діагоналі – бісектриси координатного кута.

Означення. Бінарне відношення R називають *антисиметричним*, якщо з того, що $\langle a, b \rangle \in R$ слідує, що $\langle b, a \rangle \notin R$.

Наприклад, відношення $S = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle\}$ антисиметричне. Антисиметричними є відношення включення, “менше”, “більше”, “менше дорівнює” тощо.

Відношення рівності, діагональне та порожнє вважають як симетричними, так і антисиметричними.

Означення. Бінарне відношення R називають *транзитивним*, якщо з того, що $\langle a, b \rangle \in R$ і $\langle b, c \rangle \in R$ слідує, що $\langle a, c \rangle \in R$.

Наприклад, відношення $R = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 4,4 \rangle\}$ транзитивне. Транзитивними також є відношення “менше”, “більше дорівнює”, подільності, паралельності, подібності, включення, діагональне, порожнє та універсальне відношення тощо.

Не транзитивними є відношення “не дорівнює”, перпендикулярності, належності тощо.

Графік транзитивного відношення має властивість $R \circ R \subseteq R$ і навпаки.

Операція обернення зберігає 5 властивостей відношень: рефлексивність, антирефлексивність, симетричність, антисиметричність і транзитивність.

Означення. Відношення R^* називають *транзитивним замиканням* відношення R на множині A , якщо $\langle a, b \rangle \in R^*$ тоді і тільки тоді, коли у множині A існує послідовність елементів a_1, a_2, \dots, a_n така, що $a_1 = a$, $a_n = b$ і $\langle a_1, a_2 \rangle \in R$, $\langle a_2, a_3 \rangle \in R$, ..., $\langle a_{n-1}, a_n \rangle \in R$.

Наприклад, нехай A – множина точок на площині і $\langle a, b \rangle \in R$, $a, b \in A$, якщо точки a і b з'єднані відрізком. Тоді $\langle c, d \rangle \in R^*$, $c, d \in A$, якщо існує ламана лінія, яка з'єднує точки c і d .

Приклад 10. На множині $A = \{a, b\}$ задано бінарне відношення $R = \{(a, b), (b, a)\}$. Знайти транзитивне замикання.

Розв'язання. Множина A має два елементи, тобто, потужність $|A| = 2$. Знаходимо композицію $R^2 = \{(a, a), (b, b)\}$. Отже, за формулою (3.1) маємо $R^* = R \cup R^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.

Означення. Бінарне відношення R називають *відношенням еквівалентності*, коли воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

Отже, R є відношенням еквівалентності, якщо:

- 1) $\langle a, a \rangle \in R$;
- 2) $\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R$;
- 3) $\langle a, b \rangle \in R, \langle b, c \rangle \in R \Rightarrow \langle a, c \rangle \in R$.

Якщо при цьому $A = F(R)$, то говорять, що R – відношення еквівалентності на множині A .

Наприклад, відношення $R = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle\}$ є відношенням еквівалентності.

Відношеннями еквівалентності є також відношення рівності, рівно потужності множин, конгруентності, подібності, діагональне, порожнє та універсальне відношення.

Важливу роль відіграє в математиці відношення “мають однакову остачу при діленні на k ” або “конгруентні за модулем k ”, яке є відношенням еквівалентності на множині \mathbb{N} натуральних чисел для будь-якого фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Відношення конгруентності за модулем k часто позначають $a \equiv b \pmod{k}$. Цьому відношенню належать, наприклад, пари натуральних чисел $(17,22)$, $(1221,6)$, $(42,57)$ для $k=5$, тобто $17 \equiv 22 \pmod{5}$, $1221 \equiv 6 \pmod{5}$, $42 \equiv 57 \pmod{5}$.

Приклад 11. Нехай на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ задано бінарне відношення

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (1,4), (2,1), (2,4), (3,5), (4,1), (4,2), (5,3)\}.$$

Переконатись, що R є відношенням еквівалентності.

Розв’язання. Представимо відношення R у вигляді матриці $C_{6 \times 6}$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видно, що головна діагональ матриці утворена лише одиницями (відношення R є рефлексивним); матриця симетрична відносно головної діагоналі (це відношення є симетричним); для елементів матриці виконується: якщо $c_{ki} = 1$ і $c_{ij} = 1$, то $c_{kj} = 1$ (R – транзитивне).

Отже, R є відношенням еквівалентності на множині A .

Приклад 12. Нехай Z – множина цілих чисел. Розглянемо відношення $R \subseteq Z \times Z : R = \{(a, b) : a - b = 5k \text{ для деякого цілого числа } k\}$. Наприклад, $(8, 3) \in R$, оскільки $8 - 3 = 5 = 5 \cdot 1$, і $(-6, 4) \in R$, так як $-6 - 4 = -10 = 5 \cdot (-2)$.

Переконатись, що відношення R є еквівалентністю.

Розв'язання. Відношення R рефлексивне: якщо $a \in Z$ – ціле число, то $a - a = 0 = 5 \cdot 0 = 5k$ для $k = 0$, тобто $(a, a) \in R$.

Нехай $(a, b) \in R$. Тоді існує таке ціле число m , що виконується $a - b = 5 \cdot m$ і $b - a = -(a - b) = -(5 \cdot m) = 5 \cdot (-m)$ для цілого числа $(-m)$, тобто, $(b, a) \in R$. Це означає, що відношення R симетричне.

Вважаємо, що $a, b, c \in Z$, $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$. За означенням, якщо $(a, b) \in R$, то $a - b = 5 \cdot k$ для деякого цілого числа k , і якщо $(b, c) \in R$, то $b - c = 5 \cdot m$ для деякого цілого числа m .

Додавання лівих і правих частин останніх двох рівностей дає:

$$(a - b) + (b - c) = 5k + 5m$$

або

$$a - c = 5 \cdot (k + m)$$

для цілого числа $(k + m)$. Це означає, що $(a, c) \in R$, тому відношення R транзитивне.

Оскільки відношення R рефлексивне, симетричне і транзитивне, то воно є еквівалентністю.

Нехай $R (R \subset A \times A)$ – відношення еквівалентності і $a \in A$.

Означення. Переріз R_a відношення R за елементом a називають класом

еквівалентності за відношенням R і позначають $[a]$ або $[a]_R$.

Отже, за означенням $[a] = R_a = \{b \mid \langle a, b \rangle \in R\}$. Тобто клас еквівалентності $[a]$ містить всі такі елементи множини A , які перебувають у відношенні R з елементом a .

Наприклад, якщо R – відношення паралельності у площині α , а l – деяка фіксована пряма у цій площині, то клас еквівалентності $[l]$ містить усі прямі площини α , паралельні прямій l . Справедливі твердження.

1. Будь-які два класи еквівалентності за відношенням R або не мають спільних елементів, або збігаються.

2. Будь-яку множину A , в якій задано відношення еквівалентності R , можна подати у вигляді об'єднання різних класів еквівалентності за відношенням R , тобто $A = \bigcup_{a \in A} [a]$.

Означення. Множину всіх класів еквівалентності за відношенням R називають *фактор-множиною* множини A за відношенням R : $A/R = \{[a] \mid a \in A\}$ або $A/R = \{[a] \mid a \in M\}$, де M – сукупність таких елементів множини A , яким відповідають різні класи еквівалентності.

Наприклад, якщо A – сукупність всіх студентів певної групи, які отримали за іспит оцінку k , а R – відношення еквівалентності, що визначається умовою $\langle a, b \rangle \in R$ тоді і тільки тоді, коли $a \in A_k$ і $b \in A_k$, то $A/R = \{A_2, A_3, A_4, A_5\}$. Фактор-множина для відношення “конгруентні за модулем 3” на множині \mathbb{N} натуральних чисел складається з трьох класів $\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$, $\{3k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ і $\{3k-2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Потужність фактор-множини $|A/R|$ називають *індексом розбиття* або *індексом відношення еквівалентності R* .

Приклад 13. Знайти класи еквівалентності, породженими елементами множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, та фактор-множину за відношенням еквівалентності R , наведеного в прикладі 11.

Розв'язання. Згідно з означенням випишуємо класи еквівалентності, породженими кожним елементом множини A :

$$[1] = \{x : xR1\} = \{1, 2, 4\}.$$

Тут $1 \in [1]$, оскільки $(1, 1) \in R$; $2 \in [1]$, оскільки $(2, 1) \in R$; $4 \in [1]$, оскільки $(4, 1) \in R$; не існує ніякого іншого $x \in A$ такого, що $(x, 1) \in R$.

Аналогічно, одержимо:

$$[2] = \{x : xR2\} = \{2, 1, 4\};$$

$$[3] = \{x : xR3\} = \{3, 5\};$$

$$[4] = \{x : xR4\} = \{4, 1, 2\};$$

$$[5] = \{x : xR5\} = \{5, 3\};$$

$$[6] = \{x : xR6\} = \{6\}.$$

Отже, маємо тільки три різні класи еквівалентності:

$$[1] = [2] = [4] = \{1, 2, 4\},$$

$$[3] = [5] = \{3, 5\},$$

$$[6] = \{6\};$$

тому фактор-множина $A/R = \{[1], [3], [6]\} = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 5\}, \{6\}\}$.

Нехай R відношення еквівалентності на множині A . Відображення множини A на фактор-множину A/R , яке кожному елементу $a \in A$ ставить у відповідність клас еквівалентності $[a]_R$, називають *канонічним* або *природним відображенням* множини A на фактор-множину A/R .

Означення. Бінарне відношення R називають *відношенням строгого порядку*, коли воно антисиметричне і транзитивне. Позначають: $\langle \rangle$ або $\langle_R \rangle$.

Отже R – відношення строгого порядку, якщо:

$$1) \quad \langle a, b \rangle \in R, \langle b, a \rangle \in R \Rightarrow a = b;$$

$$2) \langle a, b \rangle \in R, \langle b, c \rangle \in R \Rightarrow \langle a, c \rangle \in R.$$

Наприклад, розташування символів у довільному скінченному алфавіті означає відношення *строого лексикографічного порядку*, яке лежить в основі впорядкування словників, енциклопедій, індексів, довідників, списків, таблиць тощо.

Означення. Якщо відношення порядку є рефлексивним ($\langle a, a \rangle \in R$), то його називають *відношенням часткового (нестрогого) або квазіпорядку*; позначають: $\leq (\geq)$ або $\leq_R (\geq_R)$.

Наприклад, у числових множинах \mathbb{N} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} встановлено відношення строгого ($<(>)$) і нестроогого ($\leq(\geq)$) порядку.

Множину M , на якій задано відношення порядку, називають *впорядкованою*, а елементи $a, b \in M$ – *порівнюваними* за відношенням R , якщо виконується $\langle a, b \rangle \in R$ або $\langle b, a \rangle \in R$. Запис $\langle A; \leq \rangle$ означає, що у множині A відношення порядку \leq .

Впорядковану множину M , в якій будь-які різні два елементи є порівнюваними між собою, називають *лінійно впорядкованою* множиною або *ланцюгом*. Відповідне відношення R (як строге, так і нестроге), задане на лінійно впорядкованій множині, називають *лінійним (досконалим) порядком*.

Очевидно, відношення рівності є відношенням часткового порядку на будь-якій множині M , цей порядок називають *тривіальним*.

Якщо R – відношення строгого (нестрогого) порядку, то обернене відношення R^{-1} – теж відношення строгого (нестрогого) порядку.

Нехай M частково впорядкована множина і A деяка непорожня підмножина множини M .

Означення. *Верхньою гранню* підмножини $A \subseteq M$ в множині M називається елемент $b \in M$ такий, що $a \leq b$ всіх $a \in A$. Елемент b називається *найбільшим елементом* множини M , якщо b – верхня грань множини M . Відповідно, елемент c частково впорядкованої множини M називається *нижньою гранню*

підмножини $A \subseteq M$, якщо $c \leq a$ для будь-якого $a \in A$. Елемент c – *найменший* в множині M , якщо c – нижня грань самої множини M .

Означення. Елемент $x \in M$ називається *максимальним* в множині M , якщо не існує елемента $a \in M$ такого, що $x < a$. Відповідно, елемент $n \in M$ називається *мінімальним* у множині M , якщо не існує елемента $a \in M$ такого, що $a < n$.

У лінійно впорядкованій множині поняття найбільшого і максимального (найменшого і мінімального) елементів збігаються.

Означення. Відношення F , задане на множинах A_1, A_2, \dots, A_n, B називають *функціональним*, якщо для будь-якого елемента $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ існує

не більше одного елемента $b \in B$, такого, що $(a_1, a_2, \dots, a_n, b) \in F$.

Якщо ж деякого (a_1, a_2, \dots, a_n) такий елемент $b \in B$ існує, то його позначають $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ і записують $b = F(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Нехай $F^{-1}(b) = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \mid F(a_1, a_2, \dots, a_n) = b\}$. Очевидно, для будь-якого функціонального відношення F , заданого на множині $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

виконується включення $\bigcup_{b \in B} R^{-1}(b) \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, де $\bigcup_{b \in B} R^{-1}(b)$ – *область*

визначення відображення. Коли ж $\bigcup_{b \in B} R^{-1}(b) = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, то відношення F

називають *повністю визначеним*, у випадку $\bigcup_{b \in B} R^{-1}(b) \subset A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ – *частково*

визначеним або *частковим*.

Означення. Відношення F , задане на множинах A_1, A_2, \dots, A_n, B називають *відображенням* або *функцією*, якщо F – функціональне і часткове;

позначають: $F : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$.

Число n називають *арністю* функції F .

Якщо $F : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ та існує $b \in B$, такий, що $b = F(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то елемент b називають *образом* елемента (a_1, a_2, \dots, a_n) при відображенні F , а

(a_1, a_2, \dots, a_n) – прообразом елемента b .

Відношення $F : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ називають *відображенням* тоді і тільки тоді, коли для довільного $b \in B$: $F^{-1}(b) \neq \emptyset$. Множину всіх таких елементів b називають *множиною значень* відображення F .

Відображення F множини $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ на множину B називають *взаємно однозначним відображенням* або *взаємно однозначною відповідністю* тоді і тільки тоді, коли обернене відношення F^{-1} є відображенням B на $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Приклад 14. Нехай G – множина всіх пар дійсних чисел (x, y) :
 $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 1$.

Графічно така відповідність G визначає коло радіуса 1 з центром в точці $(3; 2)$. Визначити, що є образом і прообразами:

- а) чисел 2, 3, 4;
- б) відрізків $[2, 3]$, $[2, 4]$.

Які властивості відповідності G ?

Розв'язання. Коло G задає відповідність між множинами дійсних чисел \mathbb{R} і \mathbb{R} (рис. 8).

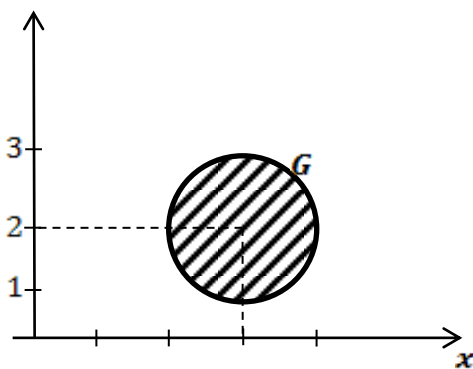


Рис. 8

- а) Образом числа $2 \in D(G)$ при відповідності G є єдине число $2 \in E(G)$.

Образ числа 3 при відповідності G є множина – відрізок $[1, 3]$, а образ числа 4 – число 2.

Прообразом числа $2 \in E(G)$ (на осі ординат) при відповідності G буде множина всіх дійсних чисел $[2,4] \in D(G)$ (на осі абсцис), прообразом числа 3 – число 3, а прообраз числа 4 при відповідності G не існує.

б) Образом множини чисел $[2,3] \in D(G)$ буде відрізок $[1,3] \in E(G)$. Аналогічно, образом відрізка $[2,4]$ буде відрізок $[1,3]$ при відповідності G .

Прообраз відрізка $[2,3]$ при відповідності G – це відрізок $[2,4]$, а прообраз відрізка $[2,4]$ – також $[2,4]$.

Якщо вважати, що відповідність G встановлена на множині дійсних чисел: $G \subseteq R \times R$, то вона є:

- 1) частково визначеною, оскільки $D(G) \neq R$;
- 2) не сюр'єктивною, оскільки $E(G) \neq R$;
- 3) не функціональною, оскільки для чисел із відрізка $[2,4] = D(G)$ (крім чисел 2, 4) відсутній єдиний образ;
- 4) не взаємно однозначна.

Приклад 15. Таблиця виграшів лотереї встановлює відповідність G між парами чисел $N \times N = N^2$ (серія, номер виграшного білета) і множиною виграшів M , тобто $G \subseteq N^2 \times M$. Чи є така відповідність функцією, якщо – да, то якою?

Розв'язання. Відповідність $G \subseteq N^2 \times M$, задана таблицею виграшів, є функціональною, оскільки для кожної пари із N^2 (серія, номер білета) визначений конкретний (єдиний) виграш із множини M . Отже, задана відповідність є двомісною функція $f : N \times N \rightarrow M$. Функція такого типу не всюди визначена, тому не є відображенням. Більше того, як правило, число виграшних білетів (потужність області визначення $D(f)$) більша за перелік найменувань виграшів (потужності області значень $E(f)$), тому даній функції не властива єдиність прообразу. В силу сказаного, f – не є взаємно однозначною відповідністю.

Отже, таблиця виграшів лотереї визначає функцію $f : N \times N \rightarrow M$, яка не є

відображенням і тим більше – взаємно однозначною відповідністю.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

2.1. На множині $M = \{1,2,3,4\}$ задано відношення:

$$R_1 = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\};$$

$$R_2 = \{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,3),(4,1),(4,4)\};$$

$$R_3 = \{(1,3),(1,4),(2,1),(1,2),(3,1),(3,3),(4,1)\};$$

$$R_4 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\};$$

$$R_5 = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(4,1),(4,3)\}.$$

Визначити, які з цих відношень є

а) рефлексивними;

б) антирефлексивними;

в) симетричними;

г) антисиметричними;

д) транзитивними.

Побудувати графіки, графи та матриці заданих відношень.

2.2. На множині Z задано відношення:

$$(m,n) \in R_1 \Leftrightarrow m-n \text{ парне число};$$

$$(m,n) \in R_2 \Leftrightarrow m+n \text{ парне число};$$

$$(m,n) \in R_3 \Leftrightarrow m-n \leq 100;$$

$$(m,n) \in R_4 \Leftrightarrow m-n \text{ непарне число};$$

$$(m,n) \in R_5 \Leftrightarrow m+n \text{ непарне число};$$

$$(m,n) \in R_6 \Leftrightarrow m/n \text{ парне число};$$

$$(m,n) \in R_7 \Leftrightarrow m/n \text{ непарне число};$$

$$(m,n) \in R_8 \Leftrightarrow m * n \text{ парне число};$$

$$(m,n) \in R_9 \Leftrightarrow m * n \text{ непарне число};$$

$$(m,n) \in R_{10} \Leftrightarrow m-n \in \text{степенем числа } 2;$$

$$(m,n) \in R_{11} \Leftrightarrow m \text{ і } n \in \text{взаємно простими};$$

$$(m,n) \in R_{12} \Leftrightarrow m \leq n;$$

$(m,n) \in R_{13} \Leftrightarrow m$ ділить n ;

$(m,n) \in R_{14} \Leftrightarrow m/n$ є степенем числа 2.

Визначити, які з цих відношень є

- а) рефлексивними;
- б) антирефлексивними;
- в) симетричними;
- г) антисиметричними;
- д) транзитивними;
- е) толерантними.

2.3. Побудувати відношення:

- а) симетричне, транзитивне, нерефлексивне;
- б) рефлексивне, симетричне, нетранзитивне;
- в) рефлексивне, антисиметричне, нетранзитивне;
- г) рефлексивне, симетричне, транзитивне;
- д) рефлексивне, несиметричне, транзитивне;
- е) антисиметричне, транзитивне, нерефлексивне;
- є) несиметричне, не антисиметричне;
- ж) нерефлексивне, неантирефлексивне, несиметричне, транзитивне.

2.4. Що можна сказати про відношення \bar{R} , якщо відношення R на множині M :

- а) рефлексивне; г) антирефлексивне;
- б) симетричне; д) антисиметричне;
- в) транзитивне; е) толерантне.

2.5. Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині $M = \{1,2,3,4\}$, яке включає задане відношення R .

- а) $R = \{(2,4),(3,1)\}$;
- б) $R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,3)\}$;
- в) $R = \{(1,2),(2,2),(1,3),(2,3),(4,2)\}$.

2.6. Побудувати всі можливі розбиття множини $A = \{a,b,c\}$.

2.7. Довести, що множина всіх підмножин (булеан) даної множини є частково впорядкованою за відношенням включення \subseteq .

2.8. Побудувати всі відношення часткового порядку на множині

а) $M = \{a, b\}$; б) $M = \{a, b, c\}$; в) $M = \{a, b, c, d\}$.

Тема 3. Комбінаторика.

Комбінаторика або комбінаторний аналіз — розділ математики, в якому вивчають розташування та вибір елементів (підмножин) із деякої скінченної множини за певними правилами і методи обчислення всіх можливих способів, якими це можна здійснити. Згадані підмножини прийнято називати *вибірками* або *комбінаторними конфігураціями*.

Розв'язування більшості задач комбінаторного аналізу ґрунтується на застосуванні двох правил – правила суми і правила добутку.

Нехай задано дві скінченні множини A та B : $|A| = n$, $|B| = m$; причому $A \cap B = \emptyset$.

Правило суми. Якщо елемент $a \in A$ можна вибрати n способами, а елемент $b \in B$ — m способами, то вибір або a або b можна здійснити $n + m$ способами.

На мові теорії множин це правило формулюється так:

$$|A \cup B| = |A| + |B| = n + m.$$

Приклад 16. З міста A до міста B можна дістатися 12 потягами, 3 літаками,

23 автобусами. Скількома способами можна дістатися з міста A до міста B ?

Розв'язання. Проїзд з міста A до B потягом, літаком або автобусом є подіями, які не можуть виконуватися одночасно однією людиною (попарно несумісними), тому загальну кількість маршрутів можна обчислити додаванням способів пересування:

$$N = 12 + 3 + 23 = 38.$$

Правило добутку. Якщо елемент $a \in A$ можна вибрати n способами і

після кожного такого вибору елемент $b \in B$ можна вибрати m способами, то вибір впорядкованої пари (a, b) , тобто вибір a та b можна здійснити $n \cdot m$ способами.

Оскільки всі впорядковані пари множин A та B утворюють декартів добуток цих множин, то правило можна записати так:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = n \cdot m.$$

Правило добутку можна узагальнити на випадок кортежа будь-якої скінченної довжини. Нехай задано множини A_1, A_2, \dots, A_k , причому $|A_1| = n_1, |A_2| = n_2, \dots, |A_k| = n_k$. Тоді справедлива формула

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k.$$

Приклад 17. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, якщо жодна з цифр не повторюється.

Розв'язання. Оскільки першою цифрою можуть бути тільки цифри 1, 2, 3, 4, то існує $n_1 = 4$ способів її вибору. Якщо перша цифра вибрана, то друга може бути вибрана $n_2 = 4$ способами, третя — $n_3 = 3$ способами, четверта — $n_4 = 2$ способами.

Отже, згідно з правилом добутку, шукане число способів дорівнює $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$.

Нехай множина A містить n елементів, тобто $|A| = n$. Множина називається упорядкованою, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність деяке натуральне число (номер елемента) так, що різним елементам відповідають різні числа. Упорядковані множини відрізняються одна від одної або своїми елементами, або їх порядком.

Підмножину, яка містить декілька екземплярів одного і того ж елемента множини A , називають *мультимножиною*.

Вибіркою називається будь-яка підмножина або мультимножина, елементи яких вибираються із елементів множини A . Число k елементів у

вибірці визначає її обсяг (таку вибірку називають також k -вибіркою).

Вибірку, в якій не враховується порядок запису елементів, називають *сполученням*. Вибірку, в якій порядок запису елементів враховується, називають *розміщенням*. Упорядковані k -вибірки множини з n елементів називаються *розміщеннями* з n елементів по k .

Позначимо через A_n^k - число різних розміщень з n елементів по k без повторень. Число різних розміщень з n елементів по k обчислюється за формулою

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Приклад 18. Скількома способами можна розсадити 3 студентів на 10 стільцях?

Розв'язання. За формулою (5.4) шукане число способів дорівнює $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Розміщення з n елементів по n називають *перестановками*.

Число перестановок із n елементів позначається через P_n і обчислюється за формулою

$$P_n = A_n^n = n!.$$

Зауважимо, що перестановки з n елементів відрізняються між собою лише порядком елементів.

Приклад 19. Скількома способами можна розмістити на полиці чотири томи математичної енциклопедії?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу способів упорядкування множини з чотирьох елементів, тобто

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Довільні k -вибірki із n -елементної множини, які відрізняються хоча б одним елементом, називаються *сполученнями (комбінаціями)* із n елементів по k . Число сполучень з n елементів по k позначається символом C_n^k .

Число сполучень із n елементів по k елементів визначається за формулою

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Приклад 20. Скількома способами можна вибрати три цифри з дев'яти 1, 2, 3, ..., 9?

Розв'язання. Кількість усіх можливих способів визначаємо за формулою:

$$N = C_9^3 = \frac{9!}{6!3!} = 84.$$

Розглянемо впорядковані k -вибірки, складені із елементів n -елементної множини A , причому елементи у вибірках можуть повторюватись. Позначимо символом \bar{A}_n^k - число впорядкованих вибірок з повторенням елементів.

Число різних розміщень з повтореннями із n елементів по k визначається за формулою

$$\bar{A}_n^k = n^k.$$

Приклад 21. Знайти кількість булевих векторів довжиною m .

Розв'язання. Очевидно, що будь-який такий вектор буде впорядкованою мультимножиною, яка складається із m елементів 0 або 1. Отже, булевий вектор - впорядкована вибірка з повтореннями елементів. За формулою при $n = 2$, $k = m$ одержимо кількість булевих векторів $\bar{A}_2^m = 2^m$.

Приклад 22. Скількома способами можна розкласти 10 різних монет до двох кишень?

Розв'язання. Кожній монеті поставимо у відповідність 0, якщо вона покладена, наприклад, до лівої кишені, і 1 - якщо до правої. Тоді кожному розподілу монет до кишень буде відповідати булевий вектор довжини 10. Тому при $n = 2$, $k = 10$ маємо число всіх способів $\bar{A}_2^{10} = 2^{10} = 1024$.

Зауважимо, що метод розв'язування комбінаторних задач шляхом зведення до пошуку числа булевих векторів часто застосовується в

комбінаторному аналізі.

Розглянемо деяку множину A , потужність якої $|A| = n$. Кажуть, що множину A розбито на k підмножин A_1, A_2, \dots, A_k , якщо:

- 1) $A_i \cap A_j = \emptyset, (i \neq j), i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- 2) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = A$.

Позначимо число елементів у підмножині A_i через $|A_i| = n_i$; очевидно, що $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Кількість розбиттів множини на підмножини позначимо через $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$. Зауважимо, що порядок розташування елементів у кожній підмножині не має значення; істотним є лише те, до якої підмножини потрапить кожен з елементів множини A .

Нехай $|A| = n$. Кількість способів, якими можна розбити множину A на підмножини A_1, A_2, \dots, A_k , з числом елементів n_1, n_2, \dots, n_k визначається за

$$\text{формулою } P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Приклад 23. Скількома способами можна розселити 9 студентів до трьох кімнат, якщо перша кімната розрахована на 4 особи, друга – на 3 особи, а третя – на 2 особи.

Розв'язання. A – множина студентів, яких потрібно розселити. Маємо: $|A| = 9 = n, n_1 = 4, n_2 = 3, n_3 = 2$. За формулою обчислюємо

$$P_9(4, 3, 2) = \frac{9!}{4!3!2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6 \cdot 4} = 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 9 = 630.$$

Зауважимо, що попередню формулу можна трактувати по іншому. Нехай n -елементна множина A має елементи k різних типів. Перестановку, яку можна отримати із n елементів, серед яких елементи першого типу зустрічається n_1 разів, елементи другого типу - n_2 разів, ... , елементи k -го типу - n_k разів ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$) називають *перестановкою з повтореннями*. Число різних перестановок з повтореннями становить $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Приклад 24. Скільки різних слів можна одержати, переставляючи літери в слові “колобок”?

Розв'язання. Слово складається із 7 літер ($n = 7$), серед яких літера “к” зустрічається 2 рази ($n_1 = 2$), літера “о” – 3 рази ($n_2 = 3$), літери “л”, “б” – по одному разу ($n_3 = n_4 = 1$). За формулою знаходимо

$$P_7(2,3,1,1) = \frac{7!}{2!3!1!1!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2} = 420.$$

Нехай маємо неупорядковану n - елементну множину A , елементи якої належать до n різних типів (класів). Сполученням з n елементів по k елементів з повтореннями називається сукупність, складена із k елементів, кожний з яких належить до одного з типів множини A . Позначимо через \bar{C}_n^k - число різних сполучень із n елементів по k елементів з повтореннями.

Кількість різних сполучень із n елементів по k елементів з повтореннями становить

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Приклад 25. Скількома цілих невід'ємних розв'язків має рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$?

Розв'язання. Розв'язки цього рівняння можна трактувати так: якщо x_1, x_2, x_3, x_4 - цілі невід'ємні числа, то можна скласти сполучення з $n = 4$ елементів по $k = 10$, взявши x_1 елементів першого типу, x_2 елементів другого типу, x_3 - третього типу і x_4 - четвертого типу; при цьому має виконуватись рівність $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$. Таким чином, число цілих невід'ємних розв'язків заданого рівняння становить

$$\bar{C}_n^k = \bar{C}_4^{10} = C_{4+10-1}^{10} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{10!3!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{2 \cdot 3} = 286.$$

Числа сполучень C_n^k ($0 \leq k \leq n$) називають біноміальними коефіцієнтами. Ці числа зустрічаються в формулах розв'язування багатьох задач

комбінаторного аналізу. Розглянемо деякі найважливіші властивості біноміальних коефіцієнтів.

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.
2. $C_n^0 = C_n^n = 1$.
3. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
4. $C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^k C_m^i C_n^{k-i}$

Приклад 26. Розв'язати $C_k^{k-3} + C_k^{k-2} = 15(k-1)$ рівняння відносно натурального числа k .

Розв'язання. Очевидно, розв'язки рівняння мають задовольняти умовам

$$\begin{cases} k-3 \geq 0, \\ k-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq 3, \\ k \geq 2 \end{cases} \Rightarrow k \geq 3.$$

Скориставшись відповідною формулою, запишемо рівняння у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{k!}{(k-3)!(k-k+3)!} + \frac{k!}{(k-2)!(k-k+2)!} &= 15(k-1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{k!}{(k-3)!3!} + \frac{k!}{(k-2)!2!} &= 15(k-1). \end{aligned}$$

Виконаємо спрощення:

$$\begin{aligned} \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)!}{(k-3)!3!} + \frac{k(k-1)(k-2)!}{(k-2)!2!} &= 15(k-1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{k(k-1)(k-2)}{6} + \frac{k(k-1)}{2} &= 15(k-1) \Rightarrow \\ \Rightarrow (k-1) \left(\frac{k(k-2)}{6} + \frac{k}{2} - 15 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Приходимо до сукупності

$$\left[\begin{array}{l} k-1=0, \\ \frac{k(k-2)}{6} + \frac{k}{2} - 15 = 0; \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=1, \\ k(k-2) + 3k - 90 = 0; \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=1, \\ k^2 + k - 90 = 0; \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 1, \\ k_2 = -10, \\ k_3 = 9. \end{array} \right]$$

Отже, дане рівняння має єдиний розв'язок $k = 9$.

З елементарної математики добре відомі формули скороченого множення

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{і} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Виявляється, існує загальна формула. Для натурального n справедлива рівність (біномом Ньютона):

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n \equiv \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

З властивості біноміальних коефіцієнтів випливає, що біноміальні коефіцієнти цієї формули можна записати у вигляді трикутної таблиці, яку називають *трикутником Паскаля*:

1	1					$n = 1$		
	1	2	1			$n = 2$		
		1	3	3	1	$n = 3$		
			1	4	6	4	1	$n = 4$
1	5	10	10	5	1			$n = 5$
...					

У n -му рядку цього трикутника стоять біноміальні коефіцієнти розкладу формули бінома Ньютона: кожний коефіцієнт, крім двох крайніх одиниць, є сумою двох коефіцієнтів із попереднього рядка, які стоять над ним.

Маємо ряд важливих наслідків.

$$1. \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

$$2. \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0.$$

Приклад 27. Знайти коефіцієнт при $x^2 y^5$ в розкладанні $(3x + 2y)^7$.

Розв'язання. Згідно з формулою (6.1) доданок, який містить $x^2 y^5$, має

вигляд

$$C_7^2 (3x)^2 (2y)^5 = \frac{7!}{2!5!} (3x)^2 (2y)^5 = \frac{42}{2} 3^2 x^2 2^5 y^5 = 21 \cdot 9 \cdot 32 x^2 y^5 = 6048 x^2 y^5.$$

Отже, коефіцієнт при $x^2 y^5$ дорівнює 6048.

Сформулюємо узагальненням бінома Ньютона.

Для натурального n справедлива рівність (поліноміальна формула)

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_m = n}} P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}.$$

Приклад 28. Знайти коефіцієнт при $x^3 y^4 z^4$ в розкладанні $(2x + y^2 + 3z)^9$.

Розв'язання. Із поліноміальної формули видно, що доданок, який містить $x^3 y^4 z^4$ буде таким (при $n = 9$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = 4$; $k_1 + k_2 + k_3 = n$):

$$P_9(3, 2, 4)(2x)^3 (y^2)^2 (3z)^4 = \frac{9!}{3!2!4!} 2^3 3^4 x^3 y^4 z^4 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6 \cdot 4} 8 \cdot 81 x^3 y^4 z^4.$$

Обчислюємо коефіцієнт при $x^3 y^4 z^4$:

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6 \cdot 4} 8 \cdot 81 = 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 81 = 408240.$$

Раніше при застосуванні комбінаторного правила суми розглядалися множини, які не перетинаються. Проте часто виникають задачі про підрахунок елементів об'єднання множин, які перетинаються. Нехай A , B – скінченні множини.

Кількість елементів, які можна вибрати із множин A або B визначається за формулою

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Приклад 29. У фірмі працює 63 співробітники. Серед них 45 володіють англійською мовою, 33 – німецькою, а 23 знають і англійську, і німецьку мови. Скільки співробітників:

- володіють англійською або німецькою мовою?
- не володіють жодною із цих мов?

Розв'язання. Нехай U – універсальна множина (всі співробітники

фірми), A – множина співробітників, які володіють англійською мовою, H – множина співробітників, які володіють німецькою мовою; $|U| = 63$, $|A| = 45$,

$$|H| = 33, \quad |A \cap H| = 23.$$

а) Співробітники, які володіють англійською або німецькою мовами, утворюють множину $A \cup H$, потужність якої визначається за формулою:

$$|A \cup H| = |A| + |H| - |A \cap H| = 45 + 33 - 23 = 55.$$

б) Співробітники фірми, які не володіють як англійською, так і німецькою мовами утворюють множину $\bar{A} \cap \bar{H}$. Оскільки справедлива рівність $\bar{A} \cap \bar{H} = \overline{A \cup H}$ (закон де Моргана), то знаходимо потужність

$$|\bar{A} \cap \bar{H}| = |\overline{A \cup H}| = |U| - |A \cup H| = 63 - 55 = 8.$$

Розглянемо тепер випадок трьох множин. Нехай задано множини A , B і C , які можуть перетинатися, і необхідно визначити потужність множини $A \cup B \cup C$. Якщо взяти суму потужностей кожної із множин A , B і C , то підмножини, які утворюють перерізи $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ будуть враховані двічі. Якщо відняти потужності $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ і $|B \cap C|$, то як видно, наприклад, із діаграми Ейлера-Венна, елементи множини $A \cap B \cap C$ зовсім не будуть враховані. Тому необхідно додати потужність $|A \cap B \cap C|$, після чого при підрахунку потужності множини $A \cup B \cup C$ кожний елемент буде враховуватись лише один раз. Отже, маємо наступну формулу:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Приклад 30. а) Скільки додатних цілих чисел, менших 1002, діляться на 2, 3 або 5? б) Скільки додатних цілих чисел, менших 1002, не діляться на 2, 3 або 5?

Розв'язання. Позначимо через U – універсальну множину всіх додатних цілих чисел, менших 1002; A – множину додатних цілих чисел, менших 1002, які діляться на 2; B – множину додатних цілих чисел, менших 1002, які

діляться на 3; C – множину додатних цілих чисел, менших 1002, які діляться на 5. Маємо: $|U| = 1001$ – всього чисел, менших 1002;

$$|A| = \left[\frac{1001}{2} \right] = 500 \text{ – кількість цілих чисел, які діляться на 2;}$$

$$|B| = \left[\frac{1001}{3} \right] = 333 \text{ – кількість цілих чисел, які діляться на 3;}$$

$$|C| = \left[\frac{1001}{5} \right] = 200 \text{ – кількість цілих чисел, які діляться на 5}$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{1001}{6} \right] = 166 \text{ – кількість цілих чисел, які діляться на 2 і на 3}$$

$$|A \cap C| = \left[\frac{1001}{10} \right] = 100 \text{ – кількість цілих чисел, які діляться на 2 і на 5}$$

$$|B \cap C| = \left[\frac{1001}{15} \right] = 66 \text{ – кількість цілих чисел, які діляться на 3 і на 5;}$$

$$|A \cap B \cap C| = \left[\frac{1001}{30} \right] = 33 \text{ – кількість цілих чисел, які діляться на 3, 3 і на 5.}$$

а) Згідно з останньою формулою кількість додатних цілих чисел, менших 1002, які діляться на 2, 3 або 5 буде таким:

$$|A \cup B \cup C| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734.$$

б) Визначаємо кількість додатних цілих чисел, менших 1002, які не діляться на 2, 3 або 5:

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |U| - |A \cup B \cup C| = 1001 - 734 = 267.$$

Якщо A_1, A_2, \dots, A_n - деякі скінченні множини, то потужність множини $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ визначається за формулою

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = & \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \\ & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

3.1. У групі 25 студентів. Скільки існує способів вибрати старосту, профорга за умови, кожний студент може виконувати лише одне з цих доручень?

3.2. Скільки існує способів вибору на чергування двох студентів із двох груп чисельністю 23 і 20 студентів, якщо:

- а) студенти повинні бути з різних груп;
- б) студенти повинні бути з однієї групи?

3.3. Група студентів вивчає 7 учбових дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на понеділок, якщо в цей день тижня повинно бути 4 різні пари?

3.4. Скількома способами можна розсадити 12 осіб за столом на якому стоять 12 приборів?

3.5. Скількома способами можна вибрати 13 карт з колоди в 52 карти?

3.6. Скільки можна утворити цілих чисел, з яких кожне записувалось б трьома різними цифрами?

3.7. Скільки існує п'ятизначних чисел кратних 5?

3.8. Скільки всього шестизначних чисел можна скласти з множини цифр $\{1,2,3,4,5,6\}$, якщо:

- а) цифри не будуть повторюватись;
- б) цифри будуть повторюватись?

3.9. 30 учасників річних зборів акціонерів претендують на посади голови, секретаря, казначея та 4 інші посади правління. Визначити скільки існує способів заміщення вакантних місць.

3.10. З 30 учасників річних зборів акціонерів потрібно обрати правління з 7 чоловік і комісію з 5 чоловік. Скількома способами це можна зробити, якщо:

- (а) члени правління не можуть входити до складу комісії?
- (б) члени правління можуть входити до складу комісії?

3.11. Скількома способами можна поділити групу з 20 студентів на дві

підгрупи так, щоб в одній було 15, а в другій 5 студентів?

3.12. Скількома способами можна поділити комісію з 20 викладачів на чотири підкомісії по 5 чоловік?

3.13. У їдальні є три перші страви, п'ять других і 2 треті страви. Скількома способами можна скласти з них повний обід?

3.14. Скільки всього трьохзначних парних чисел, у яких:

а) цифри не повторюються;

б) цифри повторюються?

3.15. Скласти всі двозначні числа з трьох цифр {3,5,8}, у яких:

а) цифри не повторюються;

б) цифри повторюються?

3.16. Скількома способами можна скласти список з прізвищ 8 студентів?

3.17. Щоб дістатись з Києва до Одеси можна вибрати один з 4 залізничних або один з 3 автобусних рейсів. Скільки існує варіантів здійснити подорожі за маршрутами:

а) Київ - Одеса - Київ?

б) Київ - Одеса – Київ, якщо повертатися з Одеси до Києва поїздом?

3.18. У ліфт дванадцятиповерхового будинку зайшло на першому поверсі 10 чоловік. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта?

3.19. Скількома способами можна розподілити 15 різних предметів між трьома особами так, щоб кожна отримала 5 предметів?

3.20. Скільки існує різних слів, які можна утворити перестановкою літер у слові «ананас»? Вважаємо, що всі слова (навіть беззмістовні) потрібно рахувати.

3.21. У кондитерській є 6 різних сортів тістечок. Скільки є способів купити 8 тістечок?

3.22. Скількома способами можна розкласти 15 однакових кульок у 5 урн?

3.23. Скільки всього семизначних телефонних номерів, в кожному з яких цифри не повторюються?

3.24. Скількома способами можна розмістити 8 пасажирів у три вагони?

3.25. Скількома способами можна упакувати 9 різних книг в три бандеролі по 2, 3, 4 книги в кожній бандеролі?

3.26. Парламентська комісія складається з голови, його заступника і ще 5 членів комісії. Скількома способами вони можуть розподілити між собою обов'язки?

3.27. Скількома способами можна обрати трьох чергових з групи чисельністю 20 студентів?

3.27. У відділ працює 5 економістів та 9 інженерів. Скількома способами можна відібрати 2 економістів та 3 інженерів, якщо спеціалісти вважаються рівноцінними?

3.28. У групі 15 студентів. Скількома способами можна обрати:

- а) студраду в кількості трьох чоловік;
- б) старосту, за старости, профорга групи?

3.29. У Ніни є 7 різних книг з математики, а у Слави – 9 різних книг з філософії. Скількома способами вони можуть обмінятися один з одним по 5 книг?

3.30. У філії банку працюють 15 співробітників, троє з них не мають потрібної кваліфікації. Скільки можна скласти списків:

- а) по 8 співробітників;
- б) по 6 кваліфікованих співробітників;
- в) по 9 співробітників, два з яких не мають потрібної кваліфікації?

3.31. Стрілець стріляє двічі по мішені. Описати простір елементарних подій. Записати подію, яка полягає в тому, що:

- а) стрілець влучив хоча б один раз;
- б) стрілець влучив один раз;
- в) стрілець не влучив у мішень.

3.32. Тричі кидають монету. Описати простір елементарних подій.

3.33. Скільки елементарних подій може бути при двократному киданні грального кубика?

3.34. Скільки елементарних подій відбувається при п'ятикратній стрільбі по мішені?

3.35. Прилад складається з двох блоків першого типу і трьох блоків другого типу. Подія A_i – справний i -тий блок першого типу; B_j – справний j -тий блок другого типу. Прилад працює, якщо справний хоча б один блок першого типу і не менше ніж два блоки другого типу. Описати подію – прилад працює, через події A_i та B_j .

Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Задайте множини списками їх елементів.

1.1. $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0, x^2 - 5x + 6 = 0\}$.

1.2. $A = \{x \mid x^2 - 3x - 10 < 0, x \in N\}$.

1.3. $A = \{x \mid x - \text{дільник числа } 12\}$.

1.4. $A = \{x \mid x - \text{літера слова "сервер"}\}$.

1.5. $A = \{x \mid x^2 - x = 0, x^2 - 11x + 10 = 0\}$.

1.6. $A = \{x \mid x^2 - 11x + 10 < 0, x \in N\}$.

1.7. $A = \{x \mid x - \text{літера слова "програма"}\}$.

1.8. $A = \{x \mid x^2 - 4 = 0, x^2 - 5x + 4 = 0\}$.

1.9. $A = \{x \mid x^2 + 3x - 10 \leq 0, x \in Z\}$.

1.10. $A = \{x \mid x - \text{дільник числа } 30\}$.

1.11. $A = \{x \mid x - \text{літера слова "інтернет"}\}$.

1.12. $A = \{x \mid x^2 - 4 = 0, x^2 - 2x - 8 = 0\}$.

1.13. $A = \{x \mid x^2 - 5x - 14 < 0, x \in N\}$.

1.14. $A = \{x \mid x - \text{дільник чисел } 12 \text{ та } 18\}$.

- 1.15. $A = \{x \mid x - \text{літера слова "ітерація"}\}$.
- 1.16. $A = \{x \mid x^2 - 9 = 0, x^2 + 6x - 7 = 0\}$;
- 1.17. $A = \{x \mid x^2 + 7x - 8 < 0, x \in \mathbb{Z}\}$.
- 1.18. $A = \{x \mid x - \text{дільник числа 42}\}$.
- 1.19. $A = \{x \mid x - \text{літера слова "університет"}\}$.
- 1.20. $A = \{x \mid x^2 - 5x = 0, x^2 - 2x - 15 = 0\}$.
- 1.21. $A = \{x \mid x^2 - 8x + 7 \leq 0, x \in \mathbb{N}\}$.
- 1.22. $A = \{x \mid x - \text{літера слова "неперервний"}\}$.
- 1.23. $A = \{x \mid x^2 - 9 = 0, x^2 - 8x + 15 = 0\}$.
- 1.24. $A = \{x \mid x^2 + 3x - 10 < 0, x \in \mathbb{Z}\}$.
- 1.25. $A = \{x \mid x - \text{дільник числа 24}\}$.
- 1.26. $A = \{x \mid x - \text{літера слова "автоматизація"}\}$.
- 1.27. $A = \{x \mid x^2 - 6x = 0, x^2 - 8x - 9 = 0\}$.
- 1.28. $A = \{x \mid x^2 - 4x - 21 < 0, x \in \mathbb{N}\}$.
- 1.29. $A = \{x \mid x - \text{дільник чисел 18 та 42}\}$.
- 1.30. $A = \{x \mid x - \text{літера слова "інваріанти"}\}$.

Завдання 2. Для заданих множин записати універсальну множину та виконати над множинами вказані операції а), б).

2.1. $A = \{1, 9, 10, 11, 12\}$, $B = \{9, 10\}$, $C = \{11, 12, 15\}$, $D = \{10, 11, 13, 15\}$;

а) $(A \setminus B) \cap C$, б) $\overline{(A \cup B) \cap (D \cup C)}$.

2.2. $A = \{1, 3, 9, 10\}$, $B = \{1, 11\}$, $C = \{3, 9, 11\}$, $D = \{1, 3, 9, 15\}$;

а) $A \cup (B \setminus C)$, б) $\overline{(A \cap D) \cup (A \cap C)}$.

- 2.3. $A = \{8,9,10,13\}$, $B = \{7,9\}$, $C = \{8,9,13,15\}$, $D = \{10,11,13,15\}$;
 a) $A \setminus (B \div C)$, б) $\overline{(A \cup B \cup D \cup C)}$.
- 2.4. $A = \{8,9\}$, $B = \{9,10,15\}$, $C = \{15,17,18\}$, $D = \{8,10,15,18,19\}$;
 a) $(A \setminus B) \cap (C \div A)$, б) $(\bar{A} \cup \bar{B}) \setminus (C \cap \bar{D})$.
- 2.5. $A = \{1,3,7,8\}$, $B = \{7,8\}$, $C = \{1,3,9\}$, $D = \{1,3,9,10,11\}$;
 a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$, б) $\overline{(A \div B) \cup (D \setminus C)}$.
- 2.6. $A = \{11,12,15,19\}$, $B = \{12,15,17\}$, $C = \{11,17\}$, $D = \{11,15,19,20,21\}$;
 a) $(A \setminus B) \cap \overline{(D \setminus C)}$, б) $\overline{(A \setminus C) \setminus B}$.
- 2.7. $A = \{0,1\}$, $B = \{\emptyset\}$, $C = \{1,2,4\}$, $D = \{0,3,9,10,12\}$;
 a) $(A \cup B) \cap (A \setminus C)$, б) $(\bar{A} \setminus \bar{B}) \setminus (\bar{C} \setminus \bar{D})$.
- 2.8. $A = \{5,8,9,10\}$, $B = \{10,11\}$, $C = \{11,14,15\}$, $D = \{0,1,2,11\}$;
 a) $(A \div D) \cup (B \setminus D)$, б) $(\bar{A} \cup \bar{B}) \setminus (C \cap \bar{D})$.
- 2.9. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{4,5,6\}$, $D = \{4,5\}$;
 a) $(A \setminus B) \div (C \setminus D)$, б) $\overline{(A \cap D) \cup (A \cap C)}$.
- 2.10. $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,4\}$, $C = \{4,6\}$, $D = \{3,4,5,7\}$;
 a) $(A \setminus B) \cap C$, б) $\overline{(A \cup B \cup (D \cap C))}$.
- 2.11. $A = \{5,6,7\}$, $B = \{5,6\}$, $C = \{4,5,6,10\}$, $D = \{1,2,3,4,10\}$;
 a) $A \cup (B \setminus C)$, б) $\overline{(A \div B) \cup (D \setminus C)}$.
- 2.12. $A = \{3,5,7,9\}$, $B = \{5,7,9\}$, $C = \{1,2,3,5\}$, $D = \{1,2,3,4,10\}$;
 a) $A \setminus (B \div C)$, б) $\overline{(A \cup B) \cap (D \cup C)}$.
- 2.13. $A = \{7,8,9,10,11\}$, $B = \{9,10,11,17\}$, $C = \{8,9\}$, $D = \{10,11,18\}$;
 a) $(A \setminus B) \cap (C \div D)$, б) $\overline{(A \setminus C) \setminus B}$.
- 2.14. $A = \{1,5,9,10\}$, $B = \{4,5,9\}$, $C = \{7,8,9,10\}$, $D = \{10,11,12,13,14\}$;

- a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$, б) $\overline{(A \cap D)} \cup \overline{(A \cap C)}$.
- 2.15. $A = \{0,1,3,4\}$, $B = \{1,3,4,5\}$, $C = \{3,4,6,7\}$, $D = \{1,3,5,9,10\}$;
 a) $(A \setminus B) \cap \overline{(D \setminus C)}$, б) $(\bar{A} \cup \bar{B}) \setminus (C \cap \bar{B})$.
- 2.16. $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4,5\}$, $C = \{4,6\}$, $D = \{1,9,10\}$;
 a) $(A \cup B) \cap (A \setminus C)$, б) $(\bar{A} \cup \bar{B}) \setminus (C \cap \bar{D})$.
- 2.17. $A = \{0,1,5\}$, $B = \{1,5,6,7\}$, $C = \{5,6\}$, $D = \{6,7,10,11\}$;
 a) $(A \div D) \cup (B \setminus D)$, б) $(\bar{A} \setminus \bar{B}) \setminus (\bar{C} \setminus \bar{D})$.
- 2.18. $A = \{11,12,13,14\}$, $B = \{12,13\}$, $C = \{13,14,15\}$, $D = \{10,11,12,15\}$;
 a) $(A \setminus B) \setminus (C \setminus \bar{B})$, б) $\overline{(A \div B) \cup (D \setminus C)}$.
- 2.19. $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,4\}$, $C = \{4,6\}$, $D = \{3,4,5,7\}$;
 a) $(A \setminus B) \cap C$, б) $\overline{(A \cup B) \cap (D \cup C)}$.
- 2.20. $A = \{5,6,7\}$, $B = \{5,6\}$, $C = \{4,5,6,10\}$, $D = \{1,2,3,4,10\}$;
 a) $A \cup (B \setminus C)$, б) $\overline{(A \cap D)} \cup \overline{(A \cap C)}$.
- 2.21. $A = \{3,5,7,9\}$, $B = \{5,7,9\}$, $C = \{1,2,3,5\}$, $D = \{1,2,3,4,10\}$;
 a) $A \setminus (B \div C)$, б) $\overline{(A \cap B) \cup D \cup C}$.
- 2.22. $A = \{7,8,9,10,11\}$, $B = \{9,10,11,17\}$, $C = \{8,9\}$, $D = \{10,11,18\}$;
 a) $(A \setminus B) \cap (C \div A)$, б) $(\bar{A} \cup \bar{B}) \setminus (C \cap \bar{D})$.
- 2.23. $A = \{1,5,9,10\}$, $B = \{4,5,9\}$, $C = \{7,8,9,10\}$, $D = \{10,11,12,13,14\}$;
 a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$, б) $\overline{(A \div B) \cup (D \setminus C)}$.
- 2.24. $A = \{0,1,3,4\}$, $B = \{1,3,4,5\}$, $C = \{3,4,6,7\}$, $D = \{1,3,5,9,10\}$;
 a) $(A \setminus B) \cap \overline{(D \setminus C)}$, б) $\overline{(A \setminus C)} \setminus B$.
- 2.25. $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4,5\}$, $C = \{4,6\}$, $D = \{1,9,10\}$;
 a) $(A \cup B) \cap (A \setminus C)$, б) $(\bar{A} \setminus \bar{B}) \setminus (\bar{C} \setminus \bar{D})$.

$$2.26. A = \{0,1,5\}, B = \{1,5,6,7\}, C = \{5,6\}, D = \{6,7,10,11\};$$

$$a) (A \div D) \cup (B \setminus D), \quad б) (\bar{A} \cup \bar{B}) \setminus (C \cap \bar{D}).$$

$$2.27. A = \{11,12,13,14\}, B = \{12,13\}, C = \{13,14,15\}, D = \{10,11,12,15\};$$

$$a) (A \setminus B) \div (C \setminus D), \quad б) \overline{(A \cap D) \cup (A \cap C)}.$$

$$2.28. A = \{1,9,10,11,12\}, B = \{9,10\}, C = \{11,12,15\}, D = \{10,11,13,15\};$$

$$a) (A \setminus B) \cap C, \quad б) \overline{(A \cap \bar{B}) \cup D \cup C}.$$

$$2.29. A = \{1,3,9,10\}, B = \{1,11\}, C = \{3,9,11\}, D = \{1,3,9,15\};$$

$$a) A \cup (B \setminus C), \quad б) \overline{(A \div B) \cup (D \setminus C)}.$$

$$2.30. A = \{8,9,10,13\}, B = \{7,9\}, C = \{8,9,13,15\}, D = \{10,11,13,15\};$$

$$a) A \setminus (B \div C), \quad б) \overline{(A \cup B) \cap (D \cup C)}.$$

Завдання 3. Довести тотожність множин: а) використовуючи відношення належності елемента множині; б) за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

$$3.1. A \cup B = (A \div B) \cup (A \cap B).$$

$$3.2. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$3.3. (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C).$$

$$3.4. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$3.5. A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C.$$

$$3.6. A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

$$3.7. A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}.$$

$$3.8. A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C).$$

$$3.9. (\bar{A} \cup B) = \overline{A \cap \bar{B}}.$$

$$3.10. (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C).$$

$$3.11. \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cap B.$$

$$3.12. A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

$$3.13. (A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C).$$

$$3.14. A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

$$3.15. A \setminus B = A \div (A \cap B).$$

$$3.16. \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

$$3.17. A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B);$$

$$3.18. A \cap B = (\bar{A} \cup B) \cap A.$$

$$3.19. A \cup B = (A \div B) \div (A \cap B).$$

$$3.20. A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A).$$

$$3.21. A \div (B \div C) = (A \div B) \div C.$$

$$3.22. (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

$$3.23. (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}).$$

$$3.24. A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

$$3.25. A \div (A \div B) = B.$$

$$3.26. A \cup B = (A \div B) \div (A \cap B).$$

$$3.27. A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

$$3.28. \overline{A \setminus (A \setminus B)} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

$$3.29. A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C).$$

$$3.30. \overline{A \cap B} = \overline{(\bar{A} \cup B) \cap A}.$$

Завдання 4. Для бінарного відношення R , заданого на множині A , потрібно: 1) записати всі можливі способи задання (списком, матричним, графічним); 2) знайти область визначення та область значень; 3) знайти обернене відношення R^{-1} і композицію $R \circ R^{-1}$; 4) встановити властивості відношення R і з'ясувати, чи є воно відношенням еквівалентності або часткового порядку.

$$4.1. A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \quad R = \{(a, b) \mid a^2 \leq 2b\}.$$

$$4.2. A = \{2, 3, 4, 6, 9\}, \quad R = \{(a, b) \mid a - \text{дільник } b\}.$$

- 4.3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $R = \{(a, b) \mid a + b \text{ кратне } 3\}$.
- 4.4. $A = \{3, 4, 5, 6, 8, 9\}$, $R = \{(a, b) \mid (a^2 - b) - \text{ділиться на } 2 \text{ без остачі}\}$.
- 4.5. $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$, $R = \{(a, b) \mid a \cdot b \text{ кратне } 3\}$.
- 4.6. $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $R = \{(a, b) \mid a + b \text{ кратне } 4\}$.
- 4.7. $A = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$, $R = \{(a, b) \mid 0 < 3a - 2b \leq 2\}$.
- 4.8. $A = \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$, $R = \{(a, b) \mid a + b \text{ кратне } a + 2\}$.
- 4.9. $A = \{2, 3, 6, 7, 8, 10\}$, $R = \{(a, b) \mid 2a + b \text{ кратне } 3\}$.
- 4.10. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$, $R = \{(a, b) \mid \sqrt{a+b} \leq 3\}$.
- 4.11. $A = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $R = \{(a, b) \mid a^2 > 2b\}$.
- 4.12. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $R = \{(a, b) \mid 3a < 2b\}$.
- 4.13. $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, $R = \{(a, b) \mid a \cdot b \text{ кратне } 4\}$.
- 4.14. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$, $R = \{(a, b) \mid (a^2 + b) - \text{ділиться на } 2 \text{ без остачі}\}$.
- 4.15. $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$, $R = \{(a, b) \mid 3a > 2b\}$.
- 4.16. $A = \{3, 4, 5, 7, 8, 10\}$, $R = \{(a, b) \mid a + b \text{ кратне } a - 1\}$.
- 4.17. $A = \{4, 5, 7, 8, 9, 10\}$, $R = \{(a, b) \mid a - b > 3\}$.
- 4.18. $A = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$, $R = \{(a, b) \mid (b^2 - a) \text{ ділиться на } 2 \text{ без остачі}\}$.
- 4.19. $A = \{1, 3, 4, 6, 8, 10\}$, $R = \{(a, b) \mid a \cdot b \text{ кратне } a + 3\}$.
- 4.20. $A = \{1, 3, 5, 6, 8, 9\}$, $R = \{(a, b) \mid a + b \text{ кратне } a + 1\}$.
- 4.21. $A = \{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$, $R = \{(a, b) \mid 0 < 2a - 3b \leq 2\}$.
- 4.22. $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$; $R = \{(a, b) \mid a + 2b \text{ кратне } 2\}$.
- 4.23. $A = \{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$, $R = \{(a, b) \mid 2a + b \text{ кратне } 4\}$.
- 4.24. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$, $R = \{(a, b) \mid \sqrt{a+b} > 3\}$.

4.25. $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 9\}$, $R = \{(a, b) \mid a^2 - b \text{ кратне } 3\}$.

4.26. $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$, $R = \{(a, b) \mid 3a - 2b > 2\}$.

4.27. $A = \{1, 3, 4, 6, 8, 10\}$, $R = \{(a, b) \mid a + b \text{ кратне } 5\}$.

4.28. $A = \{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$, $R = \{(a, b) \mid (b^2 + a) \text{ ділиться на } 2 \text{ без остачі}\}$.

4.29. $A = \{1, 3, 6, 7, 8, 9\}$, $R = \{(a, b) \mid a \cdot b \text{ кратне } a + 1\}$.

4.30. $A = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$, $R = \{(a, b) \mid (a^2 - b) \text{ ділиться на } 3 \text{ без остачі}\}$.

Завдання 5. Розв'язати задачі комбінаторики а) - в).

5.1. а) У фортепіанному гуртку навчаються 10 осіб, у гуртку художнього слова — 15, у вокальному гуртку — 12 і в фотогуртку — 20 осіб. Скількома способами можна утворити бригаду із чотирьох читців, трьох піаністів, п'яти співаків і одного фотографа?

б) Скільки чотиризначних чисел, що утворюються із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 містять цифру 3 (цифри в числах не повторюються)?

в) В розкладанні многочлена $(1 + 2x)^7$ знайти коефіцієнт при x^5 .

5.2. а) Двадцять вісім гральних кісток доміно розподілено між чотирма гравцями. Скільки може бути різних розподілів?

б) Із групи в 15 осіб треба виділити бригадира і 4 члени бригади. Скількома способами це можна зробити?

в) За допомогою бінома Ньютона обчислити 11^8 .

5.3. а) П'ять учнів треба розподілити у п'ять паралельних класів. Скількома способами це можна зробити?

б) Скільки тризначних чисел, що діляться на 3, можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо в кожному числі жодна із цифр не повторюється?

в) В розкладанні многочлена $(3x + 2y)^{10}$ знайти коефіцієнт при $x^6 y^4$.

5.4. а) Ліфт зупиняється на десяти поверхах. Скількома способами можуть розподілитися між цими зупинками 8 пасажирів, що знаходяться в

кабіні ліфта?

б) Із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 утворюються різні п'ятизначні числа, що не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, в яких одночасно є цифри 2, 4 і 5.

в) За допомогою бінома Ньютона обчислити 101^5 .

5.5. а) Скільки різних десятизначних чисел можна написати, використовуючи цифри 1 і 2?

б) У шаховому турнірі беруть участь 8 шахістів третього розряду, 6 - другого і 2 першорозрядники. Визначити кількість таких складів учасників першого туру, щоб шахісти однієї категорії зустрічалися між собою.

в) В розкладанні многочлена $(2x - 3y)^8$ знайти коефіцієнт при x^3y^5 .

5.6. а) Скільки різних двозначних чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4 за умови, що в кожному числі немає однакових цифр?

б) Семеро яблук і три апельсини треба покласти в два пакети так, щоб у кожному пакеті був хоча б один апельсин і щоб кількість фруктів у них була однаковою. Скількома способами це можна зробити?

в) За допомогою бінома Ньютона обчислити 29^6 .

5.7. а) 3 цифр 0, 1, 2, 3 складені різні чотиризначні числа так, що у кожному числі немає однакових цифр. Скільки таких чисел? Скільки серед них парних чисел?

б) Вісім авторів повинні написати книгу з шістнадцятьма главами. Скількома способами можна розподілити матеріал між авторами, якщо два автори напишуть по три глави, чотири — по дві і два — по одній главі книги?

в) В розкладанні многочлена $(3x + y)^{11}$ знайти коефіцієнт при x^4y^7 .

5.8. а) Скільки існує шестизначних чисел, усі цифри яких непарні (1, 3, 5, 7, 9)?

б) Знаки азбуки Морзе складаються із символів (крапок і тире). Скільки слів можна зобразити за умови, що кожне слово містить не більше п'яти

символів?

в) За допомогою бінома Ньютона обчислити 21^7 .

5.9. а) Скільки різних натуральних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, якщо в кожне число кожна дана цифра входить не більше одного разу?

б) Садівник повинен протягом трьох днів посадити 10 дерев. Скількома способами він може розподілити за днями свою роботу, якщо буде висаджувати не менше одного дерева за день?

в) В розкладанні многочлена $(x - 3y)^9$ знайти коефіцієнт при x^6y^3 .

5.10. а) Скільки різних двозначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, якщо цифри 0, 1, 2, входять у кожне число не більш одного разу, а цифра 3 — не більш двох разів?

б) Із вази, де стоять 10 червоних і 4 білі гвоздики, вибирають одну червону і дві білі квітки. Скількома способами це можна зробити?

в) За допомогою бінома Ньютона обчислити 49^6 .

5.11. а) Скільки різних п'ятизначних чисел, більших за 20000, можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, якщо цифри 2, 3, 4 входять у кожне число по одному разу, а цифра 1 — два рази?

б) Дванадцяти учням видано два варіанти контрольної роботи. Скількома способами можна розсадити учнів в два ряди, щоб у тих, що сидять поруч, не було однакових варіантів, а у тих, що сидять один за одним, був один і той самий варіант?

в) В розкладанні многочлена $(2x + 3)^8$ знайти коефіцієнт при x^6 .

5.12. а) Скільки різних п'ятизначних чисел без повторення цифр можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб парні цифри не стояли поруч?

б) Кожний з десяти радистів пункту А намагається встановити зв'язок з кожним із двадцяти радистів пункту В. Скільки можливо різних варіантів такого зв'язку?

в) За допомогою бінома Ньютона обчислити 31^7 .

5.13. а) Номер автомобільного причепа складається з двох букв і чотирьох цифр. Скільки різних номерів можна скласти, використовуючи 30 букв і 10 цифр?

б) Шість ящиків із різними матеріалами доставляються на вісім поверхів будови. Скількома способами можна розподілити матеріали по поверхах?

в) В розкладанні многочлена $(4x - 5)^6$ знайти коефіцієнт при x^4 .

5.14. а) Скількома способами можна вишикувати в одну шеренгу гравців двох футбольних команд, так щоб при цьому два футболісти однієї команди не стояли поруч?

б) На п'ять співробітників виділені три путівки. Скількома способами їх можна розподілити, якщо усі путівки різні?

в) За допомогою бінома Ньютона обчислити 19^{10} .

5.15. а) Ліфт, в якому знаходиться 9 пасажирів, може зупинятися на десяти поверхах. Пасажири виходять групами по два, три і чотири чоловіки. Скількома способами вони можуть вийти?

б) Скількома способами можна розташувати в ряд 5 білих і 4 чорних кулі так, щоб чорні кулі не лежали поруч? (кулі одного кольору не відрізняються одна від одної)

в) В розкладанні многочлена $(2x + 5)^{10}$ знайти коефіцієнт при x^6 .

5.16. а) У шаховій зустрічі беруть участь дві команди, по 8 чоловік у кожній. Кожного з учасників і колір його фігур визначають жеребкуванням. Яке число різних результатів жеребкування?

б) На п'ять співробітників виділені три путівки. Скількома способами їх можна розподілити, якщо усі путівки однакові?

в) За допомогою бінома Ньютона обчислити 61^5 .

5.17. а) Скількома способами можна розташувати в ряд 5 білих і 4 чорних кулі так, щоб чорні кулі не лежали поруч? (усі кулі різні).

б) На першій із двох паралельних прямих лежить 10 точок, на другій — 20. Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?

в) В розкладанні многочлена $(x + 2y^2)^{11}$ знайти коефіцієнт при $x^5 y^{12}$.

5.18. а) Чотири автори повинні написати книгу з 17 глав, причому перший і третій повинні написати по 5 глав, другий — 4, а четвертий 3 глави книги. Скількома способами можна розподілити глави між авторами?

б) Скільки слів можна одержати, переставляючи букви слова «метаморфоза»?

в) За допомогою бінома Ньютона обчислити 39^7 .

5.19. а) У класі 30 учнів. Скількома способами можна виділити двох для чергування, якщо: а) один з них повинний бути старшим; б) старшого бути не повинно?

б) У першому колі чемпіонату з футболу було зіграно 153 матчі. Скільки команд брало участь у змаганнях?

в) В розкладанні многочлена $(2x^2 - y)^{13}$ знайти коефіцієнт при $x^{16} y^5$.

5.20. а) У взводі 3 сержанти і 30 солдатів. Скількома способами можна виділити одного сержанта і трьох солдатів для патрулювання?

б) Скількома способами можна скласти розклад занять на понеділок, якщо в цей день повинно бути п'ять занять: з алгебри, геометрії, історії, географії і літератури, причому алгебра і геометрія не повинні слідувати безпосередньо одна за одною?

в) За допомогою бінома Ньютона обчислити 41^8 .

5.21. а) Скільки різних перестановок можна утворити з букв слова “абракадабра”?

б) Хокейна команда складається з 2 воротарів, 7 захисників і 10 нападаючих. Скількома способами тренер може утворити стартову шістку, що складається з воротаря, двох захисників і трьох нападаючих?

в) В розкладанні многочлена $(x + 3y^2)^9$ знайти коефіцієнт при $x^4 y^{10}$.

5.22. а) На конференції повинні виступити доповідачі A , B , C та D , причому B не може виступати раніше за A . Скількома способами можна скласти черговість виступів?

б) Скільки дільників має число 462?

в) За допомогою бінома Ньютона обчислити 29^9 .

5.23. а) На полиці розташовано 10 книг з твердими палітурками і 7 книг - з м'якими палітурками, причому всі книги різні. Скількома способами можна розставити книги так, щоб книги з твердими палітурками стояли поруч?

б) Скількома способами можна упакувати 9 різних книг у 5 бандеролей, якщо 4 бандеролі повинні містити по 2 книги?

в) В розкладанні многочлена $(x - 3y^2)^7$ знайти коефіцієнт при $x^4 y^6$.

5.24. а) Скількома способами 12 однакових монет можна розкласти до п'яти різних гаманців так, щоб жоден гаманець не залишився порожнім?

б) Збори, на яких присутні 25 осіб, у тому числі дві жінки, вибирають чотирьох представників для роботи на виборчій дільниці. Скільки може бути випадків, коли в число обраних ввійдуть обидві жінки?

в) За допомогою бінома Ньютона обчислити 51^6 .

5.25. а) Потрібно розподілити викладання в шести групах студентів між трьома викладачами. Скількома способами можна зробити цей розподіл, якщо кожний повинний одержати дві групи?

б) Розігрується лотерея: в урні 100 квитків, серед яких 5 виграшних. Перший, хто підійшов до урни, дістає з неї 5 квитків. Скільки існує способів, щоб 3 з них виявилися виграшними?

в) В розкладанні многочлена $(4x^2 + y)^{12}$ знайти коефіцієнт при $x^8 y^8$.

5.26. а) Група із 16 туристів розділилися на дві рівні підгрупи для розшуку товариша, який заблукав. Серед них є лише 4 особи, знайомих з місцевістю. Скількома способами вони можуть розділитися так, щоб до кожної групи

ввійшло двоє, знайомих з місцевістю?

б) На ремонт дитячого будинку будівельна організація виділила бригаду з 5 осіб. До складу будівельної організації входить 25 чоловік, у тому числі 5 малярів, 4 теслі і 2 штукатури. Скількома способами можна набрати бригаду, щоб до неї ввійшли робітники всіх цих спеціальностей по одному?

в) За допомогою бінома Ньютона обчислити 59^5 .

5.27. а) Скількома способами можна розмістити 12 різних деталей у трьох ящиках?

б) Дев'ять з десяти карт, серед яких є чирвовий туз, роздаються трьом гравцям так, що перший одержує 3, другий 4, а третій 2 карти. Скільки існує способів роздачі карт, при яких чирвовий туз попадає до третього гравця?

в) В розкладанні многочлена $(x - 4y^2)^9$ знайти коефіцієнт при $x^6 y^6$.

5.28. а) Скільки слів можна одержати, переставляючи літери слова «автоматика»?

б) В англійців прийнято давати дітям декілька імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо їй дають не більше трьох імен, а загальна кількість імен дорівнює 300 (два способи, які відрізняються лише порядком імен, вважаються різними).

в) За допомогою бінома Ньютона обчислити 21^9 .

5.29. а) Скількома способами можна розставити 8 нулів та 10 одиниць таким чином, щоб ніякі дві одиниці не стояли поруч?

б) В семестрі вивчається 8 дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на суботу, якщо в цей день тижня повинно бути 3 різні пари?

в) В розкладанні многочлена $(x^3 + 2y^2)^8$ знайти коефіцієнт при $x^9 y^{10}$.

5.30. а) Є четверо чоловіків і шість жінок. Кожен чоловік одружується з однією з жінок. Скільки існує можливих варіантів подружніх пар?

б) В коробці лежить три синіх кульки, три червоних і чотири зелених.

Послідовно одна за одною забрали вісім кульок. Скільки існує можливих варіантів вибору кульок?

в) За допомогою бінома Ньютона обчислити 19^7 .

Модуль №2 „Алгебраїчні системи, булеві алгебри”

Тема 4. Булева алгебра.

Для зображення інформації в комп'ютерах використовується двійкова система числення. Таким чином, всі операції, які виконує комп'ютер, проводяться на множині $\{0,1\}$. Ці перетворення зручно формально зображати за допомогою апарату двійкової логіки, який був розроблений англійським математиком Джорджем Булем у середині XIX століття. Ця алгебраїчна структура є алгеброю і називається булевою. Алгебра, як розділ математики, вивчає властивості множин, на яких визначена система операцій і відношень. Алгебраїчними методами користуються в різних прикладних застосуваннях, наприклад, в теорії автоматів. Булева алгебра використовується при розв'язанні різних задач обробки інформації, при роботі з базами даних, в логічному програмуванні, при проектуванні інтелектуальних систем, для конструювання та аналізу роботи комп'ютерів та інших електронних пристроїв.

Означення. Алгебраїчною системою (або алгеброю) називається система (A, Σ) , яка складається з деякої непустої множини A (основна множина алгебри або носій алгебри) і множини операцій Σ , визначених на A (сигнатура алгебри). Прикладами алгебраїчних систем є: $(Z, +)$, $(R; +, -, \times)$, де Z – множина всіх цілих чисел, R – множина всіх дійсних чисел.

Висловлюванням називають розповідне речення, про яке в даній ситуації можна сказати, що воно або *істинне*, або *хибне*, але не одне й інше водночас.

Наведемо приклади висловлювань.

1. Київ – столиця України.
2. Сніг зелений.

Перше висловлювання є істинне, а друге – хибне.

Поставимо у відповідність висловлюванню P логічну змінну x , яка набуває значення 1, якщо висловлювання P істинне, і 0, якщо P хибне.

Із кількох висловлювань можна утворити різні нові висловлювання. При цьому початкові висловлювання називають *простими*, а утворені – *складними*. Відповідно із логічних змінних можна складати різні конструкції, які утворюють формули алгебри логіки. Прості висловлювання можна розглядати як деякі змінні, які набувають свої значення із множини $B = \{0,1\}$. Такі змінні називають булевими змінними в честь англійського математика Джоржа Буля. Самі значення 0 і 1 булевих змінних називають *булевими константами*. З простих висловлювань можливо створити більш складні висловлювання за допомогою речових зв'язок: «і», «або», «не», «якщо ..., тоді». Для цих зв'язок введемо відповідні позначення: \wedge – кон'юнкція, \vee – диз'юнкція, \neg – заперечення, \rightarrow – імплікація.

Алгебра логіки – це алгебра, утворена множиною $B = \{0,1\}$ разом із всіма можливими операціями на ній. Алгебра логіки вивчає будову складних логічних висловлювань (логічних формул) і способи встановлення їх істинності за допомогою алгебраїчних методів.

Функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від n змінних, аргументи і значення якої належать множині $B = \{0, 1\}$, називають n -мірною булевою функцією. Іншими словами, булева функція розглядається як відображення

$$f : B^n \rightarrow B.$$

Множину всіх булевих функцій позначають P_2 , а множину всіх булевих функцій від n змінних – $P_2(n)$.

Область визначення функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – множина B^n усіх можливих двійкових наборів довжиною n . Очевидно, існує 2^n різних наборів із n булевих змінних: $|B^n| = 2^n$.

Кількість різних булевих функцій від n змінних дорівнює 2^{2^n} , тобто

$$|P_2(n)| = 2^{2^n}.$$

Змінну x_i функції $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ називають *неістотною* або *фіктивною*, якщо

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

при будь-яких значеннях решти змінних. Це означає, що зміна значення x_i у будь-якому наборі значень аргументів x_1, x_2, \dots, x_n не змінює значення функції. Тому функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ фактично залежить від $(n-1)$ змінної, тобто являє собою функцію $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. В такому разі кажуть, що функцію g отримано з функції f вилученням фіктивної змінної, а функцію f отримано з g введенням фіктивної змінної. Функції f і g називають *рівними*, якщо функцію g можна одержати з f введенням або вилученням фіктивних змінних.

Булеві функції можна задавати наступними способами:

- 1) за допомогою *таблиці істинності*;
- 2) порядковим номером, який має ця функція;
- 3) аналітично у вигляді формули;
- 4) графічно;
- 5) вектором значень функції.

Скінченність області визначення булевих функцій дає змогу задавати такі функції за допомогою таблиць. Розглядатимемо двійкові набори значень змінних функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ як записи цілих чисел у двійковій системі числення. Це означає, що набір (a_1, a_2, \dots, a_n) ототожнюється із записом числа

$$a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n.$$

Прийmemo це число за номер набору (a_1, a_2, \dots, a_n) . Наприклад, для чотиримісної булевої функції номером набору 1011 буде число

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 8 + 2 + 1 = 11.$$

Номери наборів значень змінних n -місної булевої функції змінюються від 0 до $2^n - 1$. Розмістимо набори в стовпчик за зростанням їх номерів і запишемо

відповідні значення функції на кожному з них. Одержимо *таблицю істинності* булевої функції (табл.1).

Таблиця 1

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	...	0	0	$f(0, 0, \dots, 0, 0)$
0	0	...	0	1	$f(0, 0, \dots, 0, 1)$
0	0	...	1	0	$f(0, 0, \dots, 1, 0)$
	
1	1	...	1	1	$f(1, 1, \dots, 1, 1)$

Надалі завжди будемо вважати, що набори значень булевих функцій розміщено за зростанням їх номерів. Тоді кожній функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна привласнити порядковий номер – натуральне число, двійковий код якого відповідає стовпчику значень функції у таблиці істинності. Молодшим розрядом вважається самий нижчий рядок (на інтерпретації $(1, 1, \dots, 1, 1)$), а старшим – самий верхній (на інтерпретації $(0, 0, \dots, 0, 0)$). Вказаний порядковий номер, як двійковий, так і десятковий, повністю визначає булеву функцію.

Приклад 31. Знайти порядковий номер функції $f(x_1, x_2) = (1010)$, заданої вектором своїх значень.

Розв'язання. Цій функції відповідає двійковий код 1010, утворений значеннями функції на її наборах. Переведемо двійкове число 1010 у десяткове:

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 8 + 2 = 10.$$

Отже, маємо булеву функцію $f_{10}(x_1, x_2)$.

Зі зростанням кількості змінних швидко збільшується кількість залежних від них булевих функцій. Наприклад, згідно із формулою існує $2^2 = 4$ різних булевих функцій однієї змінної. Множина всіх логічних функцій однієї змінної

$P_2(1)$ (унарних операцій) представлена таблицями істинності (табл. 2).

Таблиця 2

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Кожна з функцій має такі назви:

$\varphi_0(x) = 0$ – константа 0;

$\varphi_1(x) = x$ – повторення аргументу;

$\varphi_2(x) = \bar{x}$ – інверсія (заперечення) аргументу;

$\varphi_3(x) = 1$ – константа 1.

Число булевих функцій двох змінних $|P_2(2)| = 2^{2^2} = 16$; вони представлені таблицями істинності. Маємо такі функції:

$f_0(x_1, x_2) = 0$ – константа 0;

$f_1(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$ – кон'юнкція;

$f_2(x_1, x_2) = x_1 \leftarrow x_2$ – заперечення імплікації (x_1 і не x_2);

$f_3(x_1, x_2) = x_1$ – повторення першого аргументу;

$f_4(x_1, x_2) = x_2 \leftarrow x_1$ – заперечення оберненої імплікації (не x_1 і x_2);

$f_5(x_1, x_2) = x_2$ – повторення другого аргументу;

$f_6(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ – додавання за модулем 2;

$f_7(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ – диз'юнкція;

$f_8(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ – стрілка Пірса (заперечення диз'юнкції);

$f_9(x_1, x_2) = x_1 \square x_2$ – еквівалентність;

$f_{10}(x_1, x_2) = \bar{x}_2$ – заперечення другого аргументу;

$f_{11}(x_1, x_2) = x_2 \rightarrow x_1$ – обернена імплікація;

$f_{12}(x_1, x_2) = \bar{x}_1$ – заперечення першого аргументу;

$f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$ – імплікація;

$f_{14}(x_1, x_2) = x_1 | x_2$ – штрих Шеффера (заперечення кон'юнкції);

$f_{15}(x_1, x_2) = 1$ – константа 1.

Наведемо таблиці істинності (табл. 3) операцій: \vee – диз'юнкції, \wedge – кон'юнкції, \rightarrow – імплікації, \leftrightarrow – еквівалентності, \oplus – додавання за модулем 2, $|$ – штриха Шеффера, \downarrow – стрілки Пірса.

Таблиця 3

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Основні властивості булевих операцій:

1. а) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

1. б) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

2. а) $x \wedge y = x \wedge y$.

2. б) $x \vee y = x \vee y$.

3. а) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

3. б) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

4. а) $x \wedge x = x$.

4. б) $x \vee x = x$

5. а) $x \wedge 1 = x$.

5. б) $x \wedge 0 = 0$.

6. а) $x \vee 1 = 1$.

6. б) $x \vee 0 = x$.

7. а) $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

7. б) $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$.

8. а) $x \wedge \bar{x} = 0$.

8. б) $x \wedge \bar{x} = 1$.

При спрощенні формул користуються такими еквівалентними співвідношеннями:

1. $x \vee (x \wedge y) = x$.

2. $x \wedge (x \vee y) = x$.

3. $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x$.

4. $(x \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y) = (x \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z})$.

$$5. x \vee (\bar{x} \wedge y) = x \vee y.$$

$$6. x \rightarrow y = \bar{x} \vee y.$$

$$7. x \oplus y = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y).$$

$$8. x \leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}).$$

$$9. x \leftrightarrow y = \overline{x \oplus y}.$$

Булеві функція однієї і двох змінних називають *елементарними*. Дві булеві функції називаються *рівними*, якщо їхні таблиці істинності однакові.

Зі збільшенням кількості змінних таблиці для булевих функцій стають громіздкими, і ними незручно користуватись, наприклад, $|P_2(3)| = 2^{2^3} = 256$, а $|P_2(4)| = 2^{2^4} = 65536$.

Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна представити у вигляді досконалої диз'юнктивної нормальної форми (ДДНФ) або досконалої кон'юнктивної нормальної форми (ДКНФ). Це можна зробити або шляхом еквівалентних перетворень, або одержати із таблиці істинності функції.

Алгоритм переходу від таблиці істинності до ДДНФ:

1) в таблиці виділяються набори значень змінних x_1, x_2, \dots, x_n , на яких значення функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дорівнює одиниці;

2) для кожного відзначеного набору виписуються кон'юнкції всіх змінних: над тими змінними, які на цьому наборі дорівнюють 0, ставляться заперечення;

3) всі отримані кон'юнкції з'єднуються операцією диз'юнкції.

Алгоритм переходу від таблиці істинності до ДКНФ:

1) в таблиці виділяються набори значень змінних x_1, x_2, \dots, x_n , на яких значення функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дорівнює нулю;

2) для кожного відзначеного набору виписуються диз'юнкції всіх змінних: над тими змінними, які на цьому наборі дорівнюють 1, ставляться заперечення;

3) всі отримані диз'юнкції з'єднуються операцією кон'юнкції.

Таблиця 4

x	y	z	$y \oplus z$	$x \oplus (y \oplus z)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

Приклад 32. Перевірити еквівалентність формул $A = x \oplus (y \oplus z)$ та

$$B = \overline{x} \leftrightarrow (\overline{y\bar{z}} \vee yz):$$

- а) за допомогою таблиць істинності;
- б) за допомогою еквівалентних перетворень;
- в) знати ДДНФ і ДКНФ формули В.

Таблиця 5

x	y	z	\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}	yz	$\overline{y\bar{z}}$	$\overline{y\bar{z}} \vee yz$	$\bar{x} \leftrightarrow (\overline{y\bar{z}} \vee yz)$	B
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1

Розв'язання. а) Складемо таблиці істинності формули A (табл. 4) та формули B (табл. 5).

Порівнюючи таблиці істинності формул A та B , робимо висновок, що ці формули еквівалентні.

$$\begin{aligned} \text{б) } A &= x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (y\bar{z} \vee \bar{y}z) = x(\overline{y\bar{z} \vee \bar{y}z}) \vee \bar{x}(y\bar{z} \vee \bar{y}z) = \\ &= x(\bar{y} \vee z)(y \vee \bar{z}) \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z = x\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \overline{\bar{x} \leftrightarrow (\bar{y}\bar{z} \vee yz)} = \overline{\bar{x}(\bar{y}\bar{z} \vee yz) \vee x(\bar{y}\bar{z} \vee yz)} = \overline{x(y \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z} = \\ &= \overline{xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z} = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}). \end{aligned}$$

Зауважимо, що ми отримали ДКНФ для формули B . Продовжимо далі перетворення.

$$\begin{aligned} B &= (\bar{x} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z \vee yz)(x \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee xy \vee yz \vee xz \vee \bar{y}z) = \\ &= (\bar{x} \vee \bar{y}\bar{z} \vee yz)(x \vee yz \vee \bar{y}z) = \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee yz = \\ &= \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee xyz \vee \bar{x}yz = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz. \end{aligned}$$

Ми отримали ДДНФ формули B . Порівнюючи результати перетворень для формул A і B , бачимо що вони еквівалентні.

в) У пункті б) отримали ДКНФ формули B :

$$B = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \text{ та ДДНФ формули } B:$$

$$B = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz.$$

ДДНФ та ДКНФ функції B можна одержати *другим способом*: за таблицею істинності (табл. 5).

Будуємо ДДНФ. Згідно з алгоритмом, в таблиці 5 виділяємо рядки 2, 3, 5 та 8, де $B \equiv f(x, y, z) = 1$. Відповідними наборами змінних є: $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ і $(1, 1, 1)$. За кожним із цих наборів записуємо кон'юнкції: $\bar{x}y\bar{z}$, $\bar{x}\bar{y}z$, $x\bar{y}\bar{z}$, xyz .

Отже, ДДНФ даної функції має вигляд $B = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz$.

Знаходимо тепер ДКНФ. Згідно з алгоритмом, в таблиці 5 виділяємо рядки 1, 4, 6 та 7, де $B \equiv f(x, y, z) = 0$. Відповідними наборами змінних є: $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ і $(1, 1, 0)$. За кожним із цих наборів записуємо диз'юнкції:

$x \vee y \vee z, x \vee \bar{y} \vee \bar{z}, \bar{x} \vee y \vee \bar{z}, \bar{x} \vee \bar{y} \vee z$. З'єднуючи їх операцією кон'юнкції], приходимо до ДКНФ даної функції:

$$B = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

Приклад 33. Шляхом елементарних перетворень звести формулу $x \leftrightarrow ((z|y) \rightarrow x)$ до ДДНФ. Методом Квайна знайти скорочену ДНФ і за допомогою імплікантної таблиці знайти мінімальну ДНФ.

Розв'язання. 1) Зводимо до ДДНФ:

$$\begin{aligned} x \leftrightarrow ((z|y) \rightarrow x) &= x \leftrightarrow (\bar{z}y \rightarrow x) = x \leftrightarrow (\bar{z}y \vee x) = \\ &= x \leftrightarrow (zy \vee x) = \bar{x}(\overline{yz \vee x}) \vee x(yz \vee x) = \bar{x}(\bar{y} \vee \bar{z})\bar{x} \vee xyz \vee x = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee xyz \vee x = \\ &= \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee xy \vee x\bar{y} = \\ &= \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} = \\ &= \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} = A. \text{ Отримано ДДНФ.} \end{aligned}$$

2) Шукаємо скорочену ДНФ:

$$\begin{aligned} A &= \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y} \vee \\ &\vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \vee y\bar{z} \vee xy \vee xz \vee x\bar{y} \vee \bar{y} \vee \bar{z} = xy \vee xz \vee \bar{y} \vee \bar{z}. \text{ Маємо скорочену} \\ &\text{ДНФ.} \end{aligned}$$

в) Будуємо імплікантну таблицю(табл. 6)

Таблиця 6

	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$	xyz	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}z$	$x\bar{y}\bar{z}$
xy				*	*		
xz				*		*	
\bar{y}	[*]	*				*	*
\bar{z}		*	[*]		*		*

Бачимо, що $\bar{y} \vee \bar{z}$ є ядром мінімальної ДНФ, маємо один стовпець, який містить конститuentу xyz , яка не покривається ядром.

Щоб покрити конституенту $x\bar{y}z$, достатньо взяти імпліканту xy або xz .

Отже, маємо дві мінімальні форми $xy \vee \bar{y} \vee \bar{z}$ і $xz \vee \bar{y} \vee \bar{z}$.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

4.1. Побудувати таблиці істинності функцій, перевірити, чи еквівалентні формули ν та σ :

- 1) $\nu = (x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow \bar{z}) \rightarrow x \cdot y), \quad \sigma = \overline{y \& z \rightarrow x};$
- 2) $\nu = (x \vee \bar{y}) \downarrow (\bar{x} \rightarrow (y \rightarrow \bar{z})), \quad \sigma = \overline{y \rightarrow (x \vee z)}$
- 3) $\nu = x \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow y \cdot z), \quad \sigma = (x \vee (y \rightarrow z)) \cdot (x \oplus y);$
- 4) $\nu = \overline{(x \downarrow y) \vee (x \sim z)} | (x \oplus y \cdot z), \quad \sigma = \bar{x} \cdot (y \cdot z) \vee \overline{x \rightarrow z};$
- 5) $\nu = ((x \vee y) \cdot \bar{z} \rightarrow ((x \sim \bar{z}) \oplus \bar{y})) \cdot ((x \oplus y) \cdot \bar{z}), \quad \sigma = (x \rightarrow y \& z) \& \overline{x \rightarrow y};$
- 6) $\nu = (\bar{x} \vee y) \rightarrow ((y | \bar{z}) \rightarrow (x \sim x \cdot z)), \quad \sigma = xy \vee \overline{(x \rightarrow x\bar{y} \rightarrow z)};$
- 7) $\nu = (x | \bar{y}) \rightarrow ((y \downarrow \bar{z}) \rightarrow (x \oplus z)), \quad \sigma = x \cdot (y \cdot z) \oplus (\bar{x} \rightarrow z);$
- 8) $\nu = (((x | y) \downarrow \bar{z}) | y) \downarrow (\bar{y} \rightarrow z),$

$$\sigma = ((x | y) \downarrow (y | \bar{z})) \cdot (x \rightarrow (y \rightarrow z));$$

- 9) $\nu = (x \cdot y \rightarrow z) \vee ((x \downarrow y) | z),$
 $\sigma = ((x \rightarrow y \cdot z) \oplus (x \sim y)) \vee (y \rightarrow x \cdot z).$

4.2. Побудувати таблиці істинності функцій та переконайтесь в справедливості наступних еквівалентностей:

- 1) $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y;$
- 2) $x \sim y = (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x);$
- 3) $x \downarrow y = ((x | x) | (y | y)) | ((x | x) | (y | y));$
- 4) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z);$
- 5) $x \& (y \sim z) = ((x \& y) \sim (x \& z)) \sim x;$
- 6) $x \rightarrow (y \sim z) = (x \rightarrow y) \sim (x \rightarrow z);$
- 7) $x \vee (y \rightarrow z) = (x \vee y) \rightarrow (x \vee z);$

$$8) \quad x \& (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \& z);$$

$$9) \quad x \rightarrow (y \vee z) = (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z).$$

4.3. За допомогою еквівалентних перетворень покажіть еквівалентність формул V та U :

$$1) \quad V = (\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (\bar{x} \cdot y \sim (x \oplus y)), \quad U = (\overline{x \cdot y} \rightarrow x) \rightarrow y;$$

$$2) \quad V = (x \cdot y \vee (\bar{x} \rightarrow y \cdot z)) \sim ((\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \rightarrow z), \quad U = (x \rightarrow y) \oplus (y \oplus z);$$

$$3) \quad V = (x \oplus y \cdot z) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow (y \rightarrow z)), \quad U = x \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow x);$$

$$4) \quad V = (\bar{x} \vee \bar{y} \cdot z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow ((y \vee z) \rightarrow \bar{x})),$$

$$U = (x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x});$$

$$5) \quad V = (x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot z) \oplus ((y \rightarrow z) \rightarrow \bar{x} \cdot y), \quad U = (x \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z}) \oplus y) \oplus z;$$

$$6) \quad V = x \rightarrow ((\bar{x} \cdot \bar{y} \rightarrow (\bar{x} \cdot \bar{z} \rightarrow y)) \rightarrow y) \cdot z, \quad U = \overline{x \cdot (y \rightarrow \bar{z})};$$

$$7) \quad V = \overline{(x \sim y) \rightarrow (x \rightarrow \bar{z})} \vee (x \oplus \bar{y} \cdot z), \quad U = x \sim (z \rightarrow y).$$

4.4. Знайдіть всі фіктивні змінні в заданих функція f :

$$1) f(\tilde{x}^3) = (10101010);$$

$$2) f(\tilde{x}^3) = (01100110);$$

$$3) f(\tilde{x}^3) = (11110011);$$

$$4) f(\tilde{x}^4) = (1011010110 \ 110101);$$

$$5) f(\tilde{x}^4) = (0101111101 \ 011111);$$

$$6) f(\tilde{x}^4) = (1100110000 \ 110011).$$

4.5. Побудуйте таблицю істинності функцій:

$$1) (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z);$$

$$2) (x \rightarrow y) \& (x \rightarrow z);$$

$$3) (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z);$$

$$4) ((x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_3) \cdot \overline{x_3 \rightarrow x_2}.$$

4.6. Побудуйте таблицю істинності функцій та перевірте еквівалентність наступних функцій:

$$1) V = (\overline{x \vee \bar{y} \cdot \bar{z}}) \cdot (\bar{x} \rightarrow \bar{y} \cdot z) \cdot (x \rightarrow (y \sim z)), \quad U = ((x \rightarrow y) \sim (y \rightarrow (x \rightarrow z))) \oplus x \cdot (y \cdot z);$$

$$2) V = (\overline{(x \vee y) \rightarrow y \cdot z} \vee \overline{(y \rightarrow x \cdot z)} \vee (x \rightarrow (\bar{y} \rightarrow z))), \quad U = (x \rightarrow y) \vee z;$$

$$3) V = (\bar{x} \rightarrow (\bar{y} \rightarrow (x \sim z))) \cdot (x \sim (y \rightarrow (z \vee (x \rightarrow y))))), \quad U = (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow x.$$

4.7. Покажіть, що x_1 – фіктивна змінна:

$$1) f(\tilde{x}^2) = (x_2 \rightarrow x_1) \cdot (x_2 \downarrow x_2);$$

$$2) f(\tilde{x}^2) = (x_1 \sim x_2) \vee (x_1 | x_2);$$

$$3) f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_3) \cdot \overline{x_3 \rightarrow x_2};$$

$$4) f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2) \rightarrow (x_1 \sim x_3)) \cdot x_1 \rightarrow (x_2 \vee x_3);$$

$$5) f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2 \cdot \bar{x}_3) \sim (\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2 \cdot x_3)) \cdot (x_2 \downarrow x_3);$$

$$6) f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \rightarrow (x_1 \cdot x_2 | x_3)) \oplus (x_2 \rightarrow x_1) \cdot x_3;$$

$$7) f(\tilde{x}^4) = ((x_1 | x_2) \downarrow ((x_1 \downarrow x_4) | (x_3 \downarrow x_4))) | ((x_1 | x_3) | x_2).$$

4.8. Знайдіть ДДНФ наступних функцій:

$$1) f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) \rightarrow x_3;$$

$$2) f(\tilde{x}^3) = (x_1 \rightarrow x_2) \oplus (x_1 | x_2 x_3);$$

$$3) f(\tilde{x}^3) = (01010001);$$

$$4) f(\tilde{x}^3) = (01111000);$$

$$5) f(\tilde{x}^3) = (10001111);$$

$$6) f(\tilde{x}^4) = (x_1 \rightarrow x_2 x_3 x_4) \cdot (x_3 \rightarrow x_1 \bar{x}_2);$$

$$7) f(\tilde{x}^4) = (x_1 \oplus x_2) \cdot (x_3 \rightarrow \bar{x}_2 x_4);$$

$$8) f(\tilde{x}^4) = (0100100011 000010);$$

$$9) f(\tilde{x}^4) = (1000011100 110001);$$

$$10) f(\tilde{x}^4) = (1100100010 010011).$$

4.9. Знайдіть ДКНФ таких функцій:

$$1) f(\tilde{x}^2) = (x_1 \oplus x_2);$$

$$2) f(\tilde{x}^2) = x_1 \downarrow x_2;$$

$$3) f(\tilde{x}^3) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3;$$

$$4) f(\tilde{x}^3) = x_1 x_2 \oplus x_3;$$

$$5) f(\tilde{x}^3) = (01011101);$$

$$6) f(\tilde{x}^3) = (00101110);$$

$$7) f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3;$$

$$8) f(\tilde{x}^4) = x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3 x_4);$$

$$9) f(\tilde{x}^4) = (0101111101 \ 110011);$$

$$10) f(\tilde{x}^4) = (0110111011 \ 100101).$$

4.10. За допомогою еквівалентних перетворень побудувати ДНФ функцій

$$f(\tilde{x}^n):$$

$$1) f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_1 x_2 \vee x_3);$$

$$2) f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 x_2 \oplus x_3) \cdot (x_1 x_3 \rightarrow x_2);$$

$$3) f(\tilde{x}^3) = (x_1 \sim x_2) \vee (x_1 x_3 \oplus (x_2 \rightarrow x_3));$$

$$4) f(\tilde{x}^3) = (x_1 \downarrow x_2 x_3) | ((\bar{x}_1 | x_2) \downarrow x_3);$$

$$5) f(\tilde{x}^3) = \overline{x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)} \oplus (x_1 | (x_2 \oplus x_3));$$

$$6) f(\tilde{x}^3) = \overline{x_1 \bar{x}_2 \vee x_3} \sim (x_1 \rightarrow x_2 \bar{x}_3);$$

$$7) f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \bar{x}_3) \cdot (x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \cdot \overline{(x_1 x_2 \vee x_3)}.$$

4.11. За допомогою еквівалентних перетворень побудувати КНФ

функцій

$$f(\tilde{x}^n):$$

$$1) f(\tilde{x}^2) = ((x_1 \rightarrow x_2) \oplus (\bar{x}_1 | x_2)) \cdot (x_1 \sim x_2 \cdot (x_1 \rightarrow x_2));$$

$$2) f(\tilde{x}^2) = \overline{x_1 x_2} \vee (x_1 \downarrow (x_2 \vee (\overline{x_1} \rightarrow x_2)));$$

$$3) f(\tilde{x}^3) = x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_2} x_3 \vee (x_1 \rightarrow x_2 x_3);$$

$$4) f(\tilde{x}^3) = (\overline{x_1} \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \oplus x_1 \overline{x_2} x_3;$$

$$5) f(\tilde{x}^3) = (x_1 \sim (x_2 \rightarrow x_3)) \vee (x_2 \rightarrow x_1 x_3);$$

$$6) f(\tilde{x}^4) = \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_4};$$

$$7) f(\tilde{x}^4) = (x_1 \sim x_2) \vee (x_1 x_3 \sim x_4) \vee x_2 \overline{x_3}.$$

4.12. За допомогою еквівалентних перетворень побудувати ДНФ функцій

$$f(\tilde{x}^n):$$

$$1) f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \overline{x_3} \overline{x_4}) ((\overline{x_1} \vee x_4) \oplus x_2 x_3) \vee \overline{x_2} \cdot (x_3 \vee \overline{x_1 \overline{x_4}});$$

$$2) f(\tilde{x}^4) = (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow \overline{x_3}) \cdot (x_3 \rightarrow x_1 \overline{x_4});$$

$$3) f(\tilde{x}^4) = (x_1 \downarrow x_2) \cdot ((x_2 | x_3) \vee x_1 \overline{x_4}) \cdot (x_1 \downarrow (x_3 | x_4)).$$

4.13. Використовуючи перетворення виду $A = A \cdot \overline{x} \vee A \cdot x$ та $A \vee A = A$, побудувати по заданій ДНФ функції $f(\tilde{x}^n)$ її ДДНФ:

$$1) f(\tilde{x}^3) = x_1 x_2 \vee \overline{x_3};$$

$$2) f(\tilde{x}^3) = \overline{x_1} \overline{x_2} \vee x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3};$$

$$3) f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_2} \overline{x_3};$$

$$4) f(\tilde{x}^3) = x_1 \overline{x_2} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_3};$$

$$5) f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_3;$$

$$6) f(\tilde{x}^4) = x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_3 \overline{x_4}.$$

4.14. По заданій КНФ функції $f(\tilde{x}^n)$ побудувати її ДКНФ:

$$1) f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \overline{x_2}) \cdot x_3;$$

$$2) f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x_2} \vee x_3) \cdot \overline{x_3};$$

$$3) f(\tilde{x}^3) = (\overline{x_1} \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \overline{x_3}) \cdot (x_2 \vee x_3);$$

$$4) f(\tilde{x}^3) = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot (\bar{x}_1 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_3);$$

$$5) f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \cdot x_2 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee x_3);$$

$$6) f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4);$$

$$7) f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2) \cdot (\bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_3 \vee x_4);$$

$$8) f(\tilde{x}^4) = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4).$$

4.15. Використовуючи дистрибутивний закон $x(y \vee z) = xy \vee xz$ та еквівалентності $x \cdot x = x$, $x \cdot \bar{x} = 0$, $A \cdot O = O$, $A \vee O = A$ і $A \vee A \cdot B = A$, перейти від КНФ функції $f(\tilde{x}^n)$ до ДНФ:

$$1) f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3);$$

$$2) f(\tilde{x}^3) = x_1 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_2 \vee \bar{x}_3);$$

$$3) f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3);$$

$$4) f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \vee x_2) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_3);$$

$$5) f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_3);$$

$$6) f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_2 \vee x_4) \cdot (x_3 \vee \bar{x}_4).$$

4.16. Використовуючи дистрибутивний закон $x \vee y \cdot z = (x \vee y) \& (x \vee z)$ та еквівалентності $x \vee x = x$, $x \vee \bar{x} = 1$, $A \vee 1 = 1$, $A \cdot 1 = A$, і $A \cdot (A \vee B) = A$, перейти від ДНФ функції $f(\tilde{x}^n)$ до її КНФ:

$$1) f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_3;$$

$$2) f(\tilde{x}^3) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3;$$

$$3) f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1 \vee x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3;$$

$$4) f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3;$$

$$5) f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_3.$$

4.17. Із заданої множини A елементарних кон'юнкцій знайти прості імпліканти функції f :

- 1) $A = \{x_1, \bar{x}_3, x_1, x_2, \bar{x}_3\}, \quad f(\tilde{x}^3) = (00101111);$
- 2) $A = \{x_1 \bar{x}_2, x_2 x_3, x_1 x_2 x_3\}, \quad f(\tilde{x}^3) = (01111110);$
- 3) $A = \{x_1, \bar{x}_4, x_2 \bar{x}_3, x_1 x_2 x_4\}, \quad f(\tilde{x}^4) = (1010111001011110);$
- 4) $A = \{x_1, x_2, x_1 \bar{x}_2\}, \quad f(\tilde{x}^2) = (1011);$
- 5) $A = \{x_1 x_3, x_1 \bar{x}_3, x_2\}, \quad f(\tilde{x}^3) = (00111011);$
- 6) $A = \{x_1 \bar{x}_2, x_2 \bar{x}_3, \bar{x}_2\}, \quad f(\tilde{x}^3) = (00101111).$

4.18. За даною ДНФ за допомогою метода Блейка побудувати скорочену ДНФ:

- 1) $D = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4;$
- 2) $D = x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4;$
- 3) $D = x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4;$
- 4) $D = x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4;$
- 5) $D = \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_2 x_4 \vee x_1 x_4 \vee x_2 x_3 \bar{x}_4;$
- 6) $D = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_4 \vee \bar{x}_2 x_4;$
- 7) $D = \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 \vee x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3;$
- 8) $D = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_2 x_3 x_1.$

4.19. За даною ДНФ побудувати скорочену КНФ:

- 1) $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3);$
- 2) $(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3);$
- 3) $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_2 \vee x_3);$
- 4) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3);$
- 5) $(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_3 \vee x_1);$
- 6) $(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee \bar{x}_4)(x_4 \vee x_1);$
- 7) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_2 \vee \bar{x}_4);$
- 8) $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4).$

4.20. За допомогою алгоритма Квайна побудувати скорочену ДНФ:

- 1) $\tilde{\alpha}_f = (01110110)$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (10111101)$;
 3) $\tilde{\alpha}_f = (00101111)$; 4) $\tilde{\alpha}_f = (11100100)$;
 5) $\tilde{\alpha}_f = (0001101111011011)$; 6) $\tilde{\alpha}_f = (0000111111110110)$;
 7) $\tilde{\alpha}_f = (1111111101111110)$; 8) $\tilde{\alpha}_f = (0000111101111111)$.

4.21. Вияснити чи є ДНФ а) тупиковою, б) скороченою, в) мінімальною:

- 1) $D = x_1x_2 \vee \bar{x}_2$;
 2) $D = x_1x_2 \vee x_2$;
 3) $D = x_1 \vee \bar{x}_2$;
 4) $D = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2$;
 5) $D = x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3$;
 6) $D = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4$;
 7) $D = x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$;
 8) $D = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$.

4.22. Застосувати алгоритм спрощення до ДНФ:

- 1) $D = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2$;
 2) $D = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2$;
 3) $D = x_1x_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$;
 4) $D = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$;
 5) $D = x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3$;
 6) $D = \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3$;
 7) $D = \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$;
 8) $D = \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_3x_4$.

4.23. По заданій скороченій ДНФ D побудувати мінімальні ДНФ:

- 1) $D = xy \vee \bar{x}\bar{z} \vee yz$;
 2) $D = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{w} \vee \bar{x}\bar{z}\bar{w} \vee \bar{y}\bar{z}w$;
 3) $D = \bar{x}w \vee \bar{y}w \vee zw \vee xz \vee yz$;

$$4) D = \bar{x}z \vee yz \vee \bar{x}\bar{y}w \vee xy \vee \bar{y}zw \vee xzw;$$

$$5) D = yz \vee \bar{x}\bar{z}w \vee \bar{x}yz \vee xzw \vee xy\bar{z};$$

$$6) D = \bar{x}y\bar{w} \vee \bar{x}\bar{z}\bar{w} \vee y\bar{z}\bar{w} \vee \bar{y}z\bar{w} \vee \bar{x}y\bar{z};$$

$$7) D = \bar{x}z \vee x\bar{z} \vee xyz \vee xzw;$$

$$8) D = yzt \vee ywt \vee \bar{x}yzt \vee xy\bar{z}w.$$

4.24. За допомогою таблиці Квайна побудувати всі тупікові ДНФ функції

f:

$$1) \tilde{\alpha}_f = (01111100);$$

$$2) \tilde{\alpha}_f = (01111110);$$

$$3) \tilde{\alpha}_f = (00011111);$$

$$4) \tilde{\alpha}_f = (1111100001001100);$$

$$5) \tilde{\alpha}_f = (1110100001101000);$$

$$6) \tilde{\alpha}_f = (1110011000010101);$$

$$7) \tilde{\alpha}_f = (0001011110101110);$$

$$8) \tilde{\alpha}_f = (0001101111100111).$$

Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 6. Перевірити на повноту наступні системи булевих функцій

Варіант	Завдання	Варіант	Завдання
01	$\{x + y; x \oplus y; 1\}$	16	$\{0; 1; x \sim y\}$
02	$\{x \sim y; x + y\}$	17	$\{0 + y \oplus z; x \sim y; 0\}$
03	$\{x + y; x \oplus y \oplus 1\}$	18	$\{x + y; x \cdot y \oplus 0 \cdot z\}$
04	$\{0; 1; (x \cdot y) + z\}$	19	$\{\bar{x}; 1; x \oplus y\}$
05	$\{0; 1; x \oplus y\}$	20	$\{x \oplus y; x + y + \bar{z}\}$
06	$\{x \cdot y \oplus x; x \sim y; 0\}$	21	$\{\bar{x} \cdot \bar{y} + z; x \oplus y\}$
07	$\{x + y; x \cdot y \oplus x \cdot z\}$	22	$\{x \sim y; x \oplus y; xy \oplus z\}$
08	$\{x \oplus y; x + y + \bar{z}\}$	23	$\{x \rightarrow y; x \oplus y \oplus z\}$
09	$\{\bar{x} \rightarrow y; \bar{x}\}$	24	$\{xy \oplus z; (x \sim y) \oplus z\}$
10	$\{x \cdot y \oplus x; 1\}$	25	$\{x \cdot y; x\}$
11	$\{x \oplus y; x \sim (y \cdot z)\}$	26	$\{xy; x + y; 1\}$

12	$\{x \cdot y; x \oplus y; x \sim (x + y)\}$	27	$\{x \oplus y; x + y\}$
13	$\{x \cdot \sim y; 1; x + y\}$	28	$\{x + y + z; xy; 0; 1\}$
14	$\{x \cdot y; x \oplus y \oplus 1\}$	29	$\{x \rightarrow y; \bar{x}\}$
15	$\{0; 1; x \cdot y + z\}$	30	$\{x \rightarrow y; 0\}$

Завдання 7. Перевірити еквівалентність формул А та В:

а) за допомогою таблиць істинності;

б) за допомогою еквівалентних перетворень;

в) знайти ДДНФ і ДКНФ формули В.

$$6.1. A = x \oplus (y \leftrightarrow z), \quad B = (x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z).$$

$$6.2. A = x \rightarrow (y \downarrow z), \quad B = (x \rightarrow y) \downarrow (x \rightarrow z).$$

$$6.3. A = x(y \leftrightarrow z), \quad B = xy \leftrightarrow xz.$$

$$6.4. A = x \leftrightarrow (y \oplus z), \quad B = (x \leftrightarrow y) \oplus (x \leftrightarrow z).$$

$$6.5. A = x \rightarrow (y \leftrightarrow z), \quad B = (x \rightarrow y) \leftrightarrow (x \rightarrow z).$$

$$6.6. A = x \rightarrow (y \oplus z), \quad B = (x \rightarrow y) \oplus (x \rightarrow z).$$

$$6.7. A = x \downarrow (y \oplus z), \quad B = (x \downarrow y) \oplus (x \downarrow z).$$

$$6.8. A = x \leftrightarrow (y|z), \quad B = (x \leftrightarrow y)|(x \leftrightarrow z).$$

$$6.9. A = x(y \oplus z), \quad B = (xy) \oplus (xz).$$

$$6.10. A = x \oplus (y|z), \quad B = (x \oplus y)|(x \oplus z).$$

$$6.11. A = x(y|z), \quad B = (xy)|(xz).$$

$$6.12. A = x \downarrow (y \leftrightarrow z), \quad B = (x \downarrow y) \leftrightarrow (x \downarrow z).$$

$$6.13. A = x \vee (y \leftrightarrow z), \quad B = (x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z).$$

$$6.14. A = x \rightarrow (y \leftrightarrow z), \quad B = (x \rightarrow y) \leftrightarrow (x \rightarrow z).$$

$$6.15. A = x(y \oplus z), \quad B = (xy) \oplus (xz).$$

$$6.16. A = x \vee (y \rightarrow z), \quad B = (x \vee y) \rightarrow (x \vee z).$$

$$6.17. A = x \oplus (y \rightarrow z), \quad B = (x \oplus y) \rightarrow (x \oplus z).$$

- 6.18. $A = x|(y \oplus z), \quad B = (x|y) \oplus (xz).$
- 6.19. $A = x \vee (y \oplus z), \quad B = (x \vee y) \oplus (x \vee z).$
- 6.20. $A = x \downarrow (y|z), \quad B = (x \downarrow y)|(x \downarrow z).$
- 6.21. $A = x \vee (y|z), \quad B = (x \vee y)|(x \vee z).$
- 6.22. $A = x \rightarrow (y|z), \quad B = (x \rightarrow y)|(x \rightarrow z).$
- 6.23. $A = x(y \rightarrow z), \quad B = xy \rightarrow |xz.$
- 6.24. $A = x \rightarrow (y \downarrow z), \quad B = (x \rightarrow y) \downarrow (x \rightarrow z)$
- 6.25. $A = x|(y \rightarrow z), \quad B = x|y \rightarrow x|z.$
- 6.26. $A = (\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (\bar{xy} \square (x \oplus y)), \quad B = (\overline{xy} \rightarrow x) \rightarrow y.$
- 6.27. $A = (x \oplus yz) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow (y \rightarrow z)), \quad B = x \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow x).$
- 6.28. $A = (x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow \bar{z}) \rightarrow xy), \quad B = \overline{yz \rightarrow x}.$
- 6.29. $A = x \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow yz), \quad B = (x \vee (y \rightarrow z)) \wedge (x \oplus y).$
- 6.30. $A = xy \vee (\bar{x} \rightarrow yz) \square ((\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow z), \quad B = (x \rightarrow y) \oplus (y \oplus z).$

Завдання 8. Знайти мінімальну ДНФ булевої функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$,

заданої вектором своїх значень: а) методом Квайна;

в) за допомогою карт Карно.

1. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$
2. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
3. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$
4. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$
5. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$
6. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$
7. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$
8. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$
9. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$

10. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$
11. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
12. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$
13. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$
14. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$
15. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$
16. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$
17. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$
18. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$
19. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$
20. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$
21. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$
22. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$
23. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$
24. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$
25. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1)$
26. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$
27. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$
28. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$
29. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$
30. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

Модуль №3 „ Теорія графів”

Тема 5. Елементи теорії графів.

Виникнення теорії графів пов'язують з іменем Леонарда Ейлера, який у 1736 р. опублікував розв'язок задачі про кенігсберзькі мости, а також знайшов загальний критерій існування в графі спеціального маршруту - ейлерового циклу. Подальші суттєві результати у цій галузі були отримані в середині ХІХ століття, переважно зусиллями Кірхгофа та Келлі. Однак початок проведення

активних систематичних досліджень та становлення теорії графів як важливого розділу дискретної математики припадає на середину ХХ століття. Великою мірою це пов'язано з виникненням науки кібернетика, бурхливим розвитком та поширенням електронних обчислювальних машин і, як наслідок, значним зростанням ролі задач дискретного характеру.

Саме з цього часу граф стає однією з найпоширеніших і найпопулярніших математичних моделей у багатьох сферах науки і техніки. Картинка у вигляді набору точок на площині та ліній, проведених між деякими з них, стала зручною і наочною формою зображення найрізноманітніших об'єктів, процесів та явищ. Нині теорія графів застосовується у теорії автоматів, економіці, хімії, біології, теорії проектування тощо.

З поняттям графу зазвичай пов'язують його графічне представлення, при якому він зображується як множина точок, деякі з яких з'єднані лініями. Але граф відрізняється від геометричних конфігурацій (скажімо, фігур, які також складаються з точок та ліній) тим, що в графі несуттєві відстані між точками, форма з'єднувальних ліній та кути між ними. Важливо лиш те, чи з'єднана дана пара точок лінією, чи ні.

Нехай V - деяка непорожня скінченна множина, а E - довільна підмножина множини $V \times V$.

Означення. Графом G називається об'єкт, який заданий парою множин (V, E) , де V – множина *вершин*, $E \subseteq V \times V$ – множина *ребер*; позначається $G = (V, E)$.

Елементи множини V називаються *вершинами* графа G , а елементи множини E - *ребрами* графа G . Ребро, яке з'єднує вершини $u, v \in V$ графа позначається (u, v) або $e = (u, v)$. Ребро (u, v) називається *неорієнтованим*, якщо пара $\{u, v\}$ є неупорядкованою: $\{u, v\} = \{v, u\}$. Якщо ж порядок суттєвий, то ребро буде *орієнтованим* (називають *дугою*); в цьому випадку перша по порядку вершина ребра називається *початковою* вершиною, а друга – *кінцевою*.

Граф називається *неорієнтованим* або *неографом*, якщо кожне його ребро є неорієнтованим, і *орієнтованим* або *орграфом*, якщо орієнтовані всі його ребра. Граф називається *скінченним*, якщо множини його вершин і ребер є скінченними.

Кількість вершин графа G позначають через $n(G) = |V|$ і називають його *порядком*.

Якщо $e = (u, v) \in E$ - деяке ребро графа G , то кажуть:

- вершини u та v *суміжні*;
- вершини u та v *інцидентні* ребру e ;
- ребро e *інцидентне* вершинам u і v .

Множина всіх вершин графа G , суміжних з деякою вершиною v ,

називається *оточенням* вершини v або *множиною суміжності* вершини v

і позначається через $\Gamma(v)$: $\Gamma(v) = \{w \in V \mid (w, v) \in E\}$.

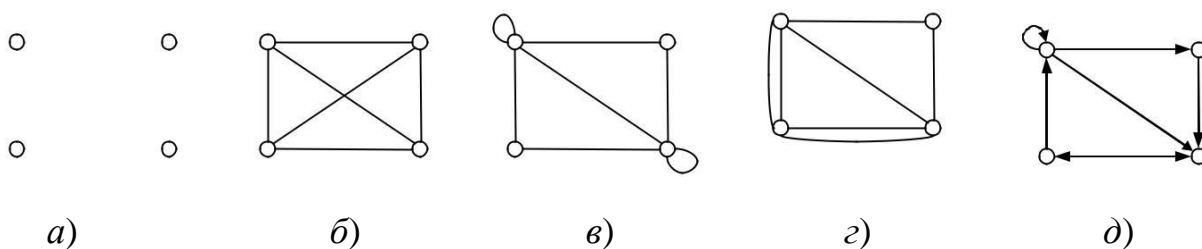


Рис. 10. Приклади графів

Множина ребер E може бути порожньою (рис. 10, а). Такий граф називається *нуль-графом*; нуль-граф порядку n позначається через O_n . Якщо ж множина вершин V – порожня, то порожньою є також множина E . Такий граф називається *порожнім* і позначається \emptyset .

Лінії, що зображують ребра графу, можуть перетинатися, але точки перетину не є вершинами (рис. 10, б). Ребро може з'єднувати деяку вершину саму із собою (рис. 10, в), таке ребро називається *петлею*. Цей випадок відповідає наявності в множині E пар вигляду (v, v) . Різні ребра можуть бути інцидентними одній і тій самій парі вершин (тобто одну й ту саму пару вершин

з'єднує більше ніж одне ребро), такі ребра називаються *кратними* (рис. 9, з).

Означення . Граф називається *простим*, якщо кожен пару вершин з'єднує не більше, ніж одне ребро. Граф називається *мультиграфом*, якщо він має кратні ребра. Граф називається *псевдографом*, якщо він має петлі та кратні ребра.

При зображенні орієнтованих графів напрямки ребер позначаються стрілками (рис. 9, д). Орієнтований граф може мати кратні ребра, петлі, а також петлі, що з'єднують одні й ті самі вершини, але у зворотних напрямках.

Кожному неорієнтованому графу можна поставити у відповідність орієнтований граф з тією самою множиною вершин, в якій кожне ребро замінено двома орієнтованими ребрами, що є інцидентними тим самим вершинам і мають зворотні напрямки.

Граф G називається *повним*, якщо будь-які дві його вершини суміжні, тобто $E = V \times V$. Повний граф порядку n ще позначається символом K_n , число

ребер в ньому дорівнює $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

На рис.11 зображені графи $K_n, n \leq 5$.

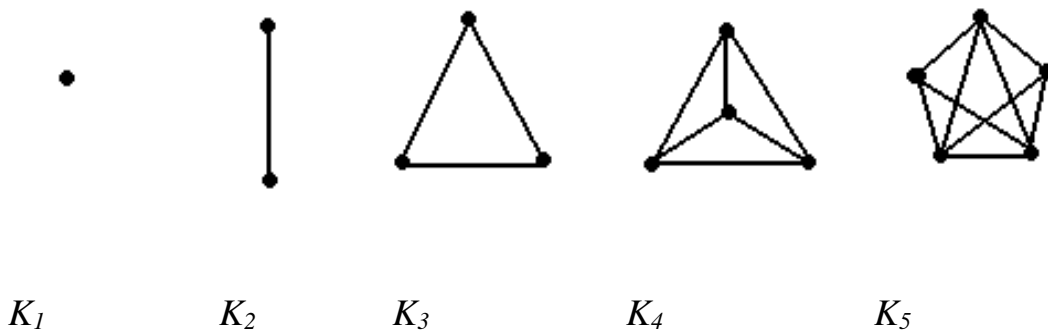


Рис.11

Граф $G = (V, E)$ називається *дводольним*, якщо існує таке розбиття множини його вершин на дві підмножини $V_1, V_2 \in V, (V_1 \cap V_2 = \emptyset)$ такі, що кінці кожного ребра належать різним підмножинам. Якщо при цьому будь-які дві вершини, що входять в різні частини, суміжні, то граф називається *повним*

дводольним. Повний дводольний граф позначається $K_{m,n}$, де $m = |V_1|$, $n = |V_2|$; на рис.12 зображені повні дводольні графи $K_{1,5}$, $K_{3,3}$.

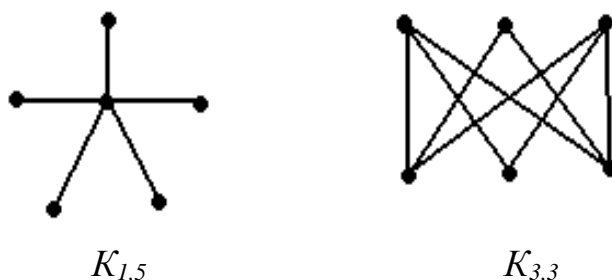


Рис.12

Задати граф означає задати множини його вершин і ребер, а також відношення суміжності або інцидентності. Графи можна задавати за допомогою матриць. Коли граф $G = (V, E)$ – скінченний, для опису його вершин та ребер досить їх занумерувати. Нехай v_1, v_2, \dots, v_n – вершини графа G ; e_1, e_2, \dots, e_m – його ребра, тобто $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

Матрицею суміжності неорієнтованого графа G називається квадратна матриця $A(G) = (a_{ij})$ розміру $n \times n$, в якій елемент

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершини } v_i \text{ та } v_j \text{ суміжні,} \\ 0, & \text{в супротивному випадку.} \end{cases}$$

Для орієнтованого графу елементи a_{ij} визначаються так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо із вершини } v_i \text{ до } v_j \text{ веде дуга,} \\ 0, & \text{в супротивному випадку.} \end{cases}$$

Таким чином, матриця суміжності неорієнтованого графу є симетричною ($a_{ij} = a_{ji}$), а орієнтованого – необов'язково. Якщо вона все ж симетрична, то для кожного ребра орієнтованого графу існує ребро, яке з'єднує ті самі вершини, але йде у зворотному напрямку. Очевидно, орієнтований граф із симетричною матрицею суміжності відповідає неорієнтованому графу, який має ту саму матрицю суміжності.

Відношення інцидентності на графі G можна означити матрицею

У процесі вивчення множин зручно застосовувати так звані діаграми Ейлера-Венна. На них універсальну множину схематично зображують у вигляді прямокутника, а різні її підмножини – у вигляді кругів чи інших фігур всередині цього прямокутника. Наприклад, на даному рисунку (рис.1) зображено універсальну множину U та її підмножини A, B і C , причому $C \subset B$.

$B(G) = (b_{ij})$, яка має n рядків та m стовпців. Рядки відповідають вершинам графу, а стовпці – його ребрам. Елементи цієї матриці у випадку неорієнтованого графа є такими:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ і ребро } e_j \text{ інцидентні,} \\ 0, & \text{в супротивному випадку.} \end{cases}$$

Це матриця інцидентності звичайного графу G , яка є одним із способів його визначення.

Елементами матриці інцидентності $B(G) = (b_{ij})$ орієнтованого графу G є:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ є кінцем дуги } e_j, \\ -1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ є початком дуги } e_j, \\ \alpha \text{ (довільне число відмінне від } -1, 0, 1), & \text{якщо} \\ & \text{вершина } v_i \text{ має петлю } e_j, \\ 0, & \text{якщо вершина } v_i \text{ і дуга } e_j \text{ не інцидентні.} \end{cases}$$

Відношення інцидентності можна задати ще *списком ребер* графу. Це третій, більш економний спосіб, яким можна задати граф G . Кожний рядок цього списку відповідає ребру, в ньому записано номери вершин, інцидентних йому. Для неорієнтованого графу порядок цих вершин у рядку довільний, для орієнтованого першим записується номер або інше найменування початку ребра, а другим – його кінця. За списком ребер графу можна легко визначити матрицю інцидентності. Справді, кожний рядок цього списку відповідає стовпцю матриці з тим самим номером. Для неорієнтованого графу в рядку списку записуються номери елементів стовпця матриці інцидентності, що

дорівнюють 1, а для орієнтованого графу в цьому рядку першим зазначається номер елемента стовпця матриці, який дорівнює -1 , другим – номер елемента, що дорівнює 1.

Поняття матриці інцидентності та списку ребер можна легко узагальнити на випадок мультиграфу.

Отже, граф можна задати різними способами. Він може бути зображений на кресленні (рисунок), заданий матрицею інцидентності, списком ребер або матрицею суміжності. Вигляд зображення залежить від форми ліній і взаємного розташування вершин. Іноді не так легко зрозуміти, чи однакові графи, зображені різними кресленнями, як, наприклад, на рис. 13. Вигляд матриць та списку ребер залежить від нумерації вершин і ребер графу. Строго кажучи, граф вважається повністю заданим, якщо нумерацію його вершин зафіксовано.

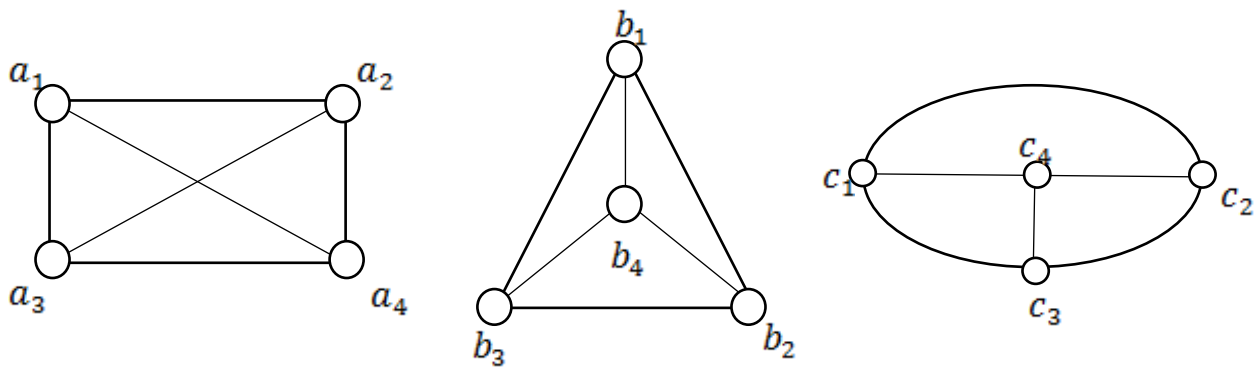


Рис. 13.

Означення. Графи G_1 і G_2 називають *ізоморфними* (позначаємо $G_1 \sim G_2$), якщо:

- 1) існує взаємно однозначна відповідність між їх вершинами;
- 2) якщо вершини з'єднані ребром в одному графі, то вершини, які їм відповідають в іншому графі, теж з'єднані ребром.

Таким чином, графи, зображені на рис. 9, є ізоморфними. Іншими словами, графи будуть ізоморфними, якщо вони відрізняються тільки нумерацією вершин.

Перенумерація вершин графу задається рядком a_1, \dots, a_n нових номерів вершин, розташованих у початковому порядку. Нова матриця суміжності

утворюється з початкової переміщенням кожного елемента a_{ij} в a_i -й рядок та a_j -й стовпець, тобто внаслідок перестановки (a_1, \dots, a_n) рядків і стовпців початкової матриці. Тому, щоб дізнатися, чи зображують дві матриці суміжності ізоморфні графи, можна, наприклад, здійснити усі перестановки рядків та стовпців першої матриці. Якщо після однієї з цих перестановок виникне матриця, що тотожно збігається з другою, графи, які зображаються цими матрицями, є ізоморфними. Проте, щоб пересвідчитися таким способом у тому, що графи не є ізоморфними, доведеться виконати всі $n!$ перестановок рядків і стовпців, а це – досить трудомістка операція.

Матриця інцидентності графу та список його ребер залежать від нумерації ребер і вершин. Перехід від однієї пари нумерації до іншої визначається перестановками (v_1, \dots, v_n) вершин та (e_1, \dots, e_m) ребер графу, який розглядається. Матриця інцидентності утворюється з початкової внаслідок перестановки стовпців (j -й на e_j -те місце) і рядків (i -й на v_i -те). Рядки списку ребер переставляються так само, як і рядки матриці інцидентності, причому кожний номер j в рядках списку замінюється номером v_j .

Отже, справедливі наступні теореми.

Теорема 1. Два графи ізоморфні тоді і тільки тоді, коли їх матриці суміжностей можна одержати одну із другої однаковими перестановками рядків і стовпців.

Теорема 2. Графи (орграфи) ізоморфні тоді і тільки тоді, коли їх матриці інцидентності можна одержати одну із другої довільними перестановками рядків і стовпців.

Для довільного графа $G(V, E)$ визначається доповнювальний граф (або доповнення), $\bar{G}(V, \bar{E})$, тобто, це такий граф, який має ту ж множину вершин, а множина ребер визначається так: $\bar{E} = V^{(2)} \setminus E$. Отже, щоб отримати доповнювальний граф до графа $G(V, E)$, потрібно з даного графа утворити повний, тобто з'єднати не з'єднані вершини, а потім вилучити ребра вихідного графа. На рис.14 зображено граф G та його доповнення.



Рис.14

Граф, ізоморфний своєму доповненню, називається *самодоповненим*.

Важливою операцією є *перехід до підграфа*. Нехай є граф $G(V, E)$.

Граф $H(V', E')$ називається *підграфом* графа G , якщо кожна вершина і кожне ребро графа H є відповідно і вершиною і ребром графа G . Підграф H графа G називається *кістяковим підграфом*, коли $V=V'$.

Кажуть, що підграф $H(V', E')$ *породжений множиною вершин V'* , якщо він містить всі ребра графа G , що з'єднують вершини з множини V' . На рис.15 зображено: *a)* – граф $G(V, E)$; *б)*, – його підграф; *в)* – підграф, породжений множиною вершин $V'=\{1, 2, 3, 4\}$, та *г)* – кістяковий підграф.

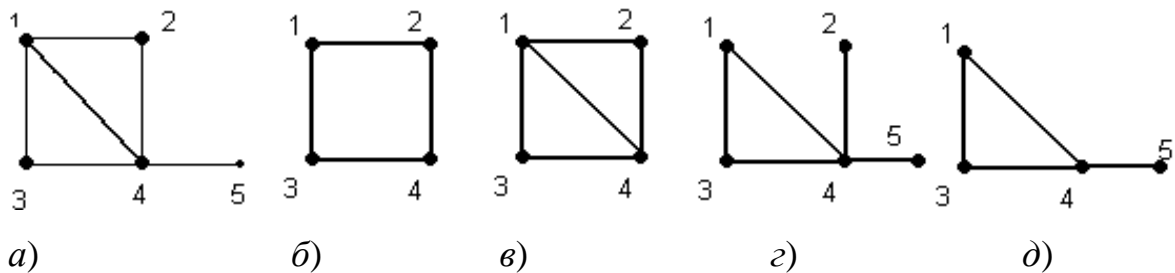


Рис.15

Операція *вилучення вершини v* з графа G полягає у тому, що ми отримуємо підграф H вилученням вершини v і всіх ребер, інцидентних вершині v з графа G . На рис.15, д показано граф з вилученою вершиною $\{2\}$.

Операція *вилучення ребра*. Прикладом може бути рис.15, г, де вилучене ребро 1-2 вихідного графа.

Операція *додавання ребра*. Якщо в графі G вершини u і v несуміжні, то, з'єднавши їх ребром $e = uv$, отримаємо граф $G+e$.

Результатом операції *об'єднання графів* $G_1(E_1, V_1)$ і $G_2(E_2, V_2)$ є граф $H = G_1 \cup G_2$, множина вершин і ребер якого є відповідно $V = V_1 \cup V_2$ і $E = E_1 \cup E_2$. Приклад об'єднання графів показано на рис. 16.

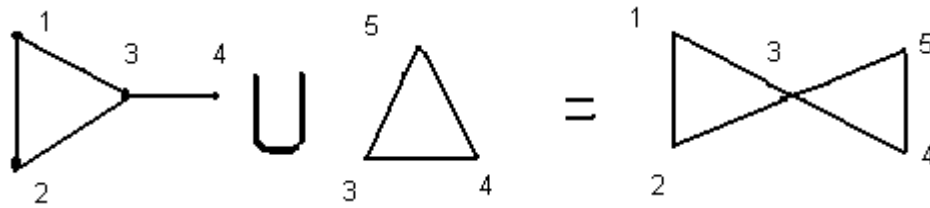


Рис.16

Об'єднання графів називається *диз'юнктивним*, якщо ці графи не мають спільних вершин, тобто $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Ще однією важливою операцією є *ототожнення вершин*. Нехай u і v дві вершини графа G , $H - u - v$. До графа H додаємо нову вершину v' з'єднавши її ребром з кожною з вершин, що входять в об'єднання оточень вершин u і v в графі G . Кажуть, що побудований граф отримується із графа G ототожненням вершин u і v .

Розглядається також операція *стягування ребра*. Стягування ребра uv означає ототожнення суміжних вершин u і v . На рис.17 показано граф G і граф, отриманий з G стягування ребра $\{1,2\}$.

Вважають, що граф G стягується до графа H , якщо H отримується деякою послідовністю стягування ребер.

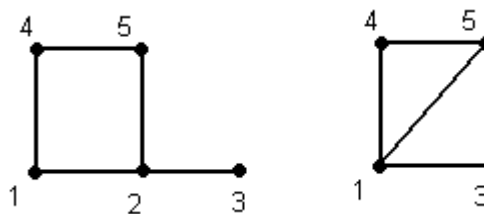


Рис.17

Легко бачити, що *граф Петерсена* (рис.18) стягується до повного графа K_5 .



Рис.18

В деякому розумінні двоїстою до операції стягування ребра є операція *розчеплення вершини*. Нехай v – одна з вершин графа G . Розіб'ємо її оточення довільно на дві частини M і N і виконаємо таке перетворення графа G : вилучимо вершину v разом з інцидентними їй ребрами, додамо нові вершини u і w і ребро uw , що їх з'єднує, вершину u з'єднаємо ребром з кожною вершиною з множини M , а вершину w – з кожною вершиною множини N . Це і є граф, отриманий з графа G розчепленням вершини v .

Маршрутом (або *шляхом*) у графі $G=(V, E)$ називається переміжна послідовність

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_k, v_{k+1}$$

вершин v_i і ребер e_i така, що кожен два сусідні ребра в цій послідовності мають спільну вершину: $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, k$. Вершина v_1 називається *початком* шляху, а вершина v_{k+1} – *кінцем* шляху. Всі інші вершини цього шляху називаються *проміжними*, або *внутрішніми* вершинами.

Кажуть, що маршрут (3.1) з'єднує вершини v_1 і v_{k+1} або *веде* з вершини v_1 у вершину v_{k+1} ; називають (v_1, v_{k+1}) – маршрутом. Очевидно, що цей маршрут можна задавати послідовністю v_1, v_2, \dots, v_{k+1} його вершин, а також послідовністю e_1, e_2, \dots, e_k його ребер.

Кількість k ребер у маршруті називається *довжиною* маршруту. Маршрут довжини 0 складається з єдиної вершини.

Маршрут називається *ланцюгом*, якщо в нього всі ребра різні, і *простим ланцюгом*, якщо всі проміжні вершини різні.

Маршрут називається *замкненим* (або *циклічним*), якщо $v_1 = v_{k+1}$. Замкнений ланцюг називається *циклом*, а замкнений простий ланцюг – *простим циклом*.

Простий цикл довжини k називається k – *циклом*, 3 – цикл часто називають *трикутником*. Мінімальна із довжин циклів графа називається його *обхватом*.

Цикл, що містить усі ребра графа, називається *ейлеровим*. Граф називається *ейлеровим*, якщо в ньому є ейлерів цикл. *Ейлеровим ланцюгом* називається ланцюг, що проходить через усі ребра графа.

Розглянемо, наприклад, граф, зображений на рис.19. У ньому $(1, 2)$ і

$(1, 2, 4, 7)$ є простими ланцюгами;

$(1, 2, 4, 7, 8, 4)$ – ланцюг, що не є простим;

$(1, 2, 4, 7, 8, 4, 2)$ – маршрут, що не є ланцюгом; $(1, 2, 4, 1)$ – простий цикл.

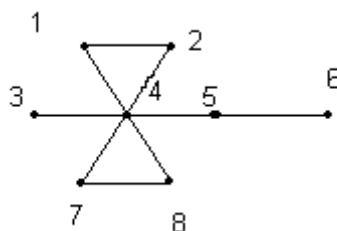


Рис.19

Обхват цього графа дорівнює 3.

Справедливими є наступні деякі твердження.

1. Будь-який маршрут, що веде з вершини u до вершини v , містить у собі простий (u, v) – ланцюг.
2. Кожен цикл містить простий цикл.
3. Об'єднання двох (u, v) – ланцюгів, що не збігаються, містить простий цикл.

Покажемо це на прикладі графа, зображеного на рис.20. Нехай маємо два різних $(1,6)$ – ланцюги: $(1, 2, 5, 6)$ і $(1, 2, 5, 4, 6)$. Очевидно, що їх об'єднання буде містити $(4, 5, 6, 4)$ – простий цикл.

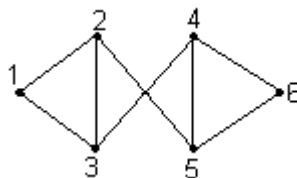


Рис. 20

Граф називається *зв'язним*, якщо будь-які дві його вершини $u \neq v$ з'єднанні маршрутом (ланцюгом або простим ланцюгом). Так, граф, зображений на

рис.20, є очевидно зв'язним.

Нехай граф $G=(V, E)$ – не зв'язний. Тоді множину його вершин V можна розбити на підмножини V_1, \dots, V_p такі, що між будь-якими двома вершинами підмножини $V_i, i=1, \dots, p$ існує шлях, а ніяка вершина підмножини V_i не зв'язана ні з якою вершиною іншої підмножини $V_j, i \neq j$. Підграфи на підмножинах $V_i, i=1, \dots, p$ називаються *компонентами зв'язності* (*компонентами*) графа. Очевидно, зв'язний граф G має тільки один компонент зв'язності, що є графом G . Приклад графа G , що складається з п'яти компонентів зв'язності G_1, G_2, G_3, G_4 і G_5 зображено на рис. 21.

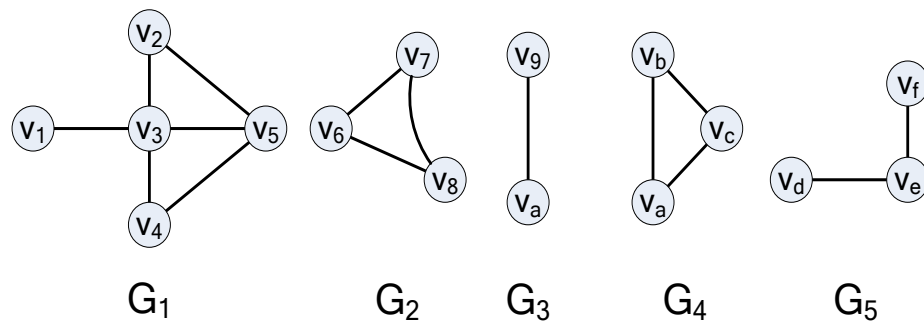


Рис. 21

Відстанню між вершинами v і w зв'язного графа (позначається $d(v,w)$) називається довжина найкоротшого простого ланцюга, що з'єднує вершини v і w .

Оскільки кожна вершина графа $G=(V,E)$ з'єднана сама з собою маршрутом довжини 0, то для всіх $v \in V$ виконується $d(v,v)=0$.

Означена функція відстані задовольняє три аксіоми метрики, тобто для будь-яких вершин $v, w, u \in V$ виконується

1. $d(v,w) \geq 0$; $d(v,w)=0$ тоді і тільки тоді, коли $v = w$;
2. $d(v,w)=d(w,v)$;
3. $d(v,w) \leq d(v,u)+d(u,w)$.

Ексцентриситетом $e(v)$ довільної вершини v зв'язного графа $G=(V, E)$ називається найбільша з відстаней між вершиною v і всіма іншими вершинами

графа G , тобто

$$e(v) = \max\{d(v, w) \mid w \in V\}.$$

Діаметром зв'язного графа G називається максимальний з усіх ексцентриситетів вершин графа G ; позначається $D(G)$, тобто

$$D(G) = \max\{e(v) \mid v \in V\}.$$

Радіусом зв'язного графа G називається найменший з усіх ексцентриситетів його вершин і позначається $r(G)$:

$$r(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\}.$$

Якщо $e(v) = r(G)$, то вершина v називається *центральною*. *Центром* графа G називається множина всіх його центральних вершин.

Справедливими є наступні *твердження*.

1. Граф G буде зв'язним тоді і тільки тоді, коли для будь-якої фіксованої вершини u і для будь-якої іншої вершини v існує (u, v) -маршрут.

2. Будь-який граф однозначно зображається у вигляді прямої суми своїх компонент зв'язності.

3. Для будь-якого графа або він, або його доповнення є зв'язним.

4. Нехай $G = (V, E)$ зв'язний граф і e деяке його ребро. Розглянемо граф G' , який отримано з G видаленням ребра e :

а) якщо ребро e належить деякому циклу графа G , то граф G' є зв'язним графом;

б) якщо ребро e не належить жодному циклу графа G , то граф G' не є зв'язним графом і має рівно дві компоненти зв'язності.

Позначимо через $k(G)$ – число зв'язності графа G . Відповідь на запитання про можливу кількість ребер в графі порядку n з фіксованим числом компонент $k = k(G)$ дає така теорема.

5. Нехай $G = (V, E)$ граф з n вершинами і k компонентами зв'язності. Тоді число його ребер m задовольняє такі нерівності:

$$n - k \leq m(G) \leq (n - k)(n - k + 1) / 2.$$

Зв'язний граф $G=(V, E)$ називається *ейлеровим*, якщо існує замкнутий ланцюг, який включає кожне його ребро. Такий ланцюг називається *ейлеровим ланцюгом*. Зв'язний граф G називається *напівейлеровим*, якщо в ньому існує ланцюг, який включає кожне його ребро. Таким чином, всякий ейлерів граф буде напівейлеровим.

б. Зв'язний граф $G=(V, E)$ є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли кожна вершина графа G має парний степінь.

Наслідок 1. Зв'язний граф ейлерів тоді і тільки тоді, коли множину його ребер можна розбити на цикли, що не перетинаються.

Наслідок 2. Зв'язний граф напівейлерів тоді і тільки тоді, коли він має не більше двох вершин непарного степеня.

Існує ще один різновид обходу графа, який має різноманітні практичні застосування і називається гамільтоновим циклом. Простий цикл, який проходить через усі вершини графа, називається *гамільтоновим циклом*. Граф називається *гамільтоновим*, якщо він має гамільтонів цикл.

Степенем вершини v графа G називається число інцидентних їй ребер, тобто число вершин в її оточенні. Будемо позначати степінь вершини v через $degv$. Отже, $degv=|N(v)|$. Вершина степеня 0 називається *ізолюваною*, вершина степеня 1 – *кінцевою*. Ребро, інцидентне кінцевій вершині, також називається *кінцевим*. Очевидно, що петля додає до степеня вершини 2.

Приклад 34. Визначити степені вершин графа, заданого геометрично на рис 22.

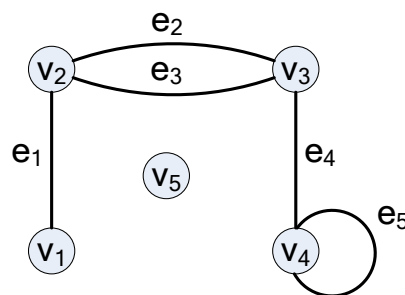


Рис 22

Розв'язання. Запишемо степені вершин заданого графа і охарактеризуємо вершини:

$\deg(v_1) = 1$, отже вершина v_1 - висяча;

$\deg(v_2) = 3, \deg(v_3) = 3, \deg(v_4) = 3$;

$\deg(v_5) = 0$, отже вершина v_5 – ізольована.

Розглянемо суму степенів усіх вершин графа. Кожне ребро вносить у цю суму двійку, тому справедливе твердження.

Лема (про рукописання). Сума степенів усіх вершин графа $G=(V, E)$ – парне число, яке дорівнює подвійному числу ребер:

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

Наслідок. У будь – якому графі $G=(V, E)$ число вершин непарного степеня парне.

Дійсно, нехай число вершин графа G дорівнює $|V|=n$. Вважаємо, що перші k вершин v_1, \dots, v_k мають парні степені, а інші $n-k$ вершин v_{k+1}, \dots, v_n – непарні. Очевидно, це не порушує загальності, а тому маємо:

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = \sum_{i=1}^k \deg(v_i) + \sum_{i=k+1}^n \deg(v_i)$$

Граф називається *регулярним* (однорідним), якщо степені всіх його вершин рівні між собою. *Степенем* регулярного графа називається степінь його вершин і позначається $\deg G$.

Всі повні графи – регулярні. Очевидно, степінь повного графа порядку n дорівнює $(n-1)$. Справедливі такі твердження.

1. Не існує регулярного графа з n вершинами степенів k , у якого n і k – обидві непарні.

2. Кількість ребер у повному графі K_n з n вершинами дорівнює $n(n-1)/2$.

Матриця досяжності $R = (r_{ij})$ графа $G=(V, E)$ визначається

наступним чином:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } x_j \text{ досяжна із } x_i, \\ 0, & \text{в супротивному випадку.} \end{cases}$$

Множина вершин $R(x_i)$ графа $G=(V,E)$, досяжних із заданої вершини x_i , складається з таких елементів x_j , для яких елемент r_{ij} в матриці досяжності дорівнює 1. Очевидно, що усі діагональні елементи в матриці R дорівнюють 1, оскільки кожна вершина досяжна із себе самої за допомогою шляху завдовжки 0.

Оскільки $\Gamma(x_i)$ є множиною таких вершин x_j , які досяжні з x_i через шляхи довжини 1, тобто $\Gamma(x_i)$ – така множина вершин, для яких в графі існують дуги (x_i, x_j) , то множина $\Gamma(\Gamma(x_i)) = \Gamma^2(x_i)$ складається з вершин, досяжних із x_i з використанням шляхів довжини 2.

Аналогічно, $\Gamma^p(x_i)$ є множиною вершин, які досяжні із x_i за допомогою шляхів довжини p .

Оскільки будь-яка вершина графа $G=(V, E)$, яка досяжна з x_i , має бути досяжна з використанням шляху(чи шляхів) довжини 0, або 1, або 2, ..., або p , то множину вершин, досяжних з x_i , можна представити у вигляді

$$R(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma(x_i) \cup \Gamma^2(x_i) \cup \dots \cup \Gamma^p(x_i).$$

Матрицю досяжності можна побудувати так. Знаходимо досяжні множини $R(x_i)$ для усіх вершин $x_i \in V$ способом, приведеним вище. Візьмемо $r_{ij} = 1$, якщо $x_j \in R(x_i)$, і $r_{ij} = 0$ – в супротивному випадку. Отримана таким чином матриця є матрицею досяжності.

База B графа $G=(V, E)$ – це множина вершин, з якої досяжна будь-яка вершина графа і ця множина є мінімальною в тому сенсі, що в B не існує власної підмножини, якій притаманна така властивість досяжності.

Отже, базою B є така множина вершин графа $G=(V, E)$, яка задовольняє наступним двом умовам:

– кожна вершина графа G досяжна хоча б з однієї вершини

множини V ;

– в V немає вершини, яка досяжна з іншої вершини множини V .

Граф без циклів називається *ациклічним*. Ациклічний зв'язний граф називається *деревом*. Довільний ациклічний граф називається *лісом*.

Очевидно, що зв'язними компонентами лісу є дерева, і тому, кожен ліс може бути зображений у вигляді прямої суми дерев.

Дерева – це особливий і дуже важливий клас графів. Особлива роль дерев визначається як широким їхнім застосуванням у різних галузях науки і практики, так і тим особливим положенням, яке дерева займають у самій теорії графів. Останнє випливає з граничної простоти будови дерев. Часто при розв'язуванні різних задач теорії графів їхнє дослідження починають з дерев. Зокрема, порівнюючи нескладною є проблема перевірки ізоморфності дерев.

Існують й інші, рівносильні наведеному, означення дерева, які можна розглядати як характеристичні властивості дерева.

Теорема 3. Для графа $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$ такі твердження є рівносильними:

1) G – дерево (ациклічний зв'язний граф);

2) G – зв'язний граф і $m = n - 1$;

3) G – ациклічний граф і $m = n - 1$;

4) для будь-яких вершин v і w графа G існує лише один простий ланцюг, що з'єднує v і w ;

5) G – ациклічний граф такий, що коли будь-які його несуміжні вершини v і w з'єднати ребром (v, w) , то одержаний граф міститиме рівно один цикл.

Наслідок 1. Для довільного дерева $T = (V, E)$ з n вершинами виконується

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2(n - 1).$$

Наслідок 2. Будь-яке нетривіальне дерево $T = (V, E)$ має принаймні дві

кінцеві вершини.

Наслідок 3. Ліс F , який має n вершин і складається з k дерев, містить $n - k$ ребер.

Наслідок 4. В графі G з n вершинами, який має більше, ніж $n - 1$ ребро, є принаймні один цикл.

Кістяковим (каркасним) деревом зв'язного графа $G = (V, E)$

називається дерево $T = (V, E_T)$ таке, що $E_T \subseteq E$.

Кістяковим (каркасним) лісом незв'язного графа $G = (V, E)$

називається сукупність кістякових (каркасних) дерев зв'язних компонент графа G .

Наслідок 5. Для зв'язного графа $G = (V, E)$ можна вказати $|E| - |V| + 1$ ребро, після видалення яких отримаємо кістякове дерево графа G .

Наслідок 6. Нехай граф $G = (V, E)$ має k компонент зв'язності. Для отримання його кістякового лісу з графа G необхідно видалити $|E| - |V| + k$ ребер.

Означення. Число

$$\gamma(G) = |E| - |V| + k$$

називається *цикломатичним числом* графа G ; тут k – число компонент зв'язності графа.

Цикломатичне числа графа G має такі прості властивості.

1. Для довільного графа G виконується $\gamma(G) \geq 0$.
2. Граф G є лісом тоді і тільки тоді, коли $\gamma(G) = 0$.
3. Граф G має рівно один простий цикл тоді і тільки тоді, коли $\gamma(G) = 1$.
4. Кількість циклів у графі G не менша ніж $\gamma(G)$.

За своєю суттю цикломатичне число визначає число ребер, які необхідно видалити із графа G , щоб він не мав циклів.

У багатьох випадках не має особливого значення, як зобразити граф у вигляді рисунка (діаграми) на площині, оскільки ізоморфні графи подібні за

своєю структурою і містять ту саму інформацію. Однак існують ситуації, коли необхідно, щоб зображення графа на площині задовольняло певні умови. Наприклад, якщо граф є моделлю деякої електронної схеми або транспортної мережі, де вершинами є окремі елементи схеми або станції, а ребрами, відповідно, електричні провідники і шляхи, то бажано так розташувати ці ребра на площині, щоб уникнути перетинів.

Таким чином виникає поняття плоского графа.

Граф називається *плоским*, якщо його діаграму можна зобразити на площині так, що лінії, які відповідають ребрам графа, не перетинаються (тобто мають спільні точки тільки у вершинах графа).

Приклади плоских графів показано на рис.23.

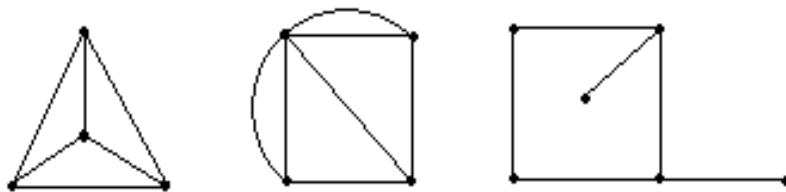


Рис.23

Граф називають *планарним*, якщо він ізоморфний деякому плоскому графу.

Наприклад, граф, зображений на рис.24, а, планарний, оскільки він ізоморфний графу, зображеному поруч (рис.24, б). Простий цикл, дерево і ліс – це також планарні графи.

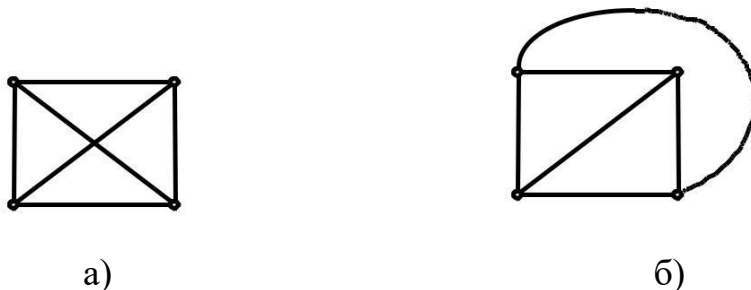


Рис.24

Очевидними є такі твердження.

Лема 1 . 1. Будь-який підграф планарного графа є планарним.

2. Граф є планарним тоді і тільки тоді, коли кожна його зв'язна компонента – планарний граф.

Про планарні графи кажуть, що вони *укладаються на площині* або мають *плоске укладання*.

Жордановою кривою будемо називати неперервну лінію, яка не перетинає сама себе. *Гранню* плоского графа назвемо множину точок площини, кожна пара яких може бути з'єднана жордановою кривою, що не перетинає ребер графа. *Межею* грані будемо вважати замкнений маршрут, що обмежує цю грань.

Отже, плоский граф розбиває всю множину точок площини на грані так, що кожна точка належить деякій грані. Відзначимо, що плоский граф має одну, причому єдину, необмежену грань, яку називають *зовнішньою*, а всі інші – *внутрішніми* гранями. Множину граней плоского графа позначатимемо через P .

Степенем грані r називатимемо довжину циклічного шляху, що обмежує грань r (тобто довжину межі грані r); позначається Δ_r .

Лема 2. Нехай $G=(V, E)$ плоский граф, тоді справедлива рівність

$$\sum_{r \in P} \Delta_r = 2|E|.$$

Теорема (Ейлера). Для будь-якого зв'язного плоского графа $G=(V, E)$ виконується рівність

$$|V| - |E| + |P| = 2.$$

Наслідок 1. Кількість граней будь-якого плоского укладання зв'язного планарного графа з n вершинами і m ребрами є величиною сталою і дорівнює $m - n + 2$, тобто $|P| = |E| - |V| + 2$.

Інакше кажучи, число $|P|$ є інваріантом для заданого планарного графа G , тобто не залежить від способу укладання його на площині.

Наслідок 2. Для довільного зв'язного планарного графа $G=(V, E)$ з не менше ніж трьома вершинами виконується співвідношення

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

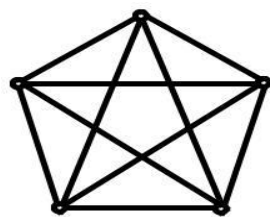
Наслідок 3. У будь-якому планарному графі є принаймні одна вершина, степінь якої не перевищує 5.

Наслідок 4. (узагальнення формули Ейлера). Для довільного планарного графа $G=(V, E)$ з k компонентами зв'язності виконується рівність

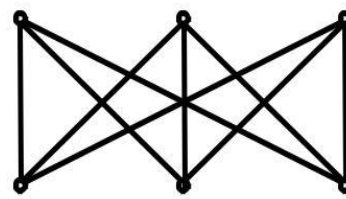
$$|V| - |E| + |P| = k + 1.$$

Наслідок 5. Кількість внутрішніх граней довільного плоского графа G дорівнює цикломатичному числу $\gamma(G)$ графа.

Наслідок 6. Графи G і \bar{G} не можуть бути одночасно планарними, якщо кількість вершин у них не менше 11. При дослідженні плоских графів особливе місце займають граfi K_5 і $K_{3,3}$, зображені на рис.25.



K_5



$K_{3,3}$

Рис.25

Теорема 4. Графи K_5 і $K_{3,3}$ не є планарними.

Значення графів K_5 і $K_{3,3}$ полягає в тому, що вони є "єдиними" суттєво непланарними графами. Всі інші непланарні графи містять у собі підграфи "подібні" до K_5 або $K_{3,3}$. Характер цієї подібності розкривається за допомогою таких понять.

Елементарним стягуванням графа $G=(V, E)$ називається вилучення в графі G деякого ребра $(v_i, v_j) \in E$ і злиття вершин v_i і v_j в одну вершину v , причому v інцидентна всім тим відмінним від (v_i, v_j) ребрам графа G , які були інцидентні або v_i , або v_j .

Кажуть, що граф G стягується до графа G' , якщо G' можна отримати з G за допомогою послідовності елементарних стягувань.

Приклад 35. На рис.26 зображено графи G і G' , при цьому G стягується до G' .

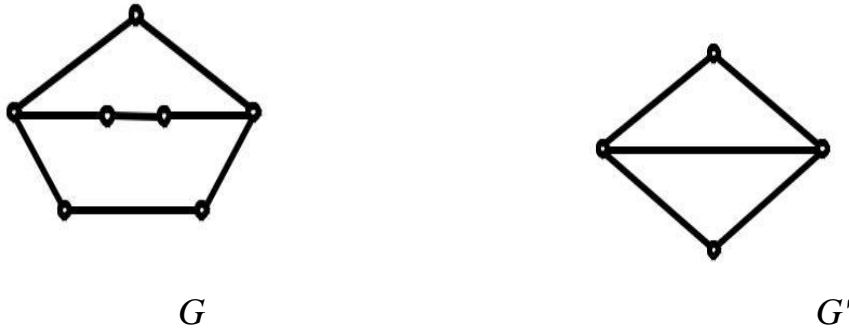


Рис.26

Наведемо важливу теорему теорії графів.

Теорема (Куратовського). Граф G є планарним тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфів, що стягуються до K_5 або $K_{3,3}$.

Ця теорема лежала в основі перших алгоритмів перевірки планарності графів. Час роботи таких алгоритмів пропорційний $|V|^6$.

Не потрібно доводити зростаючу складність пристроїв і систем. При їх проектуванні розробників, а пізніше і користувачів цих пристроїв та систем, цікавить питання про поведінку пристрою чи системим, якщо якісь складові (елементи, деталі) при роботі вийдуть з ладу. Це питання – одне з основних у сучасній теорії надійності технічних систем. Аналіз системної надійності пов'язаний з побудовою надійних схем, що є графами певного виду. Пристрій чи система, як відомо з теорії систем, виконують функцію, що не зможе виконати жоден з їхніх елементів. З'єднаємо елементи, вихід з ладу одного з яких, виводить з ладу систему (пристрій), послідовно; а елементи, вихід з ладу одного з яких не виводить з ладу систему (пристрій), паралельно. Вихід з ладу системи (пристрою) – це неможливість виконувати її функцію. Тоді одержуємо те, що називається надійнісною схемою у вигляді графа.

Приклад 36. Комп'ютер повинен обчислювати, вводити і виводити інформацію. Тоді, якщо в його складу входять: 1 процесор (ЦП), 1 оперативна пам'ять (ОП), 2 канали (ДО1 і ДО2), до обох з яких приєднано 2 пристрої вводу/виводу (ПВВ1 і ПВВ2), то надійнісну схему можна зобразити у вигляді рис. 27:

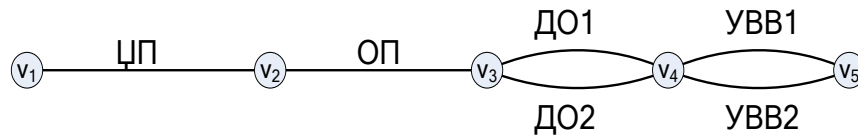


Рис. 27

Очевидно, що виконання системою функцій – це можливість пройти у графі з вершини v_1 до вершини v_5 . Зрозуміло, що для невиконання системою функцій, необхідно забрати ребра: або ЦП, або ОП, або ДО1 і ДО2, або ПВВ1 і ПВВ2. Для аналізу цих ситуацій і вводяться наступні поняття.

Розрізаючою множиною S зв'язного графа G назвемо таку підмножину ребер графа G , що вилучення їх із графа G розділяє останній, тобто граф $G \setminus S$ стає незв'язним.

Приклад 37. Граф G і компоненти зв'язності його підграфів G_1 і G_2 ,

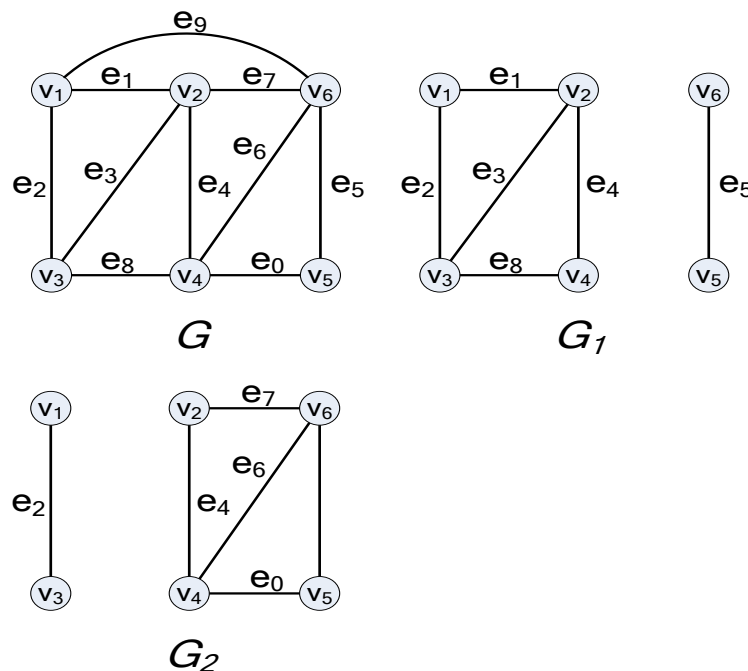


Рис. 28

отриманих вилученням ребер розрізаючих множин S_1 і S_2 графа G відповідно зображені на рис. 28.

Тут розрізаючі множини $S_1 = \{e_9, e_7, e_6, e_0\}$, $S_2 = \{e_9, e_1, e_3, e_8\}$.

Підмножина ребер $S_3 = \{e_9, e_1, e_3, e_6, e_8\}$, яка також перетворює граф G у незв'язний граф G_3 (рис. 29), є розрізаючою, причому має особливість, що відрізняє її від розрізаючих множин S_1 і S_2 .

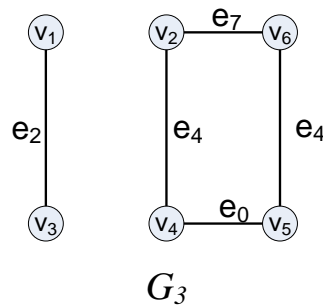


Рис. 29

Ця особливість полягає в тому, що з S_3 можна вилучити ребро e_6 , причому отримана множина $\{e_9, e_1, e_3, e_8\}$ також буде розрізаючою. У той же час ні S_1 ні S_2 не мають жодного такого ребра, вилучення якого залишало б їх розрізаючими множинами. Таким чином, розрізаючі множини S_1 і S_2 графа G мають властивість мінімальності.

Розрізом зв'язного графа G є така мінімальна множина S ребер графа G , що вилучення S розбиває граф G точно на дві компоненти.

Розріз графа G , який складається лише з одного ребра, називається *мостом*.

Розрізаючу множину можна визначити й іншим способом. Нехай V множина вершин зв'язного графа G . Нехай його підмножини V_1 і V_2 не перетинаються і такі, що $V = V_1 \cup V_2$. Тоді множина S усіх тих ребер, що мають одну вершину в підмножині V_1 , а іншу – у підмножині V_2 , називається розрізаючою множиною графа G . За звичай в такому випадку розрізаюча множина позначається $\langle V_1, V_2 \rangle$.

Якщо підграфи G_1 і G_2 , на які розбивається граф G після вилучення ребер

розрізаючої множини $\langle V_1, V_2 \rangle$, є зв'язними, то за означенням розрізу розрізаюча множина $\langle V_1, V_2 \rangle$ є розрізом графа G .

Нехай S – розріз графа G . Тоді множини V_1 і V_2 є відповідно множинами вершин двох компонентів G_1 і G_2 графа $G \setminus S$, де S – множина ребер розрізу. Тоді S , за означенням розрізаючої множини, є розрізаючою множиною. Отже, доведено наступну теорему.

Теорема 5. Розрізаюча множина $\langle V_1, V_2 \rangle$ зв'язного графа G є розрізом графа G , якщо після вилучення його ребер із графа G утвориться точно дві компоненти, причому множини V_1, V_2 є множинами їх вершин. Якщо S – розріз зв'язного графа G , а V_1, V_2 є відповідно множинами вершин двох компонентів G_1 і G_2 графа $G \setminus S$, то S – розрізаюча множина графа G .

Співвідношення між розрізами і розрізаючою множин виражає наступна теорема.

Теорема 6. Розрізаюча множина у зв'язному графі G є об'єднання декількох розрізів цього графа.

Задача про обходи графів, зокрема, задачі ейлеревих і, особливо гамільтонових ланцюгів і циклів часто зустрічаються на практиці. Наприклад, коли якість виконання деякого комплексу операцій істотно залежить від порядку, в якому вони виконуються.

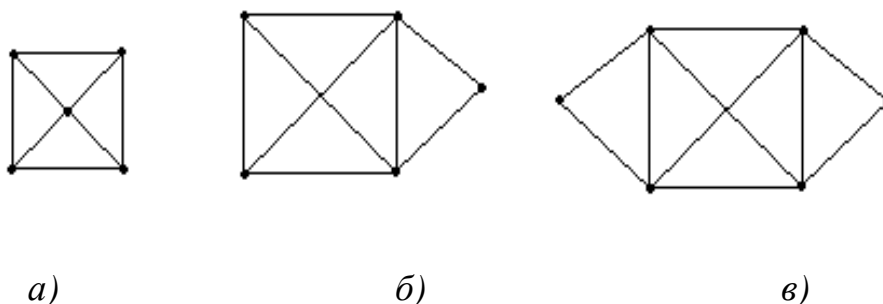


Рис. 30

Розглянемо два важливих класи зв'язних графів і їхні властивості.

Граф G називається *ейлеревим*, якщо існує замкнутий ланцюг, що

проходить через кожне його ребро (тільки один раз). Такий ланцюг називається *ейлеровим*. Якщо зняти обмеження на замкнутість ланцюга, то граф називається *напівейлеровим*.

На рис.230, *а, б, в*, зображено відповідно не ейлерів, напівейлерів і ейлерів графи.

За означенням, кожен ейлерів граф є напівейлеровим.

Для аналізу властивостей ейлерових графів скористаємось наступною лемою.

Лема 3. Якщо степінь кожної вершини графа G не менший двох, то граф містить цикл.

Теорема 7. Зв'язний граф $G = (V, E)$ є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли кожна вершина в G має парний степінь.

Наслідок. Граф є напівейлеровим тоді і тільки тоді, коли в ньому не більше двох вершин мають не парні степені.

Зауваження. Якщо напівейлерів граф містить рівно дві вершини з непарними степенями, то в будь-якому напівейлеровому ланцюгу одна з цих двох вершин обов'язково буде початковою, а друга - кінцевою. По лемі про рукопотискання граф не може мати лише одну вершину непарного степеня.

Теорема (Флері). Нехай $G = (V, E)$ – ейлерів граф. Тоді наступна процедура завжди можлива і веде до ейлерового ланцюга в графі G . Виходячи з будь-якої вершини $u \in V$, ідемо по ребрах графа G довільним чином за такими правилами:

- 1) стираємо пройдені ребра і стираємо ізольовані вершини, які при цьому виникають;
- 2) на кожному етапі йдемо по мосту лише тоді, коли немає інших можливостей.

Граф називається *гамільтоновим*, якщо у ньому є простий цикл, що містить кожну вершину цього графа. Такий цикл називається *гамільтоновим*.

Граф називається *напівгамільтоновим*, якщо він містить ланцюг, що

проходить через кожну його вершину.

На жаль, для довільного графа поки не отримані умови, необхідні і достатні для установлення його належності до гамільтонових графів, як це зроблено для ейлерових графів. Пошук критеріїв гамільтоновості графа – це одна з основних невирішених проблем теорії графів. Сформулюємо один з найбільш відомих результатів загального характеру.

Теорема (Дірака). Якщо в графі $G=(V, E)$ з $n \geq 3$ вершинами степінь кожної вершини $v \in V$ справджує нерівність $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$, то граф G є гамільтоновим.

Взаємозв'язки між ейлеровим і гамільтоновим графами покажемо на прикладі, зображеному на рис. 31. Тут кожен граф містить 8 вершин.

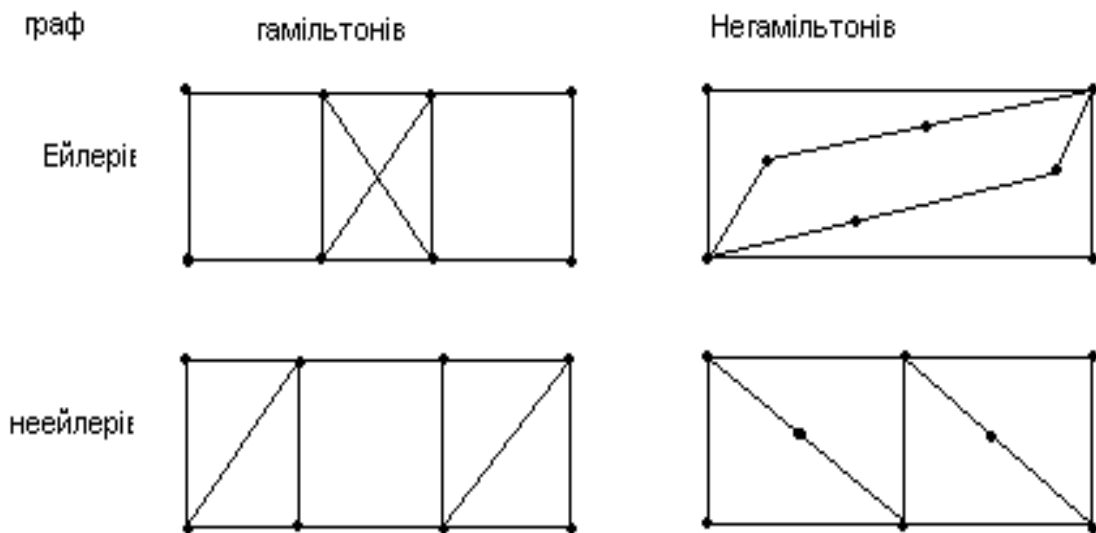


Рис. 31

Приклад 38. Дано граф $G(V, E)$, де V – множина вершин, а $E = \{ij\}$ – множина ребер, тут i – початкова вершина, j – кінцева вершина: $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $E = \{12, 13, 15, 24, 35, 36, 46, 56, 57, 58, 78\}$.

Потрібно: 1) нарисувати граф; 2) знайти ексцентриситети його вершин; 3) визначити радіус, діаметр та центр графа, його цикломатичне

число; 4) якщо граф планарний, то показати це; 5) знайти степені вершин графа; 6) перевірити чи є граф ейлеревим; 7) вилучити три вершини найменшого степеня, але таких, щоб граф залишився зв'язним; 8) записати матриці суміжності та інцидентності.

Розв'язання. 1. Рисуємо граф (рис. 2):

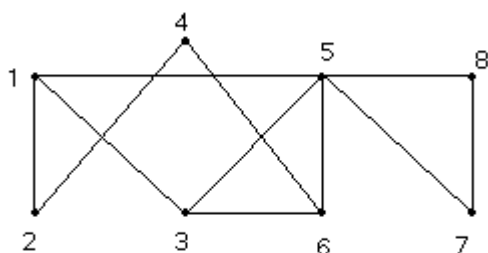


рис.2

2. Нагадаємо, що відстанню між двома вершинами v і w , які не збігаються, називається довжина найкоротшого (v, w) -маршруту і позначається $d(v, w)$. Якщо $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ – множина вершин графа, то матриця $M_d = (d_{ij})$, в якій $d_{ij} = d(v_i, v_j)$, називається матрицею відстаней. Для фіксованої вершини v величина $e(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$ називається ексцентриситетом вершини v , тобто ексцентриситет вершини дорівнює відстані від даної вершини до найбільш віддаленої від неї.

Для нашого прикладу знаходимо ексцентриситети вершин: $e(1)=2$, $e(2)=3$, $e(3)=2$, $e(4)=3$, $e(5)=2$, $e(6)=2$, $e(7)=3$, $e(8)=3$.

3. Максимальний серед усіх ексцентриситетів вершин називається діаметром графа G і позначається через $D(G)$: $D(G) = \max\{e(v) : v \in V\}$.

Вершина називається периферією, якщо $e(v) = D(G)$.

Мінімальний із ексцентриситетів графа G називається його радіусом і позначається через $r(G)$: $r(G) = \min\{e(v) : v \in V\}$.

Вершина називається центральною, якщо $e(a) = r(G)$.

Множина всіх центральних вершин графа називається його центром.

Для нашого прикладу маємо: $D(G) = 3$, $r(G) = 2$. Отже, вершини 3, 5, 6 – центральні, а 2, 4, 7, 8 – периферійні.

4. Якщо розташувати вершини і ребра, як показано на рис.3, то бачимо, що граф є планарним.

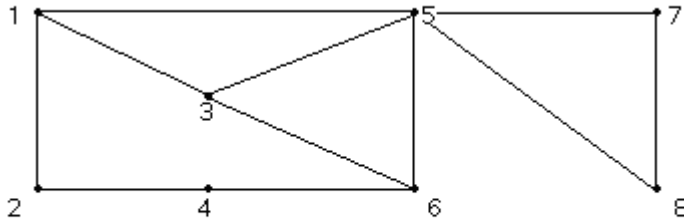


рис.3

5. Степенева послідовність графа буде такою $\deg v = \{3, 2, 3, 2, 5, 3, 2, 2\}$.

6. Граф не буде йлеревим тому, що він має вершини непарного степеня.

7. Вилучимо вершини 2, 4 і 8, отримаємо граф, який показано на рис.4.

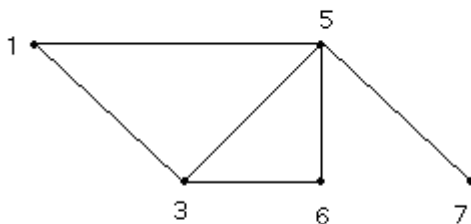


рис.4

8. Запишемо матрицю суміжності $A(G)$ неорієнтованого графа:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо ребра графа

$$e_1 = (1,2), e_2 = (1,3), e_3 = (1,5), e_4 = (2,4), e_5 = (3,5), e_6 = (3,6), \\ e_7 = (4,6), e_8 = (5,6), e_9 = (5,7), e_{10} = (5,8), e_{11} = (7,8).$$

Записуємо матрицю інцидентності $B(G)$:

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Граф $G = (V, E)$, елементам якого поставлені у відповідність певні характеристики або параметри, називають *мережею*, а самі характеристики – *функціями*. Функції можуть бути задані на таких елементах, як вершини, дуги, підмножини вершин та дуг.

На вершинах мережі визначимо *функцію інтенсивності*. Це така функція, яка кожній вершині $i \in V$ ставить у відповідність деяке число d_i . Ті вершини, для яких $d_i > 0$, називаються *джерелами* вершин, а для яких $d_i < 0$ – *стоками*, інші – *нейтральними*. Так для транспортної мережі джерелами є пункти постачання, стоками – пункти споживання, нейтральними пункти – де відсутнє виробництво і споживання.

На дугах можуть бути задані різні функції, одна з них - *пропускна спроможність*. Функція пропускної спроможності ставить у відповідність, кожній дузі (i, j) графа $G = (V, E)$ невід'ємне ціле число r_{ij} , яке називається пропускною спроможністю дуги. В транспортних задачах пропускна спроможність дуги визначає максимальну кількість продукції, яку відповідна комунікація може пропустити за одиницю часу.

Для наочності уявлятимемо, що по ребрах (i, j) , де $i < j$, з джерела S до стоку t прямує деяка речовина (вантаж, ресурс, інформація тощо).

Максимальна кількість r_{ij} , речовини, яку може пропустити за одиницю часу ребро (i, j) , називається його *пропускною спроможністю*. У загальному випадку $r_{ij} \neq r_{ji}$. На графі пропускні спроможності ребер вказуються в дужках: перше число — це пропускна спроможність в напрямі від вершини i до вершини j , друге — в протилежному напрямі. Якщо вершини k та l на мережі не сполучені, то $r_{kl} = r_{lk} = 0$.

Пропускні спроможності ребер мережі можна задати квадратною матрицею $R = (r_{ij})$ n -го порядку (n — число вершин мережі). Оскільки $r_{ii} = 0$, то головна діагональ матриці складається з нулів

Мережа — це скінченний граф без циклів і петель, орієнтований в одному загальному напрямі від вершини S , що є *входом* (джерелом) графа, до вершини t , що є *виходом* (стоком) графа.

Отже, *мережа* – це граф $G = (V, E)$, в якому:

- 1) кожній дузі приписане ціле невід'ємне число, яке називається *пропускною здатністю дуги*;
- 2) відокремлено дві вершини – S та t . При цьому в графі G немає дуг, які заходять у вершину S , і немає дуг, які виходять з вершини t . Ці дві вершини називаються відповідно *джерелом* та *стоком*.

Можна надати різні інтерпретації поняттю транспортної мережі.

Наприклад, у вершині S є необмежений запас певного продукту і треба організувати доставку цього продукту до вершини t мережею шляхів сполучання з проміжними вершинами u, v, \dots . Нехай пропускна здатність дуги у випадку, що розглядається – це кількість вантажу, який можна перевезти за одиницю часу даною дугою.

Виникає *задача*: організувати перевезення мережею в такий спосіб, щоб, не перевищуючи пропускних здатностей дуг, перевозити з S у t максимальну кількість вантажу за одиницю часу.

Інша інтерпретація: наприклад, дуги – це труби різних діаметрів, ними з S до t перекачується рідина.

Інша задача: наприклад, електрична мережа, якою з S до t передається електричний струм.

Основним поняттям теорії мереж є поняття потоку по мережі.

Кількість x_{ij} речовини, що проходить через ребро (i, j) за одиницю часу, називається *поток*ом по ребру (i, j) . У теорії потоків передбачається, що якщо з вершини i у вершину j прямує потік величиною x_{ij} то величина потоку з j у вершину i дорівнює $-x_{ij}$, тобто

$$x_{ji} = -x_{ij}.$$

Приймається також, що $x_{ii} = 0$.

Сукупність $X = (x_{ij})$ потоків по всіх ребрах (i, j) мережі називають *поток*ом по мережі або просто *поток*ом.

Потік по кожному ребру не перевищує його пропускну здатність:

$$0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}, (i, j) \in E$$

Кількість речовини, що втікає у вершину, дорівнює кількості речовини, що витікає з неї:

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 0, i \neq S, t.$$

Формуючи потік на мережі, необхідно враховувати наведені вище

властивості.

З властивостей потоків по ребрах мережі витікає, що загальна кількість речовини, витікаючої з джерела S , співпадає із загальною кількістю речовини, що надходить до стоку t , тобто

$$f = \sum_j x_{sj} = \sum_i x_{it}$$

Лінійну функцію f називають *потужністю потоку на мережі*.

Основна задача. Для заданої транспортної мережі знайти потік, який має найбільшу величину. Такий потік називається *максимальним*. Це означає: знайти сукупність $X = (x_{ij})$ потоків x_{ij} по всіх ребрах (i, j) мережі, яка задовольняє властивостям і максимізує функцію f .

Щоб привести алгоритм розв'язання сформульованої основної задачі, потрібно нагадати деякі важливі поняття. Припустимо, що дана деяка мережа $G = (V, E)$. Розіб'ємо множину вершин V цієї мережі на дві підмножини A та B , що не перетинаються, так, щоб джерело S потрапило до підмножини A , а стік t — до підмножини B . В цьому випадку кажуть, що на мережі проведений розріз, що відокремлює джерело S від стоку t . Точніше: сукупність ребер (i, j) , початкові вершини яких належать підмножині A , а кінцеві — підмножині B , називають *розрізом мережі* і позначають $A \setminus B$.

Якщо на мережі заданий деякий потік $X = (x_{ij})$, то ребро (i, j) називають *насиченим*, якщо потік x_{ij} по ньому співпадає з його пропускнуною спроможністю r_{ij} ($x_{ij} = r_{ij}$), і *ненасиченим*, якщо потік менший від пропускнуною спроможності ($x_{ij} < r_{ij}$).

Величина

$$R(A \setminus B) = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} r_{ij}$$

є сумою пропускнуних спроможностей r_{ij} всіх ребер розрізу і називається *пропускнуною спроможністю розрізу*.

Величина

$$X(A/B) = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} x_{ij},$$

що є сумою потоків x_{ij} по всіх ребрах розрізу, називається *поток* через розріз.

Важливе значення має наступна теорема.

Теорема (Форда – Фалкерсона). Для довільної мережі з одним джерелом S і одним стоком t величина максимального потоку із S в t дорівнює пропускній спроможності мінімального розрізу, який відокремлює S від t .

Наведемо один із *алгоритмів* побудови максимального потоку.

1. Будується деякий початковий потік $X^0 = (x_{ij}^0)$.

2. Організовується процедура складання підмножини A вершин, досяжних з джерела S по ненасичених ребрах. Якщо в цьому процесі стік t не потрапить до підмножини A , то побудований потік є максимальним і задача розв'язана. Якщо ж t потрапив до A , то перейти до наступного пункту алгоритму.

3. Виділити шлях із S в t , що складається з ненасичених ребер, і збільшити потік x_{ij} по кожному ребру цього шляху на

$$\Delta = \min(r_{ij} - x_{ij}),$$

де мінімум береться по ребрах (i, j) згаданого шляху. Тим самим буде побудований новий потік $X^1 = (x_{ij}^1)$. Після цього потрібно повернутися до п. 2 алгоритму.

Приклад 39. На мережі (рис. 32) вказані пропускні спроможності ребер, однакові в обох напрямках.

Потрібно: 1) сформувати на мережі потік максимальної потужності, що виходить з джерела S і входить в стік t ; 2) виписати ребра, які утворюють розріз мінімальної пропускної спроможності.

Розв'язання. 1. Сформуємо на мережі початковий потік X^0 . Виберемо шляхи із джерела до стоку, наприклад:

- а) 1-2-5-8-10 $\rightarrow \min \{8; 4; 3; 2\}=2,$
- б) 1-2-6-10 $\rightarrow \min \{6; 2; 5\}= 2,$
- в) 1-4-5-10 $\rightarrow \min \{2; 7; 3\}= 2,$
- г) 1-2-4-9-10 $\rightarrow \min \{4; 5; 3; 8\}= 3,$
- д) 1-3-9-10 $\rightarrow \min \{7; 4; 5\}= 4,$
- е) 1-3-7-10 $\rightarrow \min \{3; 3; 7\}= 3.$

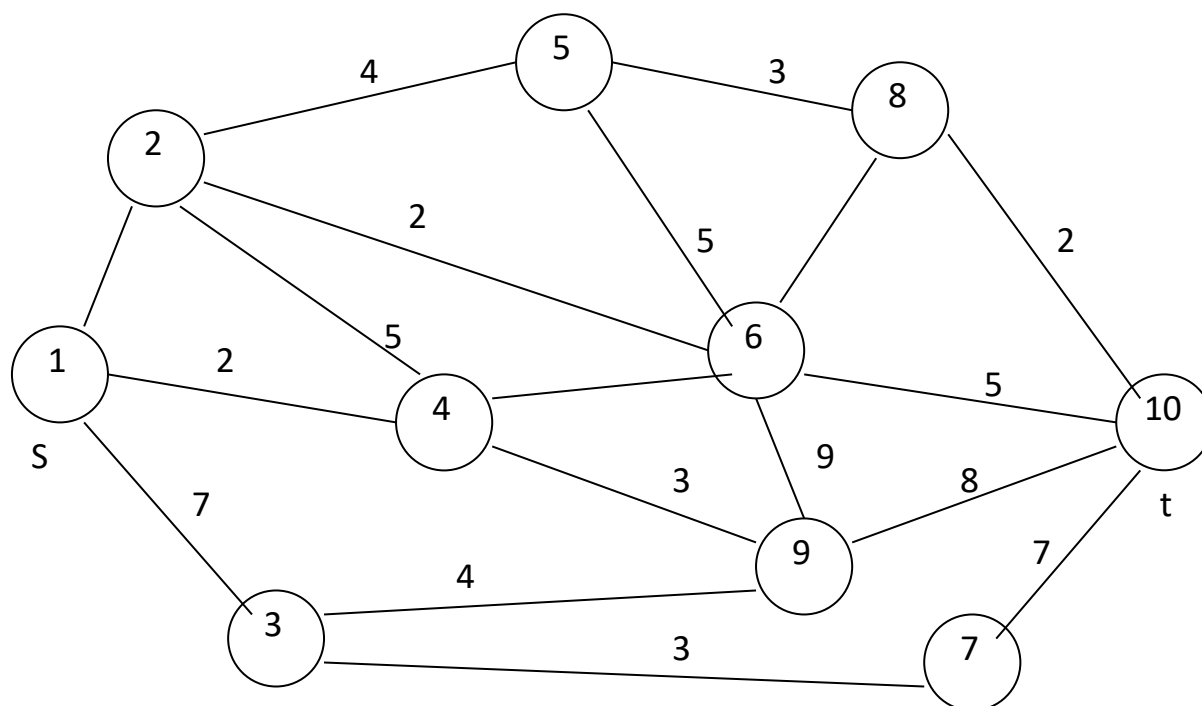


Рис. 32

Запишемо матрицю R пропускних спроможностей і початковий потік X^0 .

R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	8	7	2	0	0	0	0	0	0
2	8	0	0	5	4	2	0	0	0	0
3	7	0	0	0	0	0	3	0	4	0
4	2	5	0	0	0	7	0	0	3	0
5	0	4	0	0	0	5	0	3	0	0
6	0	2	0	7	5	0	0	7	9	5
7	0	0	3	0	0	0	0	0	0	7
8	0	0	0	0	3	7	0	0	0	2
9	0	0	4	3	0	9	0	0	0	8
10	0	0	0	0	0	5	7	2	8	0

X^0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	7	7	2	0	0	0	0	0	0
2	-7	0	0	3	2	2	0	0	0	0
3	-7	0	0	0	0	0	3	0	4	0
4	-2	-3	0	0	0	2	0	0	3	0
5	0	-2	0	0	0	0	0	2	0	0
6	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	4
7	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	3
8	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	2
9	0	0	-4	-3	0	0	0	0	0	7
10	0	0	0	0	0	-4	-3	-2	-7	0

Знаходимо матрицю $R - X^0$.

$R-X^0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	15	0	0	2	2	0	0	0	0	0
3	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	4	8	0	0	0	5	0	0	0	0
5	0	6	0	0	0	5	0	1	0	0
6	0	4	0	9	5	0	0	7	9	1
7	0	0	6	0	0	0	0	0	0	4
8	0	0	0	0	5	7	0	0	0	0
9	0	0	8	6	0	9	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	9	10	4	15	0

За цією матрицею складемо список вершин, в які можна потрапити із джерела S , рухаючись по ненасичених ребрах:

$$1 \parallel 2, 2 \parallel 4, 4 \parallel 6, 6 \parallel 10.$$

Оскільки одержаний список містить стік t , то потік не є максимальним; його можна збільшити. Із матриці $R - X^0$ видно, що по шляху 1-2-4-6-10 можна збільшити потік на величину

$$\Delta = \min \{1; 2; 5; 1\} = 1.$$

Приходимо до матриці X^1 :

X^1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	8	7	2	0	0	0	0	0	0
2	-8	0	0	4	2	2	0	0	0	0
3	-7	0	0	0	0	0	3	0	4	0
4	-2	-4	0	0	0	3	0	0	3	0
5	0	-2	0	0	0	0	0	2	0	0
6	0	-2	0	-3	0	0	0	0	0	5
7	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	3
8	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	2
9	0	0	-4	-3	0	0	0	0	0	7
10	0	0	0	0	0	-5	-3	-2	-7	0

Випишемо матрицю $R - X^1$:

$R-X^1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	16	0	0	1	2	0	0	0	0	0
3	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	4	9	0	0	0	4	0	0	0	0
5	0	6	0	0	0	5	0	1	0	0
6	0	4	0	10	5	0	0	7	9	0
7	0	0	6	0	2	0	0	0	0	4
8	0	0	0	0	5	7	0	0	0	0
9	0	0	8	6	0	9	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	10	10	4	15	0

Видно, що $r_{1j} - x_{1j}^1 = 0$, тому всі ребра, що виходять з джерела $S=1$ є насиченими. Це означає, що не існує більше ненасиченого шляху із S в t і одержаний потік є максимальної потужності.

2. Ребра 1-2, 1-3, 1-4 утворюють розріз мінімальної пропускної спроможності, через який протікає потік $8+2+7=17$ од.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

5.1. Нехай задано граф $G=(V,E)$:

а) $V = \{1,2,3,4\}$, $E = \{(1,3),(2,3),(3,4),(4,1),(4,2)\}$;

б) $V = \{a,b,c,d,e\}$, $E = \{(a,d),(b,c),(b,e),(c,e),(d,b),(d,e),(e,a)\}$;

в) $V = \{1,2,3\}$, $E = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$;

г) $V = \{A, B, C, D\}$, $E = \{(A, B), (A, D), (B, C), (B, D), (C, A), (C, D)\}$.

Побудувати діаграму, матриці суміжності та інцидентності для кожного із заданих графів.

5.2. Нехай $V = \{a, b, c, d, e\}$. Граф $G = (V, E)$ задано за допомогою матриці суміжності A .

а) $A = \begin{pmatrix} 01101 \\ 10011 \\ 10001 \\ 01000 \\ 11100 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 00101 \\ 00100 \\ 11011 \\ 00101 \\ 10110 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 01001 \\ 10100 \\ 01010 \\ 00101 \\ 10010 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 01100 \\ 10100 \\ 11000 \\ 00000 \\ 00000 \end{pmatrix}$.

Визначити множину ребер E графа G . Побудувати діаграму та матрицю інцидентності графа G .

5.3. Граф G задано його діаграмою (рис.33).

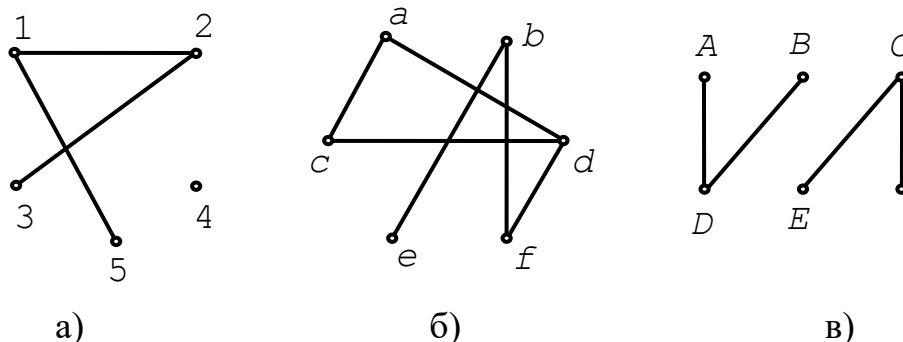


Рис.33

Визначити множину вершин V і множину ребер E , матриці суміжності та інцидентності графа G .

5.4. Чому дорівнює степінь кожної вершини у повному графі з n вершинами?

5.5. Нарисуйте діаграму повного графа з n вершинами K_n для

а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) $n = 4$; г) $n = 5$.

5.6. Скільки ребер містить повний граф із n вершинами?

5.7. Чи існує повний граф, у якого кількість ребер дорівнює

- а) 15; б) 18.

5.8. Чому дорівнює кількість ребер у графі \bar{G} , якщо граф G має n вершин і k ребер?

5.9. Нехай задано матрицю суміжності A деякого графа G . Як за допомогою матриці A визначити

- а) кількість вершин графа G ;
б) кількість ребер графа G ;
в) степінь $\deg(v)$ певної вершини v графа G ;
г) чи є граф G повним графом;
д) матрицю інцидентності графа ?

5.10. Скільки ребер у графі з n вершинами, якщо всі його вершини мають степінь 2?

5.11. Довести, що в будь-якому графі кількість вершин, степінь яких непарний, є парною.

5.12. Побудувати кубічний граф із

- а) чотирма вершинами;
б) шістьма вершинами;
в) вісьмома вершинами.

5.13. Побудуйте граф із п'ятьма вершинами, в якому тільки дві вершини мають однакові степені.

5.14. У графі з п'ятьма вершинами тільки дві вершини мають однакові степені. Чи можуть обидві ці вершини мати степінь 0 або степінь 4?

5.15. Чи існує граф із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють

- а) 2,3,3,4,4,4;
б) 2,2,2,4,5,5?

Відповідь обґрунтувати.

5.16. Знайти нетривіальний самодоповнювальний граф із найменшою кількістю вершин.

5.17. Довести, що існує тільки один самоповнювальний граф із чотирма вершинами.

5.18. Довести, що існує тільки два самоповнювальні графи з п'ятьма вершинами.

5.19. Довести, що кількість вершин будь-якого самоповнювального графа дорівнює або $4k$, або $4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

5.20. Довести, що довільний самоповнювальний граф містить або $4k^2 - k$, або $4k^2 + k$ ребер, $k \in \mathbb{N}$.

5.21. Нарисувати всі попарно неізоморфні графи з n вершинами для
а) $n=2$; б) $n=3$; в) $n=4$; г) $n=5$.

5.22. Позначимо через $n_k(G)$ кількість вершин степеня k в графі G . Побудувати всі попарно неізоморфні графи G , в яких

а) $n_2(G)=1$, $n_3(G)=n_4(G)=2$ і $n_k(G)=0$ для $k \in \{2,3,4\}$;

б) $n_2(G)=3$, $n_3(G)=2$, $n_4(G)=1$ і $n_k(G)=0$ для $k \in \{2,3,4\}$;

в) $n_2(G)=n_3(G)=n_4(G)=2$ і $n_k(G)=0$ для $k \in \{2,3,4\}$.

5.23. Побудувати всі попарно неізоморфні графи із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють $2,2,3,3,3,5$.

5.24. Скільки існує попарно неізоморфних кубічних графів з шістьма вершинами?

5.25. Скільки існує попарно неізоморфних графів, які мають

а) 6 вершин і 11 ребер;

б) 7 вершин і 18 ребер;

в) 8 вершин і 24 ребра;

г) 8 вершин, сума всіх степенів яких не менша від 53;

д) 10 вершин і 43 ребра;

е) n вершин і $n(n-1)/2 - 2$ ребра?

5.26. На рис.34 зображено граф G .

а) Знайти всі ланцюги, що ведуть із вершини v_1 у v_{12} .

б) Знайти всі прості ланцюги, що ведуть із вершини v_1 у v_{12} .

- в) Знайти ланцюг, що веде з вершини v_1 у v_{12} і містить усі вершини графа G .
- г) Чи існує в графі G простий ланцюг, що веде з вершини v_1 у v_{12} і містить усі вершини графа G ?
- д) Знайти маршрут у графі G , який веде з v_1 у v_{12} і не є ланцюгом.
- е) Знайти маршрут у графі G , який веде з v_1 у v_{12} , містить усі вершини графа G і не є ланцюгом.
- є) Знайти який-небудь цикл у графі G .
- ж) Знайти всі прості цикли графа G .

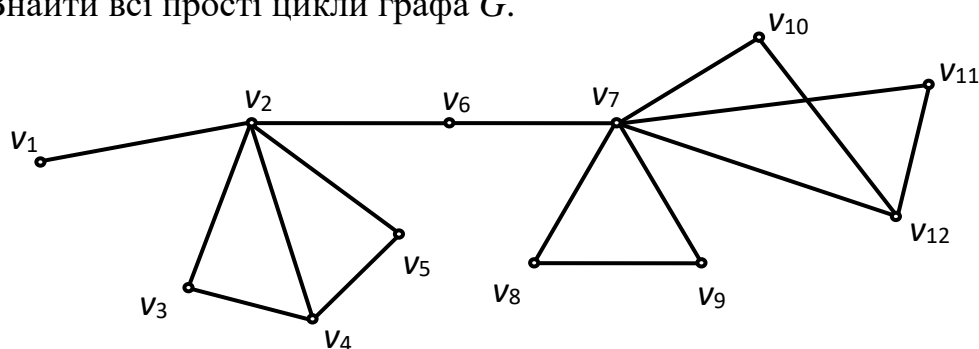


Рис.34

5.27. Знайти в графі K_5 цикли довжини

- а) 3; б) 4; в) 5; г) 6; д) 10.

Які з цих циклів є простими?

5.28. Чи існує в графі K_5 цикл довжини 9? Відповідь обґрунтувати.

5.29. Скільки ребер містить

- а) простий ланцюг із k вершин;
 б) простий цикл із k вершин;
 в) найкоротший простий цикл?

5.30. Скільки існує попарно неізоморфних графів, які мають

- а) 6 вершин, 7 ребер і 2 компоненти зв'язності;
 б) 8 вершин, 6 ребер і 2 компоненти зв'язності;
 а) 8 вершин, 6 ребер і 3 компоненти зв'язності?

5.31. Побудувати всі попарно неізоморфні графи з шістьма вершинами,

які мають

- а) 4 компоненти зв'язності;
- б) 3 компоненти зв'язності;
- в) одну компоненту зв'язності, 7 ребер і тільки 2 кінцеві вершини.

5.32. Довести, що самодоповнювальний граф є завжди зв'язним.

5.33. Побудувати всі попарно неізоморфні зв'язні графи без циклів із п'ятьма вершинами. Скільки ребер мають ці графи?

5.34. Побудувати зв'язний граф із сімома вершинами й шістьма ребрами.

5.35. Довести, що для довільного графа $T=(V,E)$ з n вершинами ($n \geq 2$) і m ребрами такі твердження є рівносильними:

1) T – дерево (ациклічний зв'язний граф);

2) T – зв'язний граф і $m=n-1$;

3) T – ациклічний граф і $m=n-1$;

4) для будь-яких вершин v і w в графі T існує тільки один простий ланцюг, що веде з v у w ;

5) T – зв'язний граф, але після вилучення будь-якого ребра в ньому стає незв'язним;

6) T – ациклічний граф, але після проведення ребра між будь-якою парою несуміжних вершин v і w у графі з'являється один простий цикл;

7) T – зв'язний граф, відмінний від K_n , і після проведення ребра між будь-якою парою несуміжних вершин v і w у графі з'являється один простий цикл;

8) T – зв'язний граф і кожний його блок ізоморфний K_2 .

5.36. Побудувати всі попарно неізоморфні дерева з трьома, чотирма і п'ятьма вершинами.

5.37. Побудувати всі попарно неізоморфні дерева, які мають

- а) 6 ребер та 3 кінцеві вершини;
- б) 6 ребер та 4 кінцеві вершини;
- в) 7 ребер та 3 кінцеві вершини;

г) 8 ребер та 3 вершини степеня 3.

5.38. Переконатись у тому, що всі графи, зображені на рис.2, є планарні.

Побудувати для них плоскі карти.

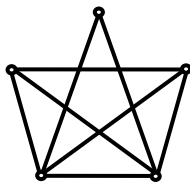
5.39. Чи існує планарний граф, який має:

а) 7 вершин і 16 ребер;

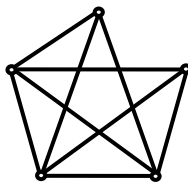
б) 8 вершин і 17 ребер?

5.40. Чи існує непланарний граф із чотирма вершинами?

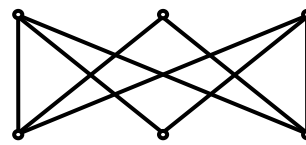
5.41. Показати, що всі графи, зображені на рис.35, планарні.



а)



б)



в)

Рис.35

5.42. Яку найбільшу кількість граней може мати плоский граф із п'ятьма вершинами? Побудувати цей граф.

5.43. Чи існує плоский граф із шістьма вершинами, що має 9 граней?

5.44. Побудувати всі попарно неізоморфні плоскі графи з шістьма вершинами, що мають 8 граней.

5.45. Довести, що повний граф із п'ятьма вершинами K_5 не є планарним.

5.46. Довести, що повний двочастковий граф $K_{3,3}$ не є планарним.

5.47. Побудувати всі непланарні графи з 6 вершинами та 11 ребрами.

Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 9. Дано граф $G(V, E)$, де V – множина вершин, $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ і множина ребер $E = \{ij\}$, де i – початкова вершина; j – кінцева вершина. Множина ребер E задана для кожного варіанта. Потрібно:

- 1) нарисувати граф;
- 2) знайти ексцентриситети його вершин;
- 3) визначити радіус, діаметр та центр графа, його цикломатичне число;

4) якщо граф планарний, то показати це; 5) знайти степені вершин графа; 6) перевірити чи є граф ейлеревим; 7) вилучити три вершини найменшого степеня, але таких, щоб граф залишився зв'язним; 8) записати матриці суміжності та інцидентності.

$$9.1. E = \{12, 13, 14, 16, 24, 34, 36, 46, 56, 57, 58, 78\}.$$

$$9.2. E = \{14, 23, 24, 34, 36, 45, 46, 47, 48, 57, 58, 67, 78\}.$$

$$9.3. E = \{12, 13, 23, 24, 34, 45, 56, 57, 67, 68, 78\}.$$

$$9.4. E = \{13, 16, 23, 36, 45, 46, 56, 57, 58, 68, 78\}.$$

$$9.5. E = \{12, 16, 24, 34, 36, 45, 46, 47, 56, 57, 68, 78\}.$$

$$9.6. E = \{12, 13, 16, 23, 34, 45, 46, 56, 57, 58, 68, 78\}.$$

$$9.7. E = \{13, 14, 23, 34, 35, 36, 45, 46, 56, 58, 68, 78\}.$$

$$9.8. E = \{12, 14, 24, 34, 36, 38, 45, 46, 56, 58, 67, 68\}.$$

$$9.9. E = \{12, 13, 14, 16, 23, 25, 35, 47, 57, 58, 67, 78\}.$$

$$9.10. E = \{14, 23, 36, 45, 46, 48, 56, 57, 58, 67, 68, 78\}.$$

$$9.11. E = \{12, 13, 14, 34, 36, 46, 47, 56, 57, 58, 78\}.$$

$$9.12. E = \{12, 13, 14, 23, 34, 36, 45, 57, 67, 78\}.$$

$$9.13. E = \{12, 15, 16, 23, 24, 45, 46, 48, 56, 58, 68, 78\}.$$

$$9.14. E = \{12, 23, 34, 35, 36, 45, 46, 56, 58, 67, 78\}.$$

$$9.15. E = \{12, 13, 14, 23, 24, 34, 36, 46, 56, 57, 78\}.$$

$$9.16. E = \{12, 13, 14, 24, 34, 45, 46, 56, 57, 58, 68, 78\}.$$

$$9.17. E = \{12, 13, 14, 23, 24, 34, 36, 46, 57, 58, 68, 78\}.$$

$$9.18. E = \{14, 16, 24, 34, 36, 45, 46, 47, 56, 58, 67, 68\}.$$

$$9.19. E = \{12, 13, 14, 16, 23, 34, 56, 57, 58, 67, 68, 78\}.$$

$$9.20. E = \{14, 17, 23, 28, 34, 35, 36, 45, 46, 56, 58, 67\}.$$

$$9.21. E = \{12, 13, 14, 23, 24, 34, 35, 36, 45, 46, 56, 58, 67\}.$$

$$9.22. E = \{12, 13, 24, 34, 35, 36, 45, 46, 56, 57, 68\}.$$

$$9.23. E = \{12, 13, 14, 23, 24, 34, 36, 45, 56, 58, 67, 78\}.$$

$$9.24. E = \{12, 14, 34, 45, 46, 47, 56, 57, 58, 67, 68, 78\}.$$

$$9.25. E = \{12, 14, 17, 23, 28, 36, 45, 57, 58, 67, 68, 78\}.$$

$$9.26. E = \{12, 13, 15, 16, 25, 35, 38, 46, 56, 57, 58, 78\}.$$

$$9.27. E = \{12, 23, 25, 35, 36, 45, 47, 48, 57, 58, 67, 78\}.$$

$$9.28. E = \{12, 15, 23, 25, 34, 45, 56, 57, 67, 68, 78\}.$$

$$9.29. E = \{14, 16, 23, 36, 45, 47, 56, 57, 58, 67, 78\}.$$

$$9.30. E = \{12, 15, 24, 34, 36, 45, 47, 48, 56, 57, 68, 78\}.$$

Завдання 10. Орієнтовані графи G_1 і G_2 задано матрицями суміжності.

Потрібно: 1) побудувати зображення графів G_1 та G_2 ; 2) для кожної вершини графів визначити степені входу і виходу та з'ясувати наявність джерел і стоків у графах; 3) визначити, чи має граф G_1 цикли, побудуйте два його підграфи; 4) вказати який із графів G_1 і G_2 є зв'язним, сильно зв'язним; 5) на графі G_2 визначити маршрут, орланцюг, простий орланцюг, замкнутий орланцюг, цикл; 6) знайти кількість орієнтованих шляхів довжиною три із вершини v_i у v_j графу G_2 .

Варіант	G_1	G_2
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

24	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
26	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
30	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & - & 1 \end{pmatrix}$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Андерсон Дж.* Дискретная математика и комбінаторика / *Дж. Андерсон.* – М.: ИД “Вильямс”, 2004. – 960 с.
2. *Бардачов Ю.М.* Дискретна математика / *Ю.М. Бардачов, Н.А. Соколова., В.Є. Ходаков.* – К.: Вища школа, 2008. – 383 с.
3. *Бондаренко М.Ф.* Комп’ютерна дискретна математика: Підручник / *М.Ф. Бондаренко, Н.В. Білоус, А.Г. Руткас.* – Харків: “Компанія СМІТ”, 2004. – 480 с.
4. *Бондаренко М. Ф.* Збірник тестових завдань з дискретної математики / *М. Ф. Бондаренко, Н. В. Білоус, І. Ю. Шубін та ін.* – Харків: ХТУРЕ, 2000. – 156 с.
5. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика / *Н. Я. Виленкин.*— М.: Наука, 1969. – 328 с.
6. *Гаврилов Г.П.* Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие – 3-е изд. перераб. / *Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.
7. *Ежов И.И.* Элементы комбинаторики / *И.И. Ежов, А.В. Скороход, М.И. Ядренко.* – М.: Наука, 1975. - 79 с.
8. *Капітонова Ю.В.* Основи дискретної математики: Підручник / *Ю.В. Капітонова., С.Л. Кривий., О.А. Лещевський., Г.М. Луцький., М.К. Печурін.* – К.: Наукова думка, 2002. – 580 с.
9. *Кузнецов А.П.* Дискретная математика для инженера / *А.П. Кузнецов, Г.М. Адельсон-Вельский.* – М.: Энергия, 1980. – 344 с.
10. *Кук Д.* Компьютерная математика / *Д. Кук, Г. Бейз.* – М.: Наука, 1990. – 384 с.
11. *Нікольський Ю.В.* Дискретна математика. Підручник / *Ю.В. Нікольський, В.В. Пасічник, Ю.М. Щербина.* – Львів: “Магнолія – 2006”, 2010. – 432 с.
12. *Плотников А.Д.* Дискретная математика: Учеб. пособие / *А.Д. Плотников.* – М.: Новое знание, 2005. – 288 с.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
Модуль №1 " Множини. Відношення. Комбінаторика ".....	3
Тема 1. Множини.....	3
Завдання для аудиторної та самостійної роботи.....	17
Тема 2. Відношення.....	22
Завдання для аудиторної та самостійної роботи.....	44
Тема 3. Комбінаторика	46
Завдання для аудиторної та самостійної роботи.....	57
Індивідуальні завдання для самостійної роботи.....	60
<i>Завдання 1</i>	60
<i>Завдання 2</i>	61
<i>Завдання 3</i>	64
<i>Завдання 4</i>	65
<i>Завдання 5</i>	67
Модуль №2 " Алгебраїчні системи. Булеві алгебри ".....	74
Тема 4. Булева алгебра	74
Завдання для аудиторної та самостійної роботи.....	84
Індивідуальні завдання для самостійної роботи.....	92
<i>Завдання 6</i>	92
<i>Завдання 7</i>	93
<i>Завдання 8</i>	94
Модуль №3 " Теорія графів ".....	95
Тема 5. Елементи теорії графів	95
Завдання для аудиторної та самостійної роботи.....	132
Індивідуальні завдання для самостійної роботи.....	138
<i>Завдання 9</i>	138
<i>Завдання 10</i>	140
Література.....	145