

## Зміст

---

1. Класифікація, типи і завдання експерименту .....	1
2. Основні питання методології експериментальних досліджень .....	2
3. Розробка план-програми експерименту .....	3
4. Теорія подібності. Види подібності. Числа подібності .....	4
5. Вимірювання, їх види і класи .....	7
6. Помилки і похибки вимірювань, їх види. Природа виникнення, основні принципи і методи їх усунення.....	8
7. Визначення мінімальної кількості вимірювань.....	15

### 1. Класифікація, типи і завдання експерименту

---

За кількістю змінних експерименти класифікують на одно- і багатофакторні. При однофакторних експериментах змінам та реєстрації підлягає один фактор (одна незалежна змінна), при багатофакторних – кілька факторів або незалежних змінних.

Об'єкти досліджень в експериментах діляться на статистичні й детерміновані, керовані й некеровані.

У статистичних об'єктах відгук (випадкова залежна змінна  $y$ ) знаходиться в стохастичному зв'язку з випадковими або не випадковими факторами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Так в механообробленні, прикладом зв'язку з випадковими факторами є залежність характеристик якості готових деталей від характеристик якості заготовок при їх обробленні, а зв'язки з не випадковими факторами – залежність характеристик якості готових деталей від режимів оброблення.

Стохастичний зв'язок проявляється в тому, що зміна незалежної величини призводить до зміни закону розподілу залежної випадкової величини. Найпростішим її видом є зв'язок, при якому зі зміною незалежної змінної змінюється математичне очікування чи середнє значення відгуку.

Для детермінованих об'єктів характерні функціональні зв'язки між не випадковими величинами, коли кожному значенню аргумента відповідає конкретне значення функції.

Керованість об'єкта визначають можливість відтворення на ньому результатів дослідження. Для перевірки цієї властивості можна провести експеримент при деяких обраних рівнях досліджуваних факторів, а потім повторити його кілька разів через нерівні проміжки часу і порівняти результати.

Відтворюваність результатів характеризують розподілом їх значень. Якщо він не перевищує деякої задалегідь заданої величини (наприклад вимог до точності експерименту), то об'єкт задовольняє вимогам відтворюваності результатів експерименту.

Залежно від способу вибору рівнів факторів (значень незалежних змінних) експерименти діляють на пасивні й активні. Експеримент, в якому рівні факторів в кожному досліді задає дослідник, називають активним. Експеримент, при якому рівні факторів в кожному досліді реєструє дослідник називають пасивним.

*Експериментальні дослідження класифікують також на якісні (з метою встановлення лише факту існування явища) і кількісні, лабораторні та промислові. Останнім часом все більшого поширення набувають автоматизовані експериментальні дослідження.*

Розрізняють також експерименти: *відсіваючі, порівняльні* (порівняння двох або кількох об'єктів і вибір кращого з них за заданими критеріями якості), *екстремальні* (знаходження екстремуму функції відгуку, за яким оптимізують параметри об'єкта або режими протікання процесів за допомогою автоматичного керування), *описові* (визначення механізмів явищ і характеру протікання процесів для їх аналізу і подальшої постановки завдань синтезу) та експерименти зі *складання діаграм стану* (варіант описових експериментів).

Різновидом експериментальних досліджень можуть бути і різного роду *випробування*: попередні заводські випробування дослідного зразка, приймальні випробування доопрацьованих зразків, які готують до масового випуску (з дослідної партії або установочної серії); контрольні випробування при масовому виробництві машин та випробування зразків після капітального ремонту. На всіх етапах випробувань виконують різноманітні технологічні, експлуатаційні й технічні експерименти, передбачені програмами випробувань з різних видів оцінок. За результатами випробувань приймають рішення про проведення доопрацювання машин, покращення їх агрегування з енергетичними засобами, випуску дослідних партій для перевірки і постановки на виробництво.

При всьому неосяжному різноманітті цілей, які може поставити перед собою дослідник, *завдання експерименту*, як правило, можна віднести до одного з таких типів:

– *завдання вимірювання деякої величини при фіксованих умовах* (для отримання довідникових даних, які потім будуть використовувати в теоретичних чи конструкторських розрахунках);

– *завдання перевірки гіпотези* (підтвердити (або спростувати) за допомогою експерименту ту чи іншу теорію; довести, що вироби, виконані за новою технологією, перевершують за своїми параметрами старі зразки; виявити фактори, що впливають на цікавлячу дослідника величину (наприклад, термін служби приладу); виявити зв'язок між різними характеристиками об'єктів (або підтвердити відсутність такого зв'язку) та інше). Завдання такого роду вирішують за алгоритмом статистичної перевірки гіпотез;

– *завдання з'ясування механізму явища*;

– *завдання оптимізації* (типова задача конструкторських та технологічних розробок);

– *динамічні вимірювання*;

– *класифікація спостережень, або розпізнавання образів.*

Деякі з перерахованих типів завдань можуть бути як кінцевою метою експерименту, так і проміжним етапом при вирішенні завдань «вищого» рівня.

## **2. Основні питання методології експериментальних досліджень**

---

*Експериментальне дослідження включає ряд етапів*: формулювання мети, висунування гіпотези про досліджуваний об'єкт, планування експерименту, проведення експерименту, обробка та аналіз результатів, перевірка правильності висунутої гіпотези, висунування нової гіпотези, перевірка умов закінчення експерименту, планування нового експерименту. Таким чином, дослідження об'єкта складається з циклів, які повторюються, причому від циклу до циклу зростає обсяг знань про об'єкт, а гіпотези, які висунувають, все більше наближаються до дійсності.

Формулювання мети експерименту (постановка завдання) – дуже важливий і часто найбільш творчий етап у діяльності експериментатора або розробника нової техніки і технології. Саме мета визначає план проведення експерименту і спосіб обробки отриманих результатів, а також їх використання для прийняття рішень.

*Головна мета, яку ставлять перед експериментальними дослідженнями*, полягає в побудові математичних моделей об'єктів, тобто в ідентифікації цих об'єктів.

Внаслідок розвитку методів системного підходу і прикладних методів дослідження складних систем на основі побудови їх математичних моделей в останні роки здійснюють все тісніший зв'язок теоретичних досліджень з експериментальними, тобто розвивають *комбіновані експериментально-теоретичні методи дослідження*. Математична модель у цьому випадку виступає зв'язуючою ланкою теоретичних та експериментальних досліджень.

До спеціальних методів експериментування відносять також проведення експерименту на ЕОМ, так зване *імітаційне моделювання (обчислювальний експеримент)*, тобто моделювання, що відтворює за спеціальною програмою близьку до реальної картину роботи чи функціонування об'єкта.

Натурні експериментальні дослідження складають один з основних видів досліджень, тому що тільки вони можуть дати достовірну картину про явища і процеси. Але для отримання за ними достатньо точних значень, необхідних статистичних характеристик зазвичай потрібне проведення великої кількості експериментів, що пов'язано зі значними витратами часу і матеріальних засобів.

Закінчують експериментальне дослідження вирішенням завдань аналізу та синтезу: встановленням основних властивостей і закономірностей функціонування і встановленням оптимальних значень параметрів або режимів роботи досліджуваного об'єкта або системи. Як показники ефективності системи та її підсистем вибирають числові характеристики, що оцінюють ступінь їх відповідності поставленим завданням. Зазвичай їх визначають як функціонали від вхідних і вихідних величин та параметрів системи, наприклад, різні техніко-експлуатаційні характеристики, економічні показники та ін.

### **3. Розробка план-програми експерименту**

---

Для скорочення тривалості й підвищення ефективності експерименту необхідно до початку його проведення *встановити інтервали між значеннями факторів*. Спочатку визначають загальні границі зміни незалежних факторів, обумовлені їх фізичною природою або можливостями устаткування. Наприклад, стосовно до технології оброблення металів такими обмеженнями є: температура плавлення або границя міцності досліджуваного металу, граничні значення частот обертання головного руху та механізму подачі верстата та ін. Потім визначають, як слід змінювати рівні факторів всередині цих границь.

*Існують два основних критерії, на основі яких проводять вибір точок, що відповідають умовам проведення дослідження:*

- 1) відносна точність даних на різних ділянках області планування;
- 2) характер експериментальної функції.

У багатьох випадках дані, які отримують, мають неоднакову точність на різних ділянках області експериментування. Наприклад, для багатьох механічних систем випробувань, що проводять при зниженій потужності або малому тиску, температурі, будуть не точними.

Якщо аналіз помилок показує, що на якійсь ділянці області експериментування дані викликають найбільші сумніви, то зазвичай намагаються заповнити цю ділянку великим числом дослідних точок.

Якщо точність вимірювань однакова для всіх факторів і відгуку, то бажано, щоб відстань між точками на експериментальній кривій була постійною на всій її довжині.

Вибір необхідних інтервалів між точками проводиться не для того, щоб отримати симетричну або зручну криву, а щоб забезпечити на всіх ділянках кривої однакову точність експериментальних даних.

По суті всі експерименти не відтворювані, жоден зразок або прилад після використання не повертається до вихідного стану. Але зміни в них у процесі експерименту настільки малі, що їх неможливо виявити. У цьому випадку експеримент вважають відтворюваним і він допускає вибір послідовності умов його виконання.

Є два основних типи однофакторного експерименту: послідовний і рандомізований (випадковий). Суть послідовного експерименту полягає в тому, що рівень фактора змінюється стрибкоподібно. Після кожного кроку проводять аналіз результатів і на підставі цього аналізу приймають рішення про хід подальшої роботи.

Послідовний експеримент доцільний в наступних випадках:

- 1) якщо відомо, що він невідтворюваний;
- 2) коли система (об'єкт), яку випробовують, має деякі особливості, які можна виявити лише при отриманні даних в регулярній послідовності (при аналізі стабільності технологічного процесу механічного оброблення);
- 3) якщо тривалість, вартість або складність експериментів такі, що рандомізований експеримент недоцільний.

Якщо рівень фактора змінюється випадковим чином, приймаючи то менші, то більші значення, план експерименту називають *рандомізованим*. Основною метою рандомізації є зведення ефекту деякого невідтворюваного фактору до випадкової помилки.

Рандомізація плану експерименту може бути досягнута з допомогою:

- 1) таблиці випадкових чисел;
- 2) «ігрового» методу;
- 3) запровадження спеціальних блоків.

#### 4. Теорія подібності. Види подібності. Числа подібності

Висновки теорії подібності будують на підставі дослідження диференціальних рівнянь, що описують протікання досліджуваного процесу.

При складанні диференціального рівняння процес розглядають в довільно виділеному елементарному обсязі протягом довільно обраного малого інтервалу часу. Стосовно до досліджуваного в елементарному обсязі процесу дають математичне формулювання відповідного загального закону фізики.

При складанні диференціального рівняння відволікаються від власних особливостей одного процесу, тому воно описує цілий клас процесів, в межах якого діють застосовані фізичні закони. Для опису одиничного процесу диференціальне рівняння доповнюють даними, що характеризують цей процес, тобто *умовами однозначності*.

Умови однозначності включають:

- 1) геометричні розміри і форму об'єму, в якому протікає процес;
- 2) фізичні властивості середовища, суттєві для процесу, який розглядають;
- 3) граничні умови, що характеризують взаємодію середовища з тілами, які обмежують об'єм, в якому протікає процес;
- 4) початковий стан системи, тобто її стан в момент, коли починають вивчення процесу.

Теорія подібності дозволяє поширити дані одиничного дослідження на певну *групу подібних процесів*. Щоб виділити з класу групу подібних процесів, потрібно умови однозначності задати у формі похідних відповідних параметрів на постійні числові множники, тобто створити подібність умов однозначності. *Подібність умов однозначності включає подібності*: геометричну, тимчасову, фізичних величин, граничних і початкових умов.

*Геометрична подібність об'єктів (систем)* дотримується, якщо відношення всіх подібних розмірів двох порівнюваних об'єктів є величиною постійною:

$$l_1'' / l_1' = l_2'' / l_2' = \dots = K_1,$$

де  $l_1', l_2', \dots$  – розміри, що характеризують перший об'єкт;

$l_1'', l_2'', \dots$  – розміри, що характеризують другий об'єкт, подібний першому;

$K_1$  – множник лінійного (геометричного) перетворення, що зберігає постійні значення для двох подібних об'єктів (при переході до третього об'єкту, подібного першому, множник перетворення  $K_1$  отримує інше значення).

Тимчасова подібність дотримується, якщо відношення між подібними інтервалами часу процесу зберігає постійне значення:

$$\tau_1'' / \tau_1' = \tau_2'' / \tau_2' = \dots = K_{\tau},$$

де  $\tau_1', \tau_2', \dots$  – інтервали часу в першому процесі;

$\tau_1'', \tau_2'', \dots$  – інтервали часу у другому процесі, подібному першому;

$K_{\tau}$  – множник тимчасового перетворення, який зберігає постійне значення для двох подібних об'єктів.

Тимчасову подібність процесів називають *гомохронністю* (однорідністю в часі).

Одночасність протікання процесів, що є частковим випадком гомохронності (при  $K_{\tau} = 1$ ), називають *синхронністю*. У цьому випадку подібні моменти часу співпадають.

*Подібності фізичних величин* дотримуються, якщо відношення значень цих величин для подібних процесів у моменти часу, що збігаються, є величиною постійною. Якщо значення фізичних величин не постійне в усьому об'ємі, охопленому процесом, то для подібних процесів повинна дотримуватися *подібність полів фізичних величин*.

*Полям фізичної величини* називають сукупність миттєвих значень фізичної величини в усьому об'ємі, охопленому процесом. *Подібність полів фізичних величин* дотримуються, якщо відношення значень цих величин для подібних процесів, у співпадаючих точках об'єму та в моменти часу, що збігаються, є величиною постійною. Якщо розглядають векторні фізичні величини, то для подібних процесів напрям їх повинен співпадати.

*Подібність граничних умов* визначають тим, що всі значення величин, що характеризують ці умови на границях системи, для співпадаючих точок у моменти часу, що збігаються, знаходяться в постійних співвідношеннях.

*Подібність початкових умов* означає, що в момент, коли починають вивчення процесу (початковий момент), дотримуються подібності полів всіх фізичних величин у усьому об'ємі, охопленому досліджуваним процесом.

*Умови однозначності є індивідуальними ознаками різних процесів одного і того ж класу*. За цими індивідуальними ознаками і розрізняють між собою процеси.

*Поняття подібності процесів значно ширше, ніж поняття подібності умов однозначності*. Подібність процесів поширюється на весь об'єм і на весь період їх протікання. Подібність умов однозначності поширюється на весь об'єм тільки в початковий момент, а в наступні моменти умови однозначності визначають подібність тільки на границі.

*Процеси подібні, якщо їх описують одним і тим же диференціальним рівнянням (або системою диференціальних рівнянь) за подібних умов однозначності*.

Функціональну залежність між подібними процесами можна записати в загальному вигляді:

– для першого процесу

$$F(l', \tau', \rho' \dots) = 0; \quad (1)$$

– для другого процесу, подібного до першого

$$F(l'', \tau'', \rho'' \dots) = 0 \quad \text{або} \quad F(K_{\tau} \cdot l', K_{\tau} \cdot \tau', K_{\rho} \cdot \rho' \dots) = 0. \quad (2)$$

Рівняння (1) і (2) описують подібні процеси і не повинні відрізнятися одне від другого. Отже, для дотримання подібності потрібно знайти і витримати умови, при яких множення змінних на постійні множники не змінювало би рівняння.

Числа подібності отримують з диференціальних рівнянь будь-якого ступеня складності за такою схемою. Як приклад візьмемо рівняння, що виражає другий закон механіки (сила дорівнює добутку маси на прискорення). Розділимо обидві частини рівняння

$$f = m \frac{d\omega}{d\tau} \quad (3)$$

на праву частину, тоді обидві частини стануть безрозмірними величинами

$$\frac{fd\tau}{md\omega} = 1. \quad (4)$$

Аналогічно рівнянням (1) і (2) запишемо рівняння (4) для двох процесів

$$\frac{f'd\tau'}{m'd\omega'} = 1. \quad (5)$$

$$\frac{f''d\tau''}{m''d\omega''} = 1. \quad (6)$$

Змінні рівняння (6) виразимо через змінні рівняння (5) шляхом множення їх на відповідні множники перетворення і, виносячи постійні  $K_f$  і  $K_\omega$  з під знака диференціювання, отримаємо

$$\frac{K_f K_\omega}{K_m K_\omega} \frac{f'd\tau'}{m'd\omega'} = 1. \quad (7)$$

Рівняння (5) і (7) відрізняються комплексом з добутку постійних величин. Ці рівняння будуть однакові тільки в тому випадку, якщо комплекс з добутку постійних величин (множників перетворення), що входить в рівняння (7), дорівнює одиниці.

Якщо замінимо множники перетворення в рівнянні (7) відповідними відношеннями змінних, то отримаємо іншу форму рівняння, що виражає подібність процесів

$$\frac{f'\tau'}{m'\omega'} = \frac{f''\tau''}{m''\omega''} = \dots idem. \quad (8)$$

Безрозмірні комплекси, складені за типом комплексу в співвідношенні (8), отримали назву *чисел подібності*.

Числа подібності зазвичай позначають двома першими літерами прізвищ вчених, відомих своїми роботами у відповідній галузі наук. Отримане число (8) називають числом Ньютона. Воно визначає механічну подібність

Числа подібності, що представляють собою відношення двох однойменних величин і отримуються безпосередньо з умов завдання дослідження, називають *параметричними числами подібності*.

Фізичні величини, що характеризують процес, можуть мати різне значення для різних точок об'єму. У цьому випадку зазвичай використовують середні значення фізичної величини. Числа подібності, складені з середніх значень фізичних величин, називають *середніми числами подібності*.

Якщо у вираз числа подібності входить лінійний розмір, то вибирають той розмір, який найповніше характеризує систему, охоплену процесом (наприклад, діаметр при розгляді процесу руху рідини в трубі). Лінійний розмір, що включають в число подібності, та який є найхарактернішим для системи, що розглядають, називають *визначальним*, або *характерним лінійним розміром*.

*Рівність визначальних чисел подібності (критеріїв) є умовою подібності процесів.*

Числа подібності, до складу яких входить хоча б одна фізична величина, що не входить в умови однозначності, називають *невизначеними*, або *визначеними числами подібності*. *Рівність невизначених чисел подібності є наслідком подібності процесів.*

У дослідах потрібно вимірювати всі величини, що входять до чисел подібності досліджуваного процесу. Результати дослідів потрібно представляти у вигляді рівняння подібності, тобто у вигляді залежності між членами подібності.

Вигляд функціональної залежності між числами подібності визначають дослідним шляхом. Зазвичай цю функціональну залежність представляють у вигляді графіка або у вигляді степеневих функцій.

## 5. Вимірювання, їх види і класи

*Вимірювання* – це визначення значення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів.

На практиці завдання вимірювання включає не тільки визначення числа, що виражає відношення вимірюваної величини до загально-прийнятої одиниці вимірювання, а також визначення при цьому допущеної похибки.

Безпосередній процес вимірювання складається із спостереження і вимірювання.

*Мета спостереження* – фіксація факту настання якої-небудь певної події. Після настання очікуваної події проводять зчитування показників приладу зі шкали лімба або цифрового табло, визначення маси еталонної речовини (гир) і т.д.

Наявність такого зв'язку між відліком і значенням вимірюваної величини характеризують *рівнянням вимірювання*. По виду цих рівнянь *вимірювання можна розділити на три групи*: прямі, непрямі й спільні.

*При прямому вимірюванні рівняння має вигляд*

$$y = Cx,$$

де  $y$  – значення вимірюваної величини в прийнятих для неї одиницях;

$C$  – ціна поділу шкали або одиничного показника цифрового табло, перевідний коефіцієнт від одиниці міри властивості еталонної речовини до значення вимірюваної величини в одиницях вимірюваної величини;

$x$  – відлік за вимірювальним пристроєм (за поділками шкали або безпосередньо на цифровому табло) чи кількісна характеристика якої-небудь властивості еталонної речовини (наприклад, маса гир при зважуванні).

*При прямих вимірюваннях* шукане значення величини знаходять безпосередньо з дослідних даних (вимірювання довжини лінійкою, кутів – транспортиром або вимірювання будь-якої величини приладом, шкала якого проградуєрована в одиницях вимірюваної величини).

*Для непрямого вимірювання характерне рівняння*

$$z = f(x, y, \dots; a, b, \dots),$$

де  $z$  – значення вимірюваної величини в прийнятих для неї одиницях;

$x, y, \dots$  – результати прямих вимірювань;

$a, b, \dots$  – фізичні константи і постійні приладів.

Прикладом *спільних вимірювань* може служити оцінка параметрів деякої прямої  $y = \alpha + \beta x$ : тангенса кута її нахилу  $\beta$  до осі абсцис і значення ординати  $\alpha$  при нульовому значенні абсциси ( $x = 0$ ). Аналогічні вимірювання однойменних величин називають *сукупними*.

*Вимірювання*, при яких число дослідів і відповідно число рівнянь вимірювань дорівнює числу вимірюваних величин, називають *однократними*. Якщо число дослідів і відповідно число рівнянь вимірювання перевищує число вимірюваних величин, то такі вимірювання називають *багатократними*. Вимірювання проводять багатократно, коли необхідно зменшити випадкову помилку вимірювань.

*Залежно від точності результатів можна виділити три класи вимірювань*:

1) еталонні, результат яких повинен мати максимально можливу точність при досягнутому рівні техніки і науки (вимірювання фізичних констант);

2) контрольно-повідомчі, при яких помилка результату не перевищує заздалегідь заданого допуску (вимірювання в повірочних або контрольно-вимірювальних лабораторіях при перевірці приладів);

3) технічні, помилку результатів яких визначають характеристиками вимірюваного комплексу.

Вимірювання, засноване на прямих вимірюваннях однієї або декількох основних величин та (або) використанні значень фізичних констант і функціональних залежностей,

називають *абсолютним*. Розмірність результату абсолютних вимірювань така ж, що і вимірюваної величини (наприклад, вимірювання густини тіла).

*Відносним* називають вимірювання відношення величини до однойменної величини, що відіграє роль одиниці. Таке порівняння дозволяє встановити, у скільки разів ( $k$ ) одна величина більша за другу. Рівняння відносних вимірювань має вигляд

$$y = kx.$$

Приклади відносних вимірювань: визначення маси тіла на вагах, вимірювання довжини за допомогою різного роду лінійок, мікрометрів, штангенциркулів; знаходження різниці потенціалів – вольтметрами, а сили струму – амперметрами і т.д.

У випадку відносних вимірювань використовують прилади, які попередньо калібрують за допомогою еталона одиниці відповідної величини. Таким чином, щоб були можливі відносні вимірювання деяких величин, необхідно створити еталони одиниць цих величин і з їх допомогою зробити калібрування приладів.

## **6. Помилки і похибки вимірювань, їх види. Природа виникнення, основні принципи і методи їх усунення**

Помилки вимірювання прийнято ділити на систематичні, випадкові й грубі (промахи).

*Систематична помилка* залишається постійною протягом однієї серії вимірювань або змінюється за яким-небудь законом (наприклад, при зважуванні на терезах за допомогою неточних гир).

*Систематичні помилки в свою чергу класифікують за їх причинами та властивостями.* Причинами систематичних похибок можуть бути метод вимірювання, засоби вимірювань і людський фактор (експериментатор). Відповідно прийнято розрізняти систематичні похибки на методичні, інструментальні та особисті.

*За властивостями систематичні похибки ділять* на постійні й закономірно змінні. Останні в свою чергу ділять на прогресуючі, періодичні й змінні за складним законом.

*Прогресуючі похибки* – це ті, які монотонно зростають або спадають у процесі вимірювань (зміни робочого струму потенціометра через падіння напруги на клеммах, що живлять його акумулятор).

*Періодичні похибки* – похибки, що змінюються з певним періодом.

*Систематичні помилки за характером їх прояву можна розділити на чотири групи:*

1. *Помилки, природа яких відома, а величина може бути досить точно визначена.* Вони можуть бути усунені введенням відповідних поправок. Якщо поправка на порядок (в 10 разів і більше) менша точності вимірювань, то враховувати її нема потреби. Часто приймають, що коли поправка не перевищує 0,005 від середньої квадратичної помилки  $s$  результату вимірювань, то нею слід нехтувати. Ця рекомендація надмірно жорстка, зазвичай можна знехтувати поправками, які мають більше значення.

2. *Помилки відомого походження, але невідомої величини* (похибка вимірювальних приладів, яку визначають іноді класом точності приладу). Систематичні помилки даного типу не можуть бути виключені.

3. *Неявні помилки, про існування яких можна і не підозрювати,* хоча вони можуть бути досить значними і тому небезпечними.

Так, наприклад, при визначенні густини якогось металу через вимірювання об'єму і маси зразка можна отримати грубу помилку, якщо зразок містить усередині порожнини, наприклад повітря або шлак, що утворилися при чавунному чи сталевому литві.

Надійний спосіб виключення таких похибок – проведення вимірювань тієї ж величини іншими методами і в інших умовах. Співпадання отриманих результатів служить достатньою, хоча й не абсолютною гарантією їх правильності.

4. *Помилки, зумовлені властивостями об'єкта і не пов'язані безпосередньо з вимірювальними операціями.*



Вимірюють діаметр циліндра, який вважають круглим, але насправді має форму овала (еліпса). Якщо виміряти діаметр один раз у будь-якій площині й вважати циліндр круглим, то обчислена за результатами цього вимірювання площа перерізу циліндра буде містити систематичну помилку, яку визначають ступенем овальності циліндра і вибраним для вимірювання діаметром. Справжній діаметр циліндра буде характеризувати його середнє значення, отримане за результатами ряду вимірювань в різних площинах. При цьому систематична похибка буде переведена в розряд випадкових.

*Випадкова помилка* виникає в результаті спільного впливу різних випадкових факторів (вібрація, зовнішні поля, кліматичні явища і т.п.). Ці помилки не можуть бути враховані ні розрахунковим, ні дослідним шляхами. Для оцінки випадкових помилок використовують апарат теорії ймовірностей та математичної статистики. Зі збільшенням числа вимірювань випадкова помилка експерименту зменшується.

*Груба помилка (промах)* обумовлена часто недостатньою увагою експериментатора. Вона виникає, наприклад, через помилку в записі, відліку по сусідній шкалі, неправильного включення приладу і т.п.

Отриманий результат вимірювання має цінність тільки в тому випадку, якщо відома оцінка похибки цього результату і довірна ймовірність цієї оцінки похибки. Розрізняють абсолютну і відносну похибки.

*Абсолютна похибка* – це різниця між вимірним  $x_i$  та істинним значенням фізичної величини. Оскільки «дійсне» значення величини встановити неможливо, в метрології користуються так званим «дійсним»  $x_a$  значенням, отриманим за допомогою зразкового приладу.

*Абсолютну похибку вимірювання непрямой величини* обчислюють за формулою

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i,$$

де  $Y$  – результат непрямих вимірювань, який залежить від результатів прямих вимірювань  $x_1, x_2, \dots, x_n$  наступним чином  $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  і відомі відносні похибки фізичних величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Об'єктивнішою оцінкою результатів вимірювань є використання *середньоквадратичної похибки*. Крім того встановлено, що наведена залежність визначення абсолютної похибки непрямого вимірювання не змінює свого вигляду, якщо замість  $\Delta Y$  використовувати  $\sigma_Y$ , а замість  $\Delta x_i$  використовувати  $\sigma_{x_i}$ .

Повніше уявлення про неточність вимірювання дає значення *відносної похибки*

$$\gamma = \frac{x_i - x_d}{x_d} = \frac{\Delta x}{x_d}.$$

Зазвичай,  $\Delta x \leq x_i, x_d, x_i \approx x_d$ , тому

$$\gamma = \Delta x / x_d,$$

тобто при обчисленні відносної похибки абсолютну похибку можна відносити до вимірюваного значення фізичної величини.

Абсолютна і відносна похибки характеризують вимірювальний засіб (прилад) тільки при одному його показі. Повністю оцінити якість приладу можна за його *приведеною похибкою*:

$$\gamma = \Delta x / x_i,$$

де  $x_i$  – нормуюче значення (умовно прийняте значення, яке може бути рівне верхній границі або діапазону шкали і т.д.).

Згідно приведеної похибки вказують *клас точності приладу* і позначають на його шкалі. Для визначення відповідності приладу його класу точності, прилад періодично піддають повірці, при якій визначають максимальне значення приведеної похибки і *варіацію показів*

$$\varepsilon = \delta x / x,$$

де  $\delta x$  – максимальна різниця між показами приладу при прямому і зворотному ході;  
 $x$  – нормуюче значення.

Варіація приладу повинна бути менше його приведеної похибки (класу точності). Клас точності вказаний на панелі приладу і може приймати такий ряд значень: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5 – прецизійні; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0 – технічні прилади. Менш точні прилади позначення класу не мають. Якщо на приладі вказаний клас точності 0,5, то це означає, що покази приладу правильні з точністю до 0,5% від усього діапазону вимірювань за шкалою приладу. Наприклад, якщо вольтметр має шкалу, градуйовану до 150 В, клас точності 0,5, то він дає абсолютну похибку не більше  $\pm 0,75$  В.

Максимальні похибки, що дають вимірювальні лінійки, мікрометри і деякі інші прилади, інколи наносять на самому приладі або вказують в паспорті, який додають до нього. Якщо таких вказівок нема, точність вимірювань становить не менше 0,2 ціни поділки шкали приладу.

*Постійні систематичні помилки можна усунути* методом подвійного вимірювання (проводять два заміри, при яких ролі лівої і правої частин установки послідовно змінюють, наприклад, ваги) і методом компенсації (проведення вимірювань два рази таким чином, щоб похибка увійшла в результати замірів один раз з одним знаком, а інший раз – з іншим, наприклад термопари).

Для попередження прогресуючої похибки використовують два спостереження, виконаних з фіксацією часу. Якщо результати спостережень  $E_1$  і  $E_2$  задовольняють залежностям

$$E_1 = x + K\tau_1, E_2 = x + K\tau_2,$$

де  $x$  – дійсне значення вимірюваної величини;

$K$  – коефіцієнт пропорційності, який враховує зміну похибки вимірювання в часі;

$\tau_1, \tau_2$  – моменти часу виконання спостережень, то

$$x = \frac{E_1\tau_2 - E_2\tau_1}{\tau_2 - \tau_1}.$$

#### *Методика обробки прямих і непрямих вимірювань*

Найкращою оцінкою дійсного значення величини  $X$  є *вибіркове середнє значення*

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{N=1}^N x_N}{N}, \quad (9)$$

де  $x_N$  – відлік величини  $X$ ;  $N$  – число відліків.

Для оцінки розподілу відліків при вимірюванні використовують *вибіркове середньоквадратичне відхилення* відліків

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{N=1}^N (x_N - \langle x \rangle)^2}{N-1}}, \quad (10)$$

Вибіркове середнє є випадковою величиною і його розподіл відносно дійсного значення вимірюваної величини оцінюють *вибірковим середнім квадратичним відхиленням середнього значення*

$$S_{(x)} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}. \quad (11)$$

Довірчим інтервалом називають інтервал  $[\langle x \rangle - \Delta], [\langle x \rangle + \Delta]$  який із заданим ступенем достовірності включає в себе дійсне значення вимірюваної величини.

Довірчою ймовірністю (надійністю) результату серії спостережень називають ймовірність  $\alpha$ , з якою довірчий інтервал включає дійсне значення вимірюваної величини.

Випадкову складову похибки прийнято виражати як півширину довірчого інтервалу. Розмір довірчого інтервалу зазвичай задають у вигляді кратного  $S_{(x)}$  значення.

Тоді випадкову складову похибки багаторазових вимірювань визначають так

$$\Delta_x = t_\alpha S_{(x)}, \quad (12)$$

де  $t_\alpha$  – безрозмірний коефіцієнт довіри (коефіцієнт Стьюдента).

Найкращою оцінкою дійсного значення величини  $X$  є вибіркове середнє значення

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{n=1}^N x_N}{N} \quad (13)$$

де  $x_N$  – відлік величини  $X$ ;  $N$  – число відліків.

Для оцінки розподілу відліків при вимірюванні використовують вибіркове середньоквадратичне відхилення вимірювань

$$S_x = \sqrt{\frac{\int_{n=1}^N (x_N - \langle x \rangle)^2}{N - 1}}$$

Вибіркове середнє є випадковою величиною і його розподіл відносно дійсного значення вимірюваної величини оцінюють вибірквим середнім квадратичним відхиленням середнього значення

$$S_{(x)} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}$$

Довірчим інтервалом називають інтервал  $[\langle x \rangle - \Delta, \langle x \rangle + \Delta]$ , який із заданим ступенем достовірності включає в себе дійсне значення вимірюваної величини.

Довірчою ймовірністю (надійністю) результату серії спостережень називають ймовірність  $\alpha$ , з якою довірчий інтервал включає дійсне значення вимірюваної величини.

Випадкову складову похибки прийнято виражати як напівширину довірчого інтервалу. Розмір довірчого інтервалу зазвичай задають у вигляді кратного  $S_{(x)}$  значення.

Тоді випадкову складову похибку багаторазових вимірювань визначають за формулою

$$\Delta_x = t_\alpha S_{(x)}$$

де  $t_\alpha$  – безрозмірний коефіцієнт довіри.

Коефіцієнт  $t_\alpha$  показує, у скільки разів потрібно збільшити  $S_{(x)}$ , щоб при заданому числі вимірювань отримати задану надійність їх результату. Коефіцієнт  $t_\alpha$  визначають за статистичними таблицями.

Повна похибка  $\Delta_x$  прямих вимірювань дорівнює квадратичній сумі її складових: інструментальної  $\Delta_a$  і випадкової  $\Delta_x$ .

Обробку прямих вимірювань рекомендують починати з перевірки відліків на наявність промахів. З отриманого ряду, що містить  $N$  відліків, вибирають аномальний відлік  $x_k$  і обчислюють модуль його відхилення від середнього значення в долях вибіркового середнього квадратичного відхилення

$$\Delta Z = \frac{|x_k - \langle x \rangle|}{S_{(x)}} \quad (13)$$

Потім обчислюють ймовірність цього відхилення, а також очікує число  $n$  вимірювань, які дадуть відліки, що мають відхилення  $Z$  не менше, ніж випробовуване. Якщо отримано  $n < 0,5$  (при округленні до цілого  $n = 0$ ), то відлік  $x_k$  вважають промахом. Цю процедуру можна змінити й обчислити очікуване число  $M$  відліків, серед яких буде хоча б один аномальний. Якщо  $M > N$ , то відлік  $x_k$  вважають промахом. Зв'язок між  $M$  і  $Z$  наведений в табл. 1.

*Алгоритм обробки прямих вимірювань:*

1. Визначити інструментальну похибку.
2. Обчислити середнє значення серії вимірювань за формулою (9).
3. Обчислити середнє квадратичне відхилення відліку за формулою (10). Якщо промах усунутий, то перейти до формули (12), інакше – до (11).
4. Перевірити відліки на наявність промаху:
  - відібрати аномальний відлік;
  - обчислити його відносне відхилення за формулою (13);
  - визначити очікуване число відліків, серед яких може бути аномальний, якщо це число більше числа відліків, то виключити аномальний відлік і перейти до формули (9); інакше перейти до (12).
5. Обчислити вибіркє середнє квадратичне відхилення середнього значення за формулою (11).
6. Визначити коефіцієнт довіри для заданої надійності й отриманого числа відліків.
7. Обчислити випадкову похибку за формулою (12).
8. Обчислити повну похибку.
9. Після заокруглень результат обробки вимірювань записати у формі

$$x = (\langle x \rangle \pm \Delta x) / Y; \quad \delta = (\Delta x / \langle x \rangle) \cdot 100\%; \quad \alpha.$$

Іноді необхідно об'єднати результати декількох серій прямих вимірювань однієї й тієї ж фізичної величини.

Таблиця 1.

#### Відбір промахів за критерієм Шовене

Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M
1,00	2	1,40	3	1,80	7	2,20	18	2,60	54
1,02	2	1,42	3	1,82	7	2,22	19	2,62	57
1,04	2	1,44	3	1,84	8	2,24	20	2,64	60
1,06	2	1,46	3	1,86	8	2,26	21	2,66	64
1,08	2	1,48	4	1,88	8	2,28	22	2,68	68
1,10	2	1,50	4	1,90	9	2,30	23	2,70	72
1,12	2	1,52	4	1,92	9	2,32	25	2,72	77
1,14	2	1,54	4	1,94	10	2,34	26	2,74	81
1,16	2	1,56	4	1,96	10	2,36	27	2,76	87
1,18	2	1,58	4	1,98	10	2,38	29	2,78	92
1,20	2	1,60	5	2,00	11	2,40	30	2,80	98
1,22	2	1,62	5	2,02	12	2,42	32	2,82	104
1,24	2	1,64	5	2,04	12	2,44	34	2,84	111
1,26	2	1,66	5	2,06	13	2,46	36	2,86	118
1,28	2	1,68	5	2,08	13	2,48	38	2,88	126
1,30	3	1,70	6	2,10	14	2,50	40	2,90	134
1,32	3	1,72	6	2,12	15	2,52	43	2,92	143

1,34	3	1,74	6	2,14	16	2,54	45	2,94	152
1,36	3	1,76	6	2,16	16	2,56	48	2,96	163
1,38	3	1,78	7	2,18	17	2,58	51	2,98	173

Нехай результати  $M$  вимірювань представлені у вигляді

$$x = \langle x_1 \rangle \pm \Delta_{x_1}; \quad x = \langle x_2 \rangle \pm \Delta_{x_2}; \quad \dots; \quad x = \langle x_M \rangle \pm \Delta_{x_M}.$$

Найкраще значення  $\langle x \rangle$  і його похибку  $\Delta_x$  обчислюють за формулами

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{m=1}^M w_m \cdot x_m}{\int_{m=1}^M w_m}; \quad \Delta x = \left( \int_{m=1}^M w_m \right)^{-\frac{1}{2}},$$

де  $w_m = 1/(\Delta x_m)^2$  – статистична вага кожної серії вимірювань.

Розглянемо методичку обробки непрямих вимірювань.

Нехай  $u = f(x, y, \dots)$  функціональна залежність між вимірюваною величиною  $u$  і величинами  $x, y, \dots$ , значення яких знайдені прямими вимірюваннями.

Дійсне значення  $\langle u \rangle$  визначають як

$$\langle u \rangle = f(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \dots) \quad (14)$$

Отримаємо вираз для похибки  $\Delta u$ . Якщо зафіксувати значення всіх аргументів крім одного, наприклад  $x$ , то приріст функції при зміні її аргументу має вигляд

$$\Delta_x u = f(\langle x \rangle + \Delta x, \langle y \rangle \dots) - f(\langle x \rangle, \langle y \rangle \dots) \quad (15)$$

Якщо значення  $\Delta x$  мале, то в інтервалі  $[\langle x \rangle - \Delta x(x) + \Delta x]$  функцію  $u = f(x)$  можна вважати

лінійною. Величина характеризує похибку  $\Delta u$ , обумовлену похибкою  $\Delta x$ . Аналогічно визначають складові похибки  $\Delta u$ , що вносяться іншими аргументами. Повну похибку  $\Delta u$  непрямих вимірювань  $u$  обчислюють за допомогою квадратичного додавання, або додавання за модулем її складових, які вносяться кожним аргументом

$$((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \dots)^{1/2}; \quad (16)$$

$$\Delta u = |\Delta x| + |\Delta y| + \dots \quad (5.17)$$

Співвідношення (16) застосовують у тому випадку, коли виконуються дві умови. По-перше, похибка аргументів обумовлена впливом багатьох факторів, серед яких немає переважаючого фактору. По-друге, похибки аргументів статистично не пов'язані. В інших випадках використовують співвідношення (17). Однак правило додавання (17) часто призводить до завищеного значення похибки непрямих вимірювань.

*Алгоритм обробки непрямих вимірювань:*

1. За відомою залежністю вимірюваної величини від її аргументів, значення яких знайдені за допомогою прямих вимірювань, обчислюють дійсне значення функції за формулою (14).

2. Обчислити складові похибки як приріст функції по кожному аргументу за формулою (15) або знайти часткові похідні по всіх аргументах і обчислити складові похибки.

3. Обчислити повну похибку функції за формулою (16) або за формулою (17).

*Правила заокруглення наближених чисел.*

*Незначущими* цифрами числа називають нулі на початку десяткових дробів, менших 1, і нулі в кінці числа, що замінили цифри, відкинуті після заокруглення. Інші цифри називають *значущими*.

*Сумнівною цифрою результату вимірювання* називають цифру, яка стоїть в розряді, що відповідає старшому розряду зі значущою цифрою у значенні похибки. Цифри, що стоять зліва

від сумнівної називають *правильними*, а справа – *неправильними*. Наприклад, числа  $586 \pm 6$ ;  $0,00234 \pm 0,0002$ ;  $1,00 \pm 0,03$ ;  $2000 \pm 30$  містять по три значущі цифри. При округленні числа  $299\,793 \pm 1$  до значення  $3 \cdot 10^5$  допущена похибка 207, тому в отриманому числі сотні є сумнівною цифрою і, отже, останні два нулі – незначущі.

Похибку зазвичай виражають однією значущою цифрою і лише при особливо відповідальних вимірюваннях – двома.

*Округлення похибки і дійсного значення.*

Похибки округлюють до однієї значущої цифри. Ця цифра є сумнівною, так як значення похибки не має правильних цифр.

Дійсне значення округлюють до цифри, розряд якої дорівнює розряду значущої цифри похибки. Остання цифра дійсного значення сумнівна, інші цифри – правильні.

При особливо точних вимірюваннях похибки округлюють до двох значущих цифр, якщо перша з них менше 4-х і до однієї значущої цифри, якщо перша цифра більше 3-х. Іноді в якості другої цифри залишають 0 або 5.

У числовому значенні вимірюваної величини, зчитаної зі шкали приладу, записують тільки правильні цифри і сумнівні цифри, розряд яких визначають за значенням інструментальної похибки приладу.

*Округлення чисел.*

Зайві цифри у цілих чисел замінюють нулями, а у десяткових дробів відкидають. Якщо заміненна нулем або відкинута цифра старшого розряду менше 5, то залишені цифри не змінюються. Якщо зазначена цифра більше 5, то остання залишена цифра збільшується на 1. Якщо заміненна нулем або відкинута цифра дорівнює 5, то заокруглення проводять таким чином: останню цифру в заокругленому числі залишають без зміни, якщо вона парна, і збільшують на 1, якщо вона непарна.

*Округлення при обчисленнях.*

При записуванні результатів проміжних обчислень зберігають одну запасну цифру, ту що стоїть праворуч від сумнівної. При додаванні й відніманні наближених чисел розряд сумнівної цифри результату збігається зі старшим із розрядів сумнівних цифр доданків. Результат множення і ділення містить стільки значущих цифр, скільки їх у вихідному, даному з найменшою кількістю значущих цифр. При піднятті до степеня (добування кореня) наближеного числа результат повинен мати стільки значущих цифр, скільки їх в основі (підкореновому виразі). При логарифмуванні у мантисі зберігають стільки значущих цифр, скільки їх у вихідному числі. Якщо один з операндів точне число, то кількість його цифр не впливає на округлення результату операції. Якщо при обчисленнях використовують табличні данні, то всі їх цифри правильні.

В таблиці наведені приклади округлення результатів вимірювань.

Запис до округлення	Запис після округлення
123357 678 А/м	123400 700 А/м
123357 678 В	123,4
237,46 мм	237,5 0,1 мм
0,00283 0,00034 кг	(2,8

*Квадратичне додавання.*

Якщо при квадратичному додаванні одне з чисел менше іншого в 3 і більше разів, то ним можна знехтувати.

## 7. Визначення мінімальної кількості вимірювань

---

Формула для розрахунку необхідного числа вимірювань

$$n = \frac{t_{\alpha} w^2}{k^2},$$

де  $k$  – заданий коефіцієнт, що показує частку граничної помилки від середнього арифметичного значення величини  $x$ ;

$w$  – коефіцієнта варіації.

Значення  $k$  можна визначити виходячи з практичних міркувань. Зокрема, для визначення стійкості ріжучого інструменту доцільно приймати середнє значення  $k = 0,2$ . При менших значеннях  $k$  істотно збільшується обсяг випробувань. Значеннями  $w$  також можна задаватися, виходячи з наявного досвіду подібних випробувань.